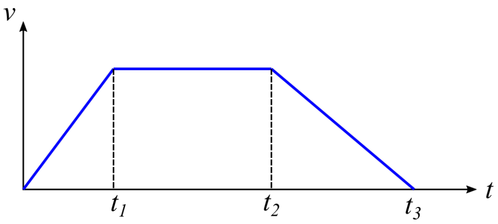
Oppgave 1

Akselerasjonen på et tidspunkt tilsvarer stigningstallet til fartsgrafen for tidspunktet; $a = dv/dt$.



$t \in [0, t_1)$: Jevnt økende fart (konstant positiv akselerasjon $a > 0$)

$t \in [t_1, t_2)$: Konstant fart (null akselerasjon, $a = 0$)

$t \in [t_2, t_3]$: Jevnt avtakende fart (konstant negativ akselerasjon $a < 0$).

Riktig graf: D.

Oppgave 2

Posisjonen $y_1(t)$ til den første steinen som kastes med null startfart ved $t = 0$ er gitt ved

$$y_1 = \frac{1}{2}gt^2.$$

Tiden denne bruker på å falle fra en bygning som er 100 m høy er

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2y_1}{g}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 100\,\mathrm{m}}{9,81\,\mathrm{m/s^2}}} \\ &= \underline{4,52\,\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Den andre steinen som kastes en tid $\Delta t = 1,0\,\mathrm{s}$ senere med startfart v_0, må tilbakelegge minst 100 m i løpet av de gjenværende $t_2 = 3,52\,\mathrm{s}$. Den andre steinen har en posisjon gitt ved

$$y_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2.$$

Vi skal bestemme v_0 slik at den andre steinen tar igjen den første i løpet av $y_1 = 100\,\mathrm{m}$:

$$\begin{aligned} v_0 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 &= y_1 \\ v_0 &= \frac{y_1 - \frac{1}{2}gt_2^2}{t_2} \\ &= \frac{100\,\mathrm{m} - \frac{1}{2} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 3,52\,\mathrm{s}}{3,52\,\mathrm{s}} \\ &= 11,1\,\mathrm{m/s} \\ &\approx \underline{\underline{11\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

Bevegelseslikningene for kastebevegelse:

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha,\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

Når et legeme skytes ut fra bakkenivå, er falltiden til $y = 0$ bestemt av

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 &= 0 \\ t\left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt\right) &= 0, \end{aligned}$$

som har den relevante løsningen

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Den horisontale rekkevidden x er da lik

$$x = v_0 \cos\alpha t = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha,$$

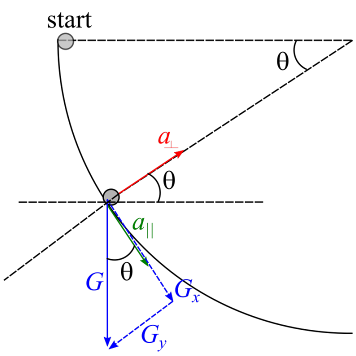
der man har brukt identiteten $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$.

Dette siste uttrykket viser at rekkevidden er omvendt proporsjonal med tyngdeakselerasjonen g, når v_0 og startvinkel α holdes konstant.

Horisontal rekkevidde på Månen, som har tyngdeaks. lik $\frac{g}{6}$, for et kast som er 10 m på Jorda blir derfor 6 ganger lengre på Månen:

$$x = 6 \cdot 10\,\text{m} = \underline{\underline{60\,\text{m}}}$$

Oppgave 4



Som figuren over viser er den tangentielle akselerasjonen[1] bestemt fra Newtons 2. lov i tangentiell retning (kalt x-retning på figuren):

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_{||} \\ mg\cos\theta &= ma_{||} \\ a_{||} &= \underline{g\cos\theta} \end{aligned}$$

[1] Legemet har også en sentripetal-/radiellakselerasjon $a_\perp$ med retning inn mot sentrum.

