Oppgave 1

Bruker den tidløse bevegelseslikningen for konstant akselerasjon:

$$v^2 - v_0^2 = 2as \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

$$a = \frac{\left(\frac{50}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}\right)^2 - \left(\frac{280}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{2 \cdot 900\,\mathrm{m}}$$

$$= \underline{\underline{-3,3\,\mathrm{m/s^2}}}$$

Oppgave 2

Posisjonen til en bil som beveger seg rettlinjet er

$$x\left(t\right) = ct^3 + bt^2,$$

der b og c er positive konstanter. Finner akselerasjonen:

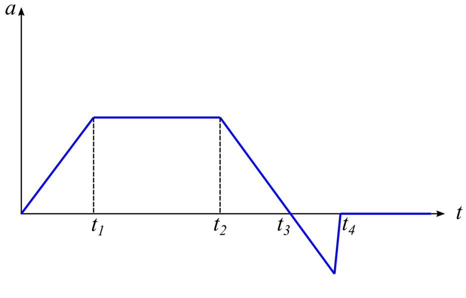
$$\begin{aligned} v\left(t\right) &= \frac{dx}{dt} \\ &= c \cdot 3t^2 + b \cdot 2t \\ &= \underline{3ct^2 + 2bt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\left(t\right) &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ &= 3c \cdot 2t + 2b \\ &= \underline{6c \cdot t + 2b} \end{aligned}$$

Altså er akselerasjonen en lineær funksjon tilsvarende en rett linje med positivt stigningstall (fordi $c > 0$) og som skjærer y-aksen i $y = 2b$.

Oppgave 3

Vi har gitt følgende akselerasjonsgraf for et legeme som beveger seg rettlinjet:



Vi blir bedt om å vurdere følgende påstander:

- ○ Farten er maksimal ved t_1
- ○ Farten øker mellom t_1 og t_2
- ○ Farten avtar mellom t_2 og t_3
- ○ Farten er maksimal ved t_2
- ○ Farten er konstant mellom t_1 og t_2

I tidsrommet mellom t_1 og t_2 er akselerasjonen positiv - dvs. farten øker. Dette er den eneste riktige påstanden (alle de andre påstandene baserer seg på at man feilaktig tolker grafen som en fartsgraf, og ikke en akselerasjonsgraf).

Oppgave 4

En kule som skytes ut fra bakkenivå og lander en avstand $x_1 = 1,0\,\mathrm{m}$ unna utgangspunktet ved en utskytingsvinkel på $\alpha_1 = 30°$ med en viss (uspesifisert) startfart v_0. Vi skal bestemme hvilken vinkel α_2 som gjør at kula treffer bakken en horisontal avstand $x_2 = 2,0\,\mathrm{m}$ fra utgangspunktet.

Kombinerer bevegelseslikningene for skrått kast i horisontal- og vertikalretning (pos. retning hhv. mot høyre og oppover), for det punktet der kula treffer bakken ($y = 0$):

$$x = v_0 \cos\alpha t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2 &= 0 \\ t\left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t\right) &= 0 \end{aligned}$$

Den interessante løsningen er da

$$\begin{aligned} v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t &= 0 \\ v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} &= 0 \\ \frac{1}{2} g \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} &= v_0 \sin\alpha \\ 2 \sin\alpha \cos\alpha &= \frac{gx}{v_0^2} \\ \sin(2\alpha) &= \frac{gx^2}{v_0^2} \qquad \text{(Trig. identitet)} \end{aligned}$$

Kula treffer bakken i $x_1 = 1,0\,\mathrm{m}$ ved vinkel $\alpha_1 = 30°$:

$$\sin(2\alpha_1) = \frac{g x_1^2}{v_0^2}$$

Skal bestemme hvilken vinkel α_2 som må brukes ved samme v_0 for å gi nedslag i $x_2 = 2,0\,\mathrm{m}$:

$$\sin(2\alpha_2) = \frac{g x_2^2}{v_0^2}$$

Kombinerer disse likningene og får

$$\frac{\sin(2\alpha_2)}{\sin(2\alpha_1)} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \Rightarrow \sin(2\alpha_2) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \sin(2\alpha_1)$$

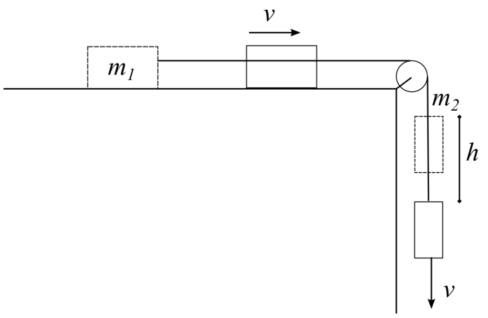
$$\sin(2\alpha_2) = \left(\frac{2,0\,\mathrm{m}}{1,0\,\mathrm{m}}\right)^2 \cdot \sin(2 \cdot 30°) = \underline{3,46}$$

Ettersom sinus har maksimalverdi 1, finnes det ingen vinkel som oppfyller likninga.

Det finnes **ingen vinkel** som gjør dette mulig.

Oppgave 5

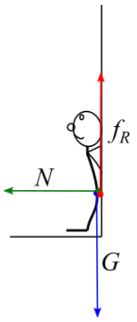
Setter opp energiregnskap: den potensielle energien til klossen med masse $m_2 = m$ i en høyde h over punktet der farten er v går over til kinetisk energi for de to klossene (de har hele tiden samme fart da de er forbundet med en snor):



$$\begin{aligned} m_2gh &= \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 \\ v &= \sqrt{\frac{2m_2gh}{m_1+m_2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot mgh}{m+3m}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{4}gh} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{2}gh}}} \end{aligned}$$

Oppgave 6

Figuren under viser kreftene som virker på en person som "henger" på veggen etter at gulvet i rommet har blitt senket:



Tre krefter virker: tyngden G, normalkraften N og hvilefriksjonskraften f_s. Ut i fra Newtons 1. lov må

$$f_s = G = mg,$$

og dessuten er

$$f_s = \mu_s N,$$

der μ_s er hvilefriksjonskoeffisienten mellom personen og veggen. Vi har altså følgende sammenhenger for personen som henger på veggen idet omløpstiden T er slik at personens banefart er v:

$$\begin{aligned} f_s &= mg \\ f_s &= \mu_s N \Rightarrow N = \frac{f_s}{\mu_s} \\ \sum F &= N = \frac{mv^2}{r} && \text{(Normalkraften gir sentripetalaks.)} \end{aligned}$$

Sammenhengen mellom banefart v og omløpstid T er gitt ved (tilbakelegger en strekning lik omkretsen til en sirkel i løpet av tiden T)

$$\begin{aligned} v &= \frac{strekning}{tid} \\ &= \frac{2\pi r}{T}, \end{aligned}$$

som gir at

$$\begin{aligned} N &= \frac{mv^2}{r} \\ &= m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} \\ &= m \cdot \frac{\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}}{r} \\ &= m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} \end{aligned}$$

Videre er

$$N = \frac{f_s}{\mu_s} = \frac{mg}{\mu_s}$$

Kombinert gir dette at

$$
\begin{aligned}
m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} &= \frac{mg}{\mu_s} \\
T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 r \cdot \mu_s}{g}} \\
T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 5{,}0\,\mathrm{m} \cdot 0{,}40}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}} \\
&= 2{,}84\,\mathrm{s} \\
&\approx \underline{\underline{2{,}8\,\mathrm{s}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 7

En bil med masse $m_1 = m$ og fart v treffer en annen bil med masse $m_2 = 2m$ som i utgangspunktet er i ro. Etter støtet blir bilene hengende sammen og beveger seg som ett legeme. Vi skal bestemme hvor stor prosentandel av den opprinnelige kinetiske energien som går tapt i kollisjonen.

Bevegelsesmengden er bevart i kollisjonen, og dette gir oss sluttfarten u til felleslegemet etter støtet:

$$
\begin{aligned}
\sum_{f\phi r} p &= \sum_{etter} p \\
m_1 v &= (m_1 + m_2)\, u \\
u &= \underline{\frac{m_1}{m_1 + m_2} v}
\end{aligned}
$$

Kinetisk energi før støtet:

$$
K_{f\phi r} = \frac{1}{2} m_1 v^2
$$

Kinetisk energi etter støtet:

$$
K_{etter} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\, u^2
$$

Prosentvis andel som har gått tapt i kollisjonen

$$
\begin{aligned}
\frac{K_{f\phi r} - K_{etter}}{K_{f\phi r}} &= \frac{\frac{1}{2}m_1 v^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2}{\frac{1}{2}m_1 v^2} \\
&= \frac{m_1 v^2 - (m_1+m_2)u^2}{m_1 v^2} && \left(\text{Forkorter } \tfrac{1}{2}\right) \\
&= \frac{m_1 v^2 - (m_1+m_2)\cdot\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 v^2}{m_1 v^2} && (\text{Setter inn for } u) \\
&= \frac{m_1 - \frac{m_1^2}{m_1+m_2}}{m_1} && (\text{Forkorter } v^2) \\
&= 1 - \frac{m_1}{m_1+m_2} && (\text{Forkorter og forenkler}) \\
&= 1 - \frac{m}{m+2m} \\
&= 1 - \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3} \\
&\approx \underline{\underline{67\,\%}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 8

Bevaring av bevegelsesmengde for klossene gir:

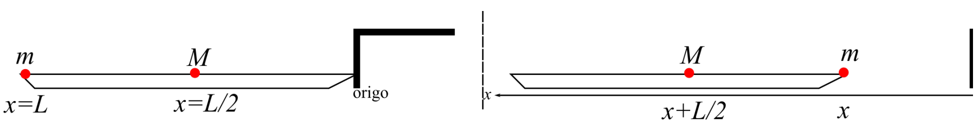
$$0 = mu + 2mv \Rightarrow v = \underline{-\frac{u}{2}}$$

Bevaring av energi gir

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v^2 \\
\frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot\left(-\frac{u}{2}\right)^2 \\
kx^2 &= mu^2 + \frac{1}{2}mu^2 \\
kx^2 &= \frac{3}{2}mu^2 \\
u &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{3}\frac{kx^2}{m}}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 9

For et system (mann + båt) som ikke påvirkes av en netto ytre kraft (når vi ser bort fra friksjon osv.), er det felles tyngdepunktet for mann + båt konstant. Vi legger et koordinatsystem med origo i kaikanten (velger positiv x-retning mot venstre), slik at før- og etter-situasjonen blir som figuren under viser:

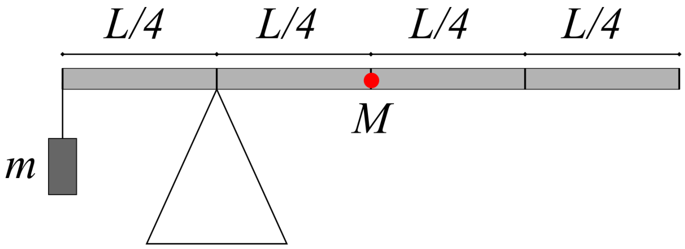


Båten har masse M mens mannen har masse m. Når vi behandler mannen som et punkt og vet at båtens massesenter ligger midt i båten, gir betingelsen om uendret massesenter at

$$\begin{aligned}
\frac{mL + M\cdot\frac{L}{2}}{m+M} &= \frac{mx + M\left(x+\frac{L}{2}\right)}{m+M} \\
mL + \frac{ML}{2} &= mx + Mx + \frac{ML}{2} \\
x\left(m+M\right) &= mL \\
x &= \frac{m}{m+M}L \\
&= \frac{60\,\mathrm{kg}}{60\,\mathrm{kg}+20\,\mathrm{kg}}\cdot 8,0\,\mathrm{m} \\
&= \underline{\underline{6,0\,\mathrm{m}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 10

La staven ha masse M. Tyngdepunktet til staven ligger midt på staven (og dermed en avstand $\frac{L}{4}$ fra vippepunktet), slik figuren under viser.