For denne bevegelsen er $0° \leq \theta \leq 90°$, slik at den største verdien for den tangentielle akselerasjonen nås i startpunktet (da er man "nærmest" fritt fall og har $a_{\parallel} = g$):

$$\theta = \underline{\underline{0°}}$$

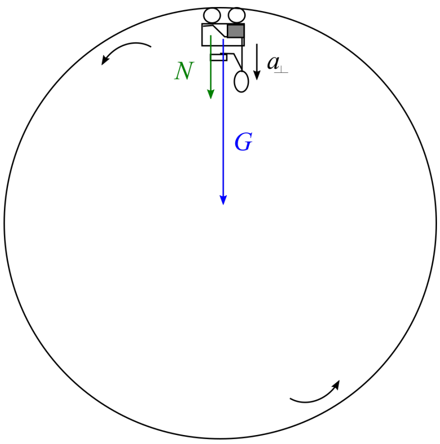
Oppgave 5

Hver kraftmåler angir krafta på måleren fra den andre. Ved Newtons 3. lov er kraften på den ene like stor og motsatt rettet som krafta på den andre, slik at kraftmålerne viser samme verdi.

Så hvis den ene viser 10 N, viser den andre også 10 N.

Oppgave 6

Skal finne forholdet mellom normalkraft N og personens tyngde i det høyeste punktet i en loop dersom sensorer måler sentripetalakselerasjonen i punktet til $a_{\perp} = 1,5\,\mathrm{g}$. Figuren under viser kreftene på personen i det høyeste punktet:

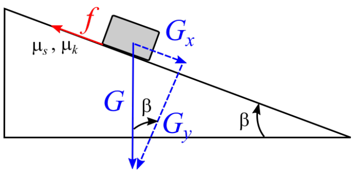


Newtons 2. lov i radiell retning gir

$$\begin{aligned}
\sum F &= ma_{\perp} \\
N + mg &= ma_{\perp} \\
N &= ma_{\perp} - mg \\
\frac{N}{mg} &= \frac{a_{\perp}}{g} - 1 \\
&= \frac{1,5g}{g} - 1 \\
&= \underline{\underline{0,5}}
\end{aligned}$$

Oppgave 7

Figuren viser kreftene som virker på klossen mens skråplanvinkelen β justeres: tyngdekrafta G, samt hvilefriksjonen f.



Den maksimale hvilefriksjonen man har "til disposisjon" til klossen begynner å gli, er

$$f = \mu_s N.$$

Ved Newtons 1. lov i y-retning er

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ N = G_y &= mg\cos\beta, \end{aligned}$$

som gir at

$$f = \mu_s N = \mu_s mg\cos\beta.$$

Når man er på grensa til at klossen glir er

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ f = G_x &= mg\sin\beta \\ \mu_s mg\cos\alpha &= mg\sin\beta \\ \tan\beta = \mu_s &\Rightarrow \beta = \underline{\underline{\arctan\mu_s}} \end{aligned}$$

Oppgave 8

Idet terminalfarten til en kule oppnås, er

$$\begin{aligned} F_D &= mg \\ kv^2 &= mg \Rightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \end{aligned}$$

Terminalfarten er altså proporsjonal med $\sqrt{m}$. Dersom en kule med masse m har terminalfart v, blir dermed terminalfarten til en kule med samme proporsjonalitetskonstant k og masse lik $4m$ lik

$$\sqrt{4}\cdot v = \underline{\underline{2v}}$$

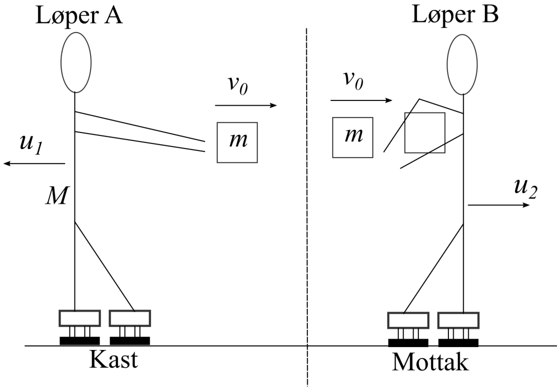
Oppgave 9

Ballen er i kontakt med veggen i et kort tidsrom $\Delta t = 10\,\mathrm{ms}$, og farten endres fra $v_0 = -15\,\mathrm{m/s}$ til $v = 15\,\mathrm{m/s}$ (med pos. retning langs sluttfarten). Den gjennomsnittlige krafta fra veggen på ballen er F, og impulsloven gir da