Momentbetingelsen for statisk likevekt om vippepunktet blir da

$$m\cdot\frac{L}{4} = M\cdot\frac{L}{4} \Rightarrow M = \underline{\underline{m}}$$

Oppgave 11

Gitt at en uniform, massiv kule med radius r ruller langs en bane der baneprofilen er gitt ved

$$y(x) = y_0\left(2 - e^{-\left(\frac{x}{L}\right)^2}\right),$$

der $y_0 = 1,00\,\mathrm{m}$ og $L = 2,00\,\mathrm{m}$.

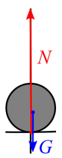
Kula slippes i $x = -L$ med null fart, og vi skal bestemme banefarten v i $x = 0$. La $y_1 = y\left(-L\right)$

og $y_2 = y(0)$. Energibevaring gir:

$$\begin{aligned}
mgy_1 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgy_2 && \left(\text{Her er } I = \tfrac{2}{5}mr^2\right)\\
mgy_1 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^2 + mgy_2 && (\text{Rullebetingelsen } v = \omega r)\\
g(y_1 - y_2) &= \frac{1}{2}v^2\left(1 + \frac{2}{5}\right) && (\text{Forkorter } m)\\
g(y_1 - y_2) &= \frac{7}{10}v^2\\
v &= \sqrt{\frac{10}{7}g(y_1 - y_2)}\\
&= \sqrt{\frac{10}{7}g(y(-L) - y(0))}\\
&= \sqrt{\frac{10}{7}g\left(y_0\left(2 - e^{-1}\right) - y_0(2-1)\right)}\\
&= \sqrt{\frac{10}{7}gy_0\cdot\left(1 - e^{-1}\right)}\\
&= \sqrt{\frac{10}{7}\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 1,00\,\mathrm{m}\cdot\left(1 - e^{-1}\right)}\\
&= \underline{\underline{2,98\,\mathrm{m/s}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 12

Figuren under viser kreftene som virker på kula i det laveste punktet i banen:



Newtons 2. lov gir:

$$N - G = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow N = \frac{mv^2}{R} + mg,$$

der R er krumningsradien for banen i $x = 0$, som er gitt fra formelark:

$$\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow R = \frac{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

Her er

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_0\left(2 - e^{-\left(\frac{x}{L}\right)^2}\right) = 2y_0 - y_0e^{-\frac{x^2}{L^2}}\\
y'(x) &= -y_0\cdot e^{-\frac{x^2}{L^2}}\left(-\frac{2x}{L^2}\right) = \frac{2y_0}{L^2}xe^{-\frac{x^2}{L^2}} && (\text{Kjerneregel})\\
y''(x) &= \frac{2y_0}{L^2}\left(e^{-\frac{x^2}{L^2}} + x\cdot e^{-\frac{x^2}{L^2}}\left(-\frac{2x}{L^2}\right)\right) = \frac{2y_0}{L^2}e^{-\frac{x^2}{L^2}}\left(1 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2\right) && (\text{Produktregel})
\end{aligned}$$

Får at

$$y'(0) = 0$$
$$y''(0) = \frac{2y_0}{L^2}$$

Dette gir en krumningsradius lik

$$R = \frac{1}{\frac{2y_0}{L^2}} = \frac{L^2}{2y_0}$$

Normalkrafta blir

$$\begin{aligned}
N &= \frac{mv^2}{R} + mg \\
&= \frac{m \cdot \frac{10}{7} g y_0 \cdot \left(1 - e^{-1}\right)}{\frac{L^2}{2y_0}} + mg \qquad \text{(Setter inn uttrykket for } v \text{ fra forrige oppg.)} \\
&= \frac{20}{7} \frac{y_0^2}{L^2} \left(1 - e^{-1}\right) \cdot mg + mg \\
&= mg \left(\frac{20}{7} \left(\frac{y_0}{L}\right)^2 \left(1 - e^{-1}\right) + 1 \right) \\
&= mg \cdot \left(\frac{20}{7} \cdot \left(\frac{1,00\,\mathrm{m}}{2,00\,\mathrm{m}}\right)^2 \left(1 - e^{-1}\right) + 1 \right) \\
&= \underline{\underline{1,45mg}}
\end{aligned}$$

Oppgave 13

Helningsvinkelen β er gitt ved

$$\tan\beta = \left|\frac{dy}{dx}\right| \Rightarrow \beta = \arctan\left|\frac{dy}{dx}\right|$$

Her er

$$\frac{dy}{dx} = y'(-L) = \frac{2y_0}{L^2}(-L)\, e^{-1} = -2\frac{y_0}{L} e^{-1}$$

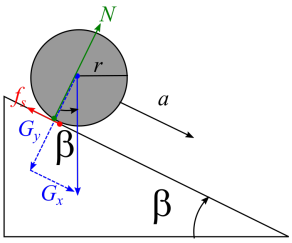
Det gir:

$$\begin{aligned}
\beta &= \arctan\left|\frac{dy}{dx}(-L)\right| \\
&= \arctan\left| -2\frac{y_0}{L} e^{-1}\right| \\
&= \arctan\left(\frac{2 \cdot 1,00\,\mathrm{m}}{2,00\,\mathrm{m}} e^{-1} \right) \\
&= \underline{\underline{20,2^\circ}}
\end{aligned}$$

Oppgave 14

Vi skal bestemme den minste verdien for hvilefriksjonskoeffisienten μ_s som gjør at kula ruller uten å gli mot underlaget når den slippes med null startfart fra det ene ytterpunktet $x = -L$. Dvs. vi skal anvende rullebetingelsen til å bestemme minste verdi for μ_s i startpunktet $x = -L$.

I dette tilfellet virker det en friksjonskraft f_s mellom kula og underlaget, som vist på figuren under (u:



I dette tilfellet gir Newtons 2. lov for bevegelsen til massesenteret langs skråplanet at

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma \\ mg\sin\beta - f_s &= ma \end{aligned}$$

Newtons 2. lov for rotasjon gir sammenhengen (her er I treghetsmomentet til kula om massesenteret):

$$\begin{aligned} \sum \tau &= I\alpha \\ f_s \cdot r &= I\alpha \end{aligned}$$

Ettersom kula ruller uten å gli, er sammenhengen mellom massesenterets akselerasjon a og vinkelakselerasjonen α gitt ved

$$a = \alpha r \Rightarrow \alpha = \frac{a}{r}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} f_s \cdot r &= I \cdot \frac{a}{r} \\ f_s \cdot r &= \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{a}{r} && \text{(Treghetsm. for sylinder)} \\ f_s &= \frac{2}{5}ma \end{aligned}$$

Innsatt i den andre likninga:

$$\begin{aligned} mg\sin\beta - f_s &= ma \\ mg\sin\beta - \frac{2}{5}ma &= ma \\ \frac{7}{5}ma &= mg\sin\beta \\ a &= \underline{\frac{5}{7}g\sin\beta} \end{aligned}$$

I tillegg har vi sammenhengen

$$f_s = \mu_s N = \mu_s mg\cos\beta,$$

slik at Newtons 2. lov gir oss følgende **minste** verdi for μ_s som gjør at kula begynner å rulle uten å gli i $x = -L$:

$$\begin{aligned}
mg\sin\beta - \mu_s mg\cos\beta &= ma = m\cdot\frac{5}{7}g\sin\beta \\
\sin\beta - \mu_s\cos\beta &= \frac{5}{7}\sin\beta \\
\mu_s &= \frac{2}{7}\tan\beta \\
&= \frac{2}{7}\cdot|y'(-L)| && \text{(Abs. verdi fordi } \beta \text{ her er positiv)} \\
&= \frac{2}{7}\cdot|\frac{2y_0}{L^2}(-L)\,e^{-1}| && \text{(Bruker uttrykk for } y'(x) \text{fra tidligere)} \\
&= \frac{2}{7}\cdot\frac{2\cdot 1{,}00\,\mathrm{m}}{2{,}00\,\mathrm{m}}\cdot e^{-1} \\
&= 0{,}105 \\
&\approx \underline{\underline{0{,}11}}
\end{aligned}$$

Oppgave 15

Treghetsmomentet til et rullende legeme med masse M og radius R er på formen $I = c\cdot MR^2$, der koeffisienten c er et mål på "rulleegenskapen"[1] til legemet. Jo mindre c-verdi, jo mindre kinetisk energi er "bundet opp" i rotasjonsbevegelse, og desto raskere flytter massesenteret seg nedover skråplanet.

De oppgitte legemene har følgende c-verdier:

Legeme	c-verdi
A	$\frac{2}{5}$
B	$\frac{2}{3}$
C	$\frac{1}{2}$
D	1

Når de slippes samtidig fra en gitt høyde over bunnen av skråplanet, blir rekkefølgen over "målinjen" derfor (stigende verdi av c): A, C, B, D.

Oppgave 16

La v være banefarten til leirklumpen etter at den har festet seg til kanten av skiva, på et tidspunkt der skiva har fått en vinkelfart ω etter sammenstøtet. Bevaring av dreieimpuls om

[1] Koeffisienten c er forholdet mellom kinetisk energi knyttet til legemets rotasjon om massesenteret, og kinetisk energi knyttet til translasjon av massesenteret; $c = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}Mv^2}$.

skivas sentrum gir:

$$\begin{aligned}
mv_0R &= \left(I + mR^2\right)\omega && \text{(Her er } I = \tfrac{1}{2}MR^2\text{)} \\
mv_0R &= \left(I + mR^2\right)\frac{v}{R} && \text{(Sammenh. mellom bane- og vinkelfart: } v = \omega R\text{)} \\
v &= \frac{mR^2}{I + mR^2} \cdot v_0 \\
&= \frac{1}{\frac{I}{mR^2} + 1} \cdot v_0 \\
&= \frac{1}{\frac{\frac{1}{2}MR^2}{mR^2} + 1} \cdot v_0 \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{0{,}50\,\text{kg}}{0{,}020\,\text{kg}} + 1} \cdot 10\,\text{m/s} \\
&= \underline{\underline{0,74\,\text{m/s}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 17

Svingetiden til en fysisk pendel med masse M er for små utslag gitt ved

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}},$$

der I er treghetsmomentet om opphengingspunktet og h er avstanden mellom massesenteret og rotasjonsaksen. For en uniform, massiv stang med masse M og lengde L som svinger om den ene enden er

$$I = \frac{1}{3}ML^2,\ h = \frac{L}{2},$$

$$\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg \cdot \frac{L}{2}}} \\
&= \underline{2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{L}{g}}}
\end{aligned}$$

Altså: svingetiden er **uavhengig** av massen M.

Oppgave 18

En kloss med masse m er festet til en fjær med fjærkonstant k svinger friksjonsfritt på et horisontalt underlag med vinkelfrekvens $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ og frekvens $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ (fra formelarket; standard harmonisk oscillator). En ekstra, identisk fjær festes til klossen, som igjen settes i svingninger, som vi skal finne frekvensen for.

Med to identiske fjærer som begge bidrar med en fjærkraft $-kx$ blir Newtons 2. lov for klossen

$$-2kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2k}{m}x = \underline{-\omega^2 x}$$

Dette er en harmonisk oscillator med vinkelfrekvens

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dette betyr at vinkelfrekvensen med to fjærer er

$$\omega = \sqrt{2}\omega_0,$$

tilsvarende en frekvens lik

$$f' = \underline{\underline{\sqrt{2}f}}$$

Oppgave 19

Amplituden til en (svakt) dempet svingning som funksjon av tiden er gitt ved

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t},$$

der A_0 er amplituden ved $t = 0$, b er dempingskontanten og m er massen til det svingende legemet. For å påvise at det er svak demping, er kriteriet at

$$\frac{b}{2m} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

der k er fjærkonstanten. Her er

$$\frac{b}{2m} = \frac{0,10\,\mathrm{kg/s}}{2 \cdot 0,50\,\mathrm{kg}} = 0,10\,\mathrm{s^{-1}} < \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{50\,\mathrm{N/m}}{0,50\,\mathrm{kg}}} = 10\,\mathrm{s^{-1}}.$$

Amplituden for bevegelsen etter en viss tid blir da

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \\ &= 0,40\,\mathrm{m} \cdot e^{-0,10\,\mathrm{s^{-1}} \cdot 5,0\,\mathrm{s}} \\ &= \underline{\underline{0,24\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Oppgave 20