$$\begin{aligned} F\Delta t &= \Delta p = mv - mv_0 \\ F &= \frac{mv - mv_0}{\Delta t} \\ &= \frac{m\left(v - v_0\right)}{\Delta t} \\ &= \frac{20\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\left(15\,\mathrm{m/s} - (-15\,\mathrm{m/s})\right)}{10\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}} \\ &= \underline{\underline{60\,\mathrm{N}}} \end{aligned}$$

Oppgave 10

Figuren under viser de to separate prosessene: den ene løperen kaster kassa fra seg, og den andre tar i mot.



Farten u_1 til løper A (som er i ro til å begynne med) etter at pakka er kastet til løper B:

$$\sum_{f\phi r} p = \sum_{etter} p$$
$$0 = Mu_1 + mv_0$$
$$u_1 = \underline{-\frac{m}{M}v_0}$$

Farten til løper B etter å ha mottatt pakka som har startfart v_0 (dette blir et fullstendig uelastisk støt da personen holder fast i pakken):

$$\sum_{f\phi r} p = \sum_{etter} p$$
$$mv_0 = (M + m)\, u_2$$
$$u_2 = \frac{m}{M + m} v_0$$

Relativfarten mellom de to blir da

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= \frac{m}{M+m}v_0 - \left(-\frac{m}{M}v_0\right) \\ &= \left(\frac{m}{M+m} + \frac{m}{M}\right) v_0 \\ &= \left(\frac{3,0\,\mathrm{kg}}{60\,\mathrm{kg} + 3,0\,\mathrm{kg}} + \frac{3,0\,\mathrm{kg}}{60\,\mathrm{kg}}\right) \cdot 10\,\mathrm{m/s} \\ &= 0,976\,\mathrm{m/s} \\ &\approx \underline{\underline{0,98\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

Oppgave 11

I et kort tidsrom Δt virker det en kraft F i en avstand h over senterlinja til pucken. Se figuren under.

Impulsloven gir:

$$F\Delta t = \Delta p = Mv. \tag{1}$$

Spinnsatsen om en akse gjennom senterlinja gir:

$$\begin{aligned} \tau \Delta t &= \Delta L \\ Fh\Delta t &= I\omega \qquad \text{(Her er } \tau = Fh \text{ og spinnet etter støtet er } I\omega) \end{aligned}$$

Kombinerer (1) og (Her er $\tau = Fh$ og spinnet etter støtet er $I\omega$):

$$\begin{aligned} F\Delta t &= Mv \\ Fh\Delta t &= I\omega \\ h &= \frac{I\omega}{Mv} \qquad \text{(Deler likningene på hverandre)} \end{aligned}$$

Her er $I = \frac{1}{2}MR^2$ (massiv skive) og sammenhengen mellom v og ω dersom pucken skal rulle uten å gli etter støtet er

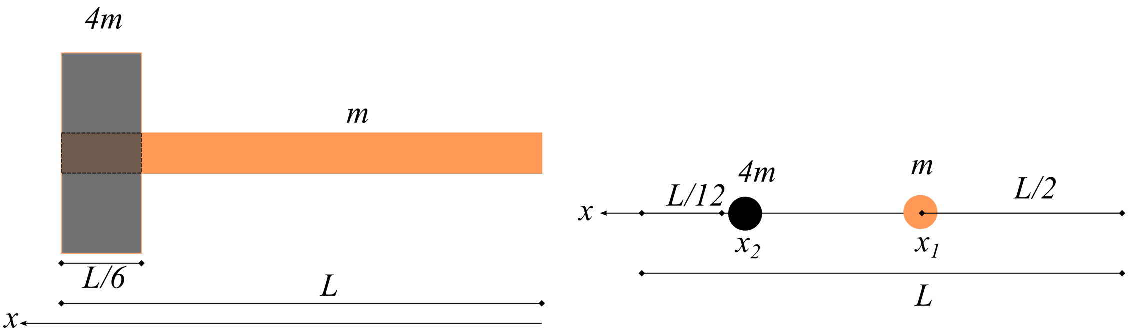
$$v = \omega R \Rightarrow \frac{\omega}{v} = \frac{1}{R},$$