Vi skal bestemme amplituden for en kloss som ligger på et horisontalt, friksjonsfritt underlag og påvirkes av en periodisk ytre kraft $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Amplituden for slike tvungne svingninger er fra formelarket gitt ved

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \\ &= \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)} && \text{(Her er } \gamma = 0 \text{ da det ikke er demping)} \\ &= \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)} && \text{(Her er } \omega_0^2 = \tfrac{k}{m}\text{)} \\ &= \frac{50\,\mathrm{N}}{0,20\,\mathrm{kg}\left(\left(30\,\mathrm{s^{-1}}\right)^2 - \frac{90\,\mathrm{N/m}}{0,20\,\mathrm{kg}}\right)} \\ &= \underline{\underline{0,56\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

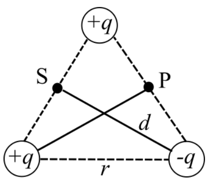
Oppgave 21

Forholdet mellom den elektriske kraften F_e og gravitasjonskraften F_G mellom to protoner med masse m og ladning e i avstand r er gitt ved

$$\begin{aligned}
\frac{F_e}{F_G} &= \frac{\frac{ke^2}{r^2}}{\frac{Gm^2}{r^2}} \\
&= \frac{k}{G}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \\
&\approx \frac{10^{10}}{10^{-10}}\left(\frac{10^{-19}}{10^{-27}}\right)^2 && \text{(Bruker størrelsesorden uten enheter)} \\
&= 10^{20}\cdot\left(10^8\right)^2 \\
&= \underline{\underline{10^{36}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 22

Gitt ladningskonfigurasjonen:



Avstanden d mellom punktene S og P og motstående hjørne er ved Pytagoras' gitt ved

$$d^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}r^2 \Rightarrow d = \underline{\frac{\sqrt{5}}{2}r}.$$

Potensialene i de to angitte punktene er

$$V_S = \frac{kq}{\frac{r}{2}} + \frac{kq}{\frac{r}{2}} - \frac{kq}{d} = \frac{4kq}{r} - \frac{kq}{d}$$

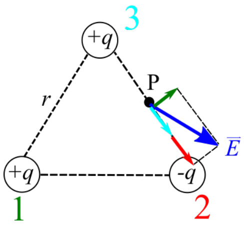
$$V_P = \frac{kq}{\frac{r}{2}} - \frac{kq}{\frac{r}{2}} + \frac{kq}{d} = \frac{kq}{d}$$

Potensialforskjellen/spenningen mellom P og S er da

$$\begin{aligned}
V_P - V_S &= \frac{kq}{d} - \left(\frac{4kq}{r} - \frac{kq}{d}\right) \\
&= 2\frac{kq}{d} - \frac{4kq}{r} \\
&= \frac{2kq}{\frac{\sqrt{5}}{2}r} - \frac{4kq}{r} \\
&= \frac{4kq}{\sqrt{5}r} - \frac{4kq}{r} \\
&= \underline{\underline{\frac{4kq}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right)}}
\end{aligned}$$

Oppgave 23

Tegner inn feltbidragene fra de tre punktladningene i punktet P:



Det totale elektriske feltet $\vec{E}$ er vektorsummen av de tre bidragene, som får retning som figuren antyder.

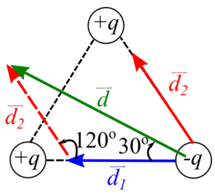
Oppgave 24

Den elektriske potensielle energien for ladningskonfigurasjonen er gitt ved (det er tre par ladninger som bidrar; ett med positivt bidrag og to par med negative bidrag):

$$\begin{aligned} U &= \frac{kq^2}{r} - \frac{kq^2}{r} - \frac{kq^2}{r} \\ &= \underline{\underline{-\frac{kq^2}{r}}} \end{aligned}$$

Oppgave 25

Figuren under viser konstruksjonen av det totale dipolmomentet for konfigurasjonen, der to par med dipoler bidrar.



Absoluttverdien av dipolmomentet for hver dipol er gitt ved

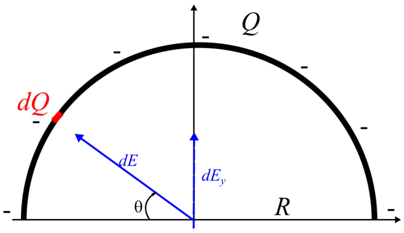
$$d_1 = d_2 = qr.$$

Ettersom totalt dipolmoment $\vec{d} = \vec{d_1} + \vec{d_2}$, gir cosinussetningen verdien av $\vec{d}$:

$$\begin{aligned} d^2 &= d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos 120° \\ d &= \sqrt{(qr)^2 + (qr)^2 - 2\,(qr)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \sqrt{3\,(qr)^2} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{3}qr}} \end{aligned}$$

Oppgave 26

På grunn av symmetri vil det elektriske feltet i origo kun ha en y-komponent (bidragene i x-retning fra venstre side av halvsirkelen nuller ut bidragene fra høyre side). Figuren under viser situasjonen:



Et ladningselement dQ har et feltbidrag dE, som har y-komponent lik dE_y. Ut i fra Coulombs lov er feltbidraget i origo lik

$$dE = \frac{kdQ}{R^2}.$$

Bidraget i y-retning, som er det eneste som "overlever" når man summerer/integrerer over halvsirkelen, er

$$\begin{aligned} dE_y &= dE \sin\theta \\ &= \underline{\frac{kdQ}{R^2}\sin\theta.} \end{aligned}$$

Ettersom ladningen er jevnt fordelt over en halvsirkel, der strekningselementet er $ds = Rd\theta$, er

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{Q}{\frac{1}{2}\cdot 2\pi R}\cdot ds \\ &= \frac{Q}{\pi R}\cdot Rd\theta \\ &= \underline{\frac{Q}{\pi}d\theta} \end{aligned}$$

Altså er

$$dE_y = \frac{kQ}{\pi R^2}\sin\theta d\theta$$

Det totale feltbidraget E_y finnes ved å integrere over halvsirkelen:

$$\begin{aligned} E_y &= \int_{halvsirkel} dE_y \\ &= \int_0^\pi \frac{kQ}{\pi R^2}\sin\theta d\theta \\ &= \frac{kQ}{\pi R^2}\int_0^\pi \sin\theta d\theta \\ &= \frac{kQ}{\pi R^2}\left[-\cos\theta\right]_0^\pi \\ &= -\frac{kQ}{\pi R^2}(-1-1) \\ &= \underline{\underline{\frac{2kQ}{\pi R^2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 27

Starter med å finne ekvivalent kapasitans C_1 og C_2 i hver av de to greinene med n kondensatorer i serie, hver med kapasitans C:

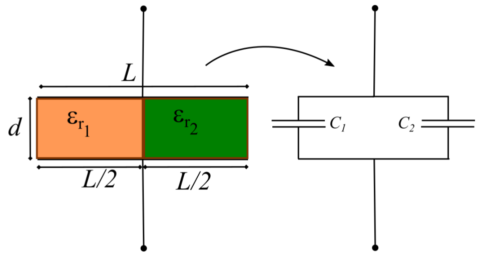
$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_2} = \underbrace{\frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \ldots + \frac{1}{C}}_{n \text{ stk}}$$
$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_2} = n \cdot \frac{1}{C} \Rightarrow C_1 = C_2 = \underline{\frac{C}{n}}$$

De to greinene utgjør en parallellkobling med kapasitanser C_1 og C_2, som har ekvivalent kapasitans C_{tot} lik

$$\begin{aligned} C_{tot} &= C_1 + C_2 \\ &= \underline{\underline{2\frac{C}{n}}} \end{aligned}$$

Oppgave 28

Dette kan ansees som en parallellkobling av to kondensatorer: én fylt med isolatoren med relativ permittivitet ε_{r_1} og den andre med ε_{r_2}, der hver kondensator har plateareal $A/2$ og med plategap d, med $A = L^2$. Dette er illustrert på figuren under:



Kapasitansene C_1 og C_2 for hver halvdel er gitt ved

$$\begin{aligned} C_1 &= \varepsilon_{r_1} \cdot \varepsilon_0 \frac{\frac{A}{2}}{d} \\ &= \underline{\frac{1}{2}\varepsilon_{r_1}\varepsilon_0\frac{L^2}{d}} \end{aligned}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{r_2}\varepsilon_0\frac{L^2}{d}$$

Den totale kapasitansen C_{tot} for den opprinnelige kondensatoren blir gitt ved (parallellkobling av to platekondensatorer)

$$\begin{aligned}
C_{tot} &= C_1 + C_2 \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{L^2}{d}\left(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m} \cdot \frac{(0,020\,\mathrm{m})^2}{0,75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} (2,56 + 6,70) \\
&= 2,18 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F} \\
&= \underline{\underline{21,8\,\mathrm{pF}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 29

Ladningen $Q(t)$ på en kondensator som lades opp er gitt ved

$$Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

der tidskonstanten $\tau = RC$ er bestemt av total resistans R og ekvivalent kapasitans C i kretsen. Ettersom det er to kondensatorer i serie i kretsen, er

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{3,0\,\mu\mathrm{F}} + \frac{1}{6,0\,\mu\mathrm{F}} = \frac{1}{2,0\,\mu\mathrm{F}} \Rightarrow C = 2,0\,\mu\mathrm{F}.$$

Vi skal bestemme tiden det tar før kondensatoren er ladet opp til 50 % av sin maksimale ladning, som er Q_0. Vi får likningen

$$\begin{aligned}
Q(t) &= 0,50Q_0 \\
Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) &= 0,50Q_0 \\
1 - e^{-\frac{t}{\tau}} &= 0,50 \\
-\frac{t}{\tau} &= \ln 0,50 \\
t &= -\tau \ln 0,50 \\
&= -RC \ln 0,50 \\
&= -50 \cdot 10^3\,\Omega \cdot 2,0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} \cdot \ln 0,50 \\
&= 0,069\,\mathrm{s} \\
&= \underline{\underline{69\,\mathrm{ms}}}
\end{aligned}$$

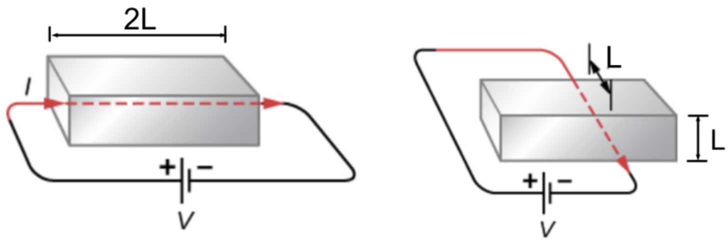
Oppgave 30

Gitt 3 identiske motstander med resistans R, og 3 kondensatorer med kapasitans C. Den hhv. største og minste resistansen fås når motstandene kobles i hhv. serie og parallell, og blir her $R_{max} = 3R$ og $R_{min} = \frac{1}{3}R$. Tilsvarende for kondensatorene får man hhv. største og minste kapasitans når de parallell- og seriekobles: $C_{max} = 3C$ og $C_{min} = \frac{1}{3}R$. Ettersom tidskonstanten $\tau = RC$, blir største og minste tidskonstant for en slik RC-krets lik

$$\begin{aligned}
\tau_{max} &= R_{max}C_{max} = \underline{\underline{9RC}} \\
\tau_{min} &= R_{min}C_{min} = \underline{\underline{\frac{1}{9}RC}}
\end{aligned}$$

Oppgave 31

Gitt de to lederne på figuren under:



Ut i fra teorien for resistans vet vi at resistansen til en leder er proporsjonal med lengden av lederen (lang leder gir stor resistans) og omvendt proporsjonal med tverrsnittet til lederen (stort tverrsnitt gir liten resistans):

$$R = \rho \frac{L}{A}.$$

Det er klart ut i fra figuren at lederen til **venstre** har størst lengde (lik $2L$) og minst tverrsnitt (lik L^2)- og vil derfor ha høyest resistans.

Oppgave 32

Et elektron akselereres gjennom en spenning V. Energibevaring gir (elektrisk potensiell energi går over til kinetisk energi) sluttfarten v til elektronet:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 &= eV \\
v &= \sqrt{\frac{2eV}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0{,}20 \cdot 10^{3}\,\mathrm{V}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} \\
&= \underline{\underline{8{,}4 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m/s}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 33

Denne problemstillingen er identisk med et "horisontalt kast": elektronets fart i horisontalretningen er konstant (fordi det elektriske feltet er vertikalt og ingen horisontale krefter virker), mens det får en konstant akselerasjon a_y nedover på grunn av det homogene elektriske feltet. Det gir oss følgende bevegelseslikninger:

$$\begin{aligned}
x &= v_0 t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0} \\
y &= \frac{1}{2} a_y t^2 \\
&= \underline{\frac{1}{2} a_y \left(\frac{x}{v_0}\right)^2}
\end{aligned}$$

Aks. i y-retning er gitt fra Newtons 2. lov:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= ma_y \\ eE &= ma_y \qquad \text{(El. kraft } F_e = qE\text{)} \\ a_y &= \underline{\frac{eE}{m}} \end{aligned}$$

Idet elektronet treffer skjermen er $x = l$, og y tilsvarer den vertikale avbøyningen d:

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\left(\frac{l}{v_0}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1,60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 20\cdot 10^3\,\mathrm{V/m}}{9,11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}\cdot\left(\frac{0,10\,\mathrm{m}}{3,0\cdot 10^7\,\mathrm{m/s}}\right)^2 \\ &= 0,020\,\mathrm{m} \\ &= \underline{\underline{2,0\,\mathrm{cm}}} \end{aligned}$$

Oppgave 34

Her er det gitt en ren LC-krets, uten resistans. I en slik krets er den elektriske energien bevart, uten tap pga. varme i motstander. Kirchoffs 2. lov for en slik krets er

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} &= 0 \\ \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2Q}{dt^2} &= -\frac{1}{LC}Q \end{aligned}$$

Dette er en harmonisk oscillator-likning, som tilsier at ladningen Q på kondensatoren vil variere harmonisk med tiden (svingeløsning; cosinus eller sinus). Da vil også strømmen $I(t) = \frac{dQ}{dt}$ variere harmonisk.

Oppgave 35

Vi har her gitt en RL-krets der strømutviklingen er gitt fra formelarket:

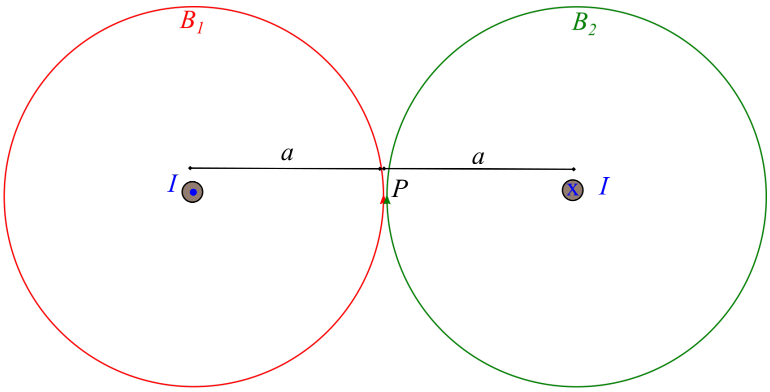
$$I(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

der tidskonstanten $\tau = L/R$ og I_0 er maksimalverdien $I_0 = V/R$ (etter lang tid ligger all spenning over motstanden, og ingenting over spolen). Vi skal bestemme tiden det tar før strømmen i kretsen har nådd en gitt verdi I_1. Vi skal da løse likninga

$$\begin{aligned}
I(t) &= I_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = I_1 \\
1-e^{-\frac{t}{\tau}} &= \frac{I_1}{I_0} \\
e^{-\frac{t}{\tau}} &= 1-\frac{I_1}{I_0} \\
t &= -\tau \ln\left(1-\frac{I_1}{I_0}\right) \\
&= -\frac{L}{R}\ln\left(1-\frac{I_1}{I_0}\right) \\
&= -\frac{L}{R}\ln\left(1-\frac{I_1}{V/R}\right) \\
&= -\frac{0,25\,\mathrm{H}}{3,0\,\Omega}\ln\left(1-\frac{6,0\,\mathrm{A}}{24\,\mathrm{V}/3,0\,\Omega}\right) \\
&= \underline{\underline{0,12\,\mathrm{s}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 36

Finner magnetfeltet i punkt P, som ligger midt mellom lederne. Magnetfeltet fra hver leder er konsentriske sirkler med retning bestemt ut i fra høyrehåndsregelen slik figuren under viser (her har strømmen retning normalt på papirplanet):



Magnetfeltbidraget er hhv. B_1og B_2fra de to lederne. Ettersom P ligger midt mellom lederne som fører samme strøm I, er absoluttverdien av bidragene like store og er gitt ved

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

slik at det totale feltet blir

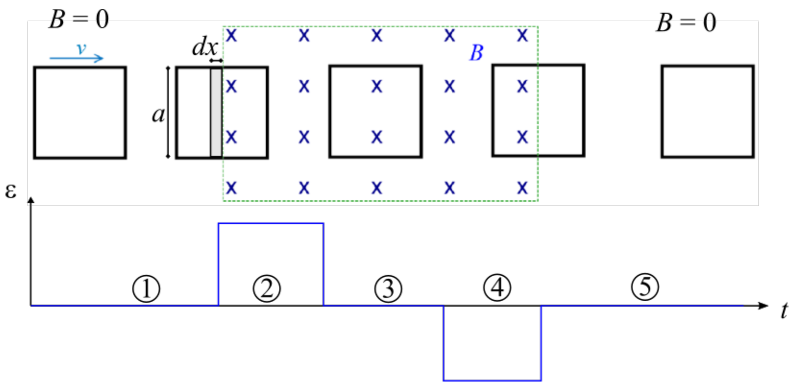
$$\begin{aligned}
B &= B_1 + B_2 \\
&= \underline{\frac{\mu_0 I}{\pi a}}
\end{aligned}$$

Som figuren viser, har magnetfeltet i P retning i positiv z-retning (rett oppover), slik at

$$\underline{\underline{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi a}\cdot\hat{z}}}$$

Oppgave 37

Figuren under viser sløyfas bevegelse inn i, gjennom og forbi magnetfeltet, med en tilhørende graf for indusert spenning $\varepsilon\,(t)$:



Område 1: magnetfeltet er null; indusert ems er null.

Område 2: Her er deler av sløyfa inn i magnetfeltet, dvs. sløyfas "areal" A endrer seg (her: øker). Fra induksjonsloven er

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}(BA) \\ &= -B \cdot \frac{dA}{dt} && \text{(Kun arealet endrer seg; } B \text{ er konstant)} \\ &= -B \cdot \frac{adx}{dt} && \text{(Se figur - arealet av ”stripa” er } dA = adx\text{)} \\ &= \underline{-Bav} \end{aligned}$$

Her får indusert ems altså en viss **konstant** verdi (hvorvidt den er positiv eller negativ spiller ingen rolle, så lenge den får motsatt fortegn når sløyfa går ut igjen).

Område 3: Hele sløyfa er inne i magnetfeltet; her er fluksen gjennom sløyfa konstant og indusert ems er null:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

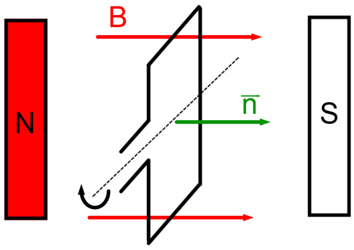
Område 4: Sløyfa er på vei ut av magnetfeltet, og vi får samme situasjon som i område 2, kun med motsatt fortegn.

Også her får indusert ems en viss **konstant** verdi, med **motsatt fortegn** av område 2 da fluksen nå avtar (Lenz' regel).

Område 5: Hele sløyfa er ute av magnetfeltet; indusert ems er null.

Oppgave 38

Figuren under viser sløyfa i magnetfeltet, med sløyfas normalvektor $\vec{n}$ inntegnet.



Vi skal bestemme fluksen gjennom strømsløyfa som funksjon av tiden. Fra formelarket er fluksen Φ gitt ved

$$\Phi = BA\cos\phi,$$

der A er arealet av sløyfa, og ϕ er vinkelen mellom sløyfas normalvektor og magnetfeltet $\vec{B}$. Denne vinkelen er $\phi = 0$ ved $t = 0$ (normalvektor er parallell med magnetfeltet), og vil så øke etterhvert som sløyfa roteres med konstant vinkelhastiget. Fra formelen for rotert vinkel har vi

$$\phi = \phi_0 + \omega t,$$

der vinkelfarten tilsvarer $2,0$ rotasjoner per sekund, dvs. en vinkelfart lik

$$\omega = 2,0 \cdot 2\pi\,\mathrm{s}^{-1} = 4,0\pi\,\mathrm{s}^{-1},$$

og ettersom startvinkelen er $\phi_0 = 0$, er

$$\phi = \omega t = 4,0\pi\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t$$

Fluksen blir:

$$\begin{aligned}
\Phi &= BA\cos\phi \\
&= BA\cos\left(4,0\pi\,\mathrm{s}^{-1}t\right) \\
&= 0,10\,\mathrm{T} \cdot 0,50\,\mathrm{m} \cdot 0,50\,\mathrm{m} \cdot \cos\left(4,0\pi\,\mathrm{s}^{-1}t\right) \\
&= \underline{0,025\,\mathrm{Tm}^2 \cdot \cos\left(4,0\pi\,\mathrm{s}^{-1}t\right)}
\end{aligned}$$

Den induserte emsen ε i sløyfa er gitt fra Faradays induksjonslov:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} \\
&= -\frac{d}{dt}\left(0,025\,\mathrm{Tm}^2 \cdot \cos\left(4,0\pi\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t\right)\right) \\
&= -0,025\,\mathrm{Tm}^2\left(-\sin\left(4,0\pi\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t\right)\right) \cdot 4,0\pi\,\mathrm{s}^{-1} \\
&= \underline{\underline{0,31\,\mathrm{V}\sin\left(4,0\pi\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t\right)}}
\end{aligned}$$

Oppgave 39

Fra Kirchoffs 2. lov:

$$\begin{aligned}
V_0\sin\omega t - \frac{Q}{C} &= 0 \\
Q &= V_0 C\sin\omega t
\end{aligned}$$

Da er strømmen i kretsen gitt ved

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} \\ &= \underline{V_0 C \omega \cos \omega t} \end{aligned}$$

Strømamplituden er altså gitt ved

$$\begin{aligned} I_0 &= V_0 C \omega \\ &= 440\,\mathrm{V} \cdot 0,20 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{F} \cdot 2\pi \cdot 50\,\mathrm{Hz} \\ &= 27,6\,\mathrm{A} \\ &\approx \underline{\underline{28\,\mathrm{A}}} \end{aligned}$$

Oppgave 40

Denne kretsen kan ansees som en udempet RLC-krets drevet av en ytre vekselspenning $V_0 \sin \omega t$, der altså $R = 0$ slik at dempingsleddet $\gamma = \frac{R}{L} = 0$. Strømmen i en slik krets er gitt ved

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0(\omega) \cdot \cos(\omega t + \phi) \\ &= Q_0(\omega)\, \omega \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Strømamplituden er altså

$$\begin{aligned} I_0(\omega) &= Q_0(\omega)\, \omega \\ &= \frac{\frac{V_0}{L}\omega}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}} && \text{(Setter inn } \gamma = 0\text{)} \\ &= \frac{\frac{V_0}{L}\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ &= \frac{\frac{V_0}{L}\omega}{\omega^2 - \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{\frac{12\,\mathrm{V}}{50 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}} \cdot 2\pi \cdot 50\,\mathrm{Hz}}{(2\pi \cdot 50\,\mathrm{Hz})^2 - \frac{1}{50 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H} \cdot 25 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{F}}} \\ &= \underline{\underline{0,77\,\mathrm{A}}} \end{aligned}$$