som gir

$$\begin{aligned} h &= \frac{I\omega}{Mv} \\ &= \frac{I}{M} \cdot \frac{\omega}{v} \\ &= \frac{\frac{1}{2}MR^2}{M} \cdot \frac{1}{R} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}R}} \end{aligned}$$

Oppgave 12

Vi kan tenke oss at legemet er sammensatt av to punktlegemer $m_1 = m$ og $m_2 = 4m$ i massesenteret til hhv. skaftet og hodet (tyngdepunktet for et jevntykt legeme ligger midt i legemet). Se figuren under.

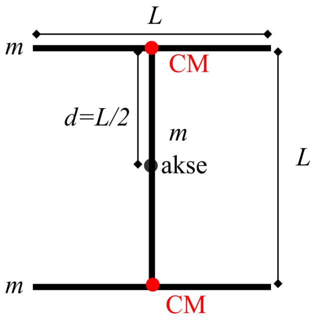


Fra definisjonen av tyngdepunkt:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m \cdot \frac{L}{2} + 4m \cdot \left(L - \frac{1}{12}L\right)}{m + 4m} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{11}{12}}{5} \cdot L \\ &= \underline{\underline{\frac{5}{6}L}} \end{aligned}$$

Oppgave 13

Legemet består av én stang som roterer om en akse gjennom stangas sentrum og har treghetsmoment $I_1 = \frac{1}{12}mL^2$ om angitt akse, og to andre som roterer om en parallell akse i avstand $d = L/2$ fra hver av stengenes massesenter. Hver av disse to har fra Steiners sats et treghetsmoment om angitt akse lik $I_2 = I_3 = \frac{1}{12}mL^2 + md^2$. Se figuren under.



Treghetsmomentet om den angitte aksen blir da

$$\begin{aligned} I &= I_1 + 2I_2 \\ &= \frac{1}{12}mL^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{12}mL^2 + md^2\right) \\ &= \frac{1}{12}mL^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{12} + 2\cdot\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)\right)mL^2 \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{4}mL^2}} \end{aligned}$$

Oppgave 14

Banens høyde over gulvet er

$$y(x) = y_0\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)^2,$$

med endepunkter i $x = \pm 2L$. Legemet slippes i $x = -2L$, tilsvarende en høyde $y_1 = y(-2L) = 9y_0$ med null startfart. Finner farten i bunnpunktet $x = 0$, der høyden er $y_2 = y(0) = y_0$ ved energibevaring (nullpunkt for potensiell energi settes i $y = 0$):

$$\begin{aligned}
mgy_1 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgy_2 \\
mgy_1 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot cmr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 + mgh_2 && \text{(Rullebetingelsen: } v = \omega r \Rightarrow \omega = \tfrac{v}{r}\text{)} \\
2gy_1 &= v^2 + c\cdot v^2 + 2gy_2 && \text{(Ganger med faktor } \tfrac{2}{m}\text{)} \\
v^2(1+c) &= 2g(y_1 - y_2) \\
v &= \sqrt{\frac{2g(y_1-y_2)}{1+c}} \\
&= \sqrt{\frac{2g\cdot(9y_0-y_0)}{1+c}} \\
&= \sqrt{\frac{16gy_0}{1+c}} \\
&= \underline{\underline{4\sqrt{\frac{gy_0}{1+c}}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 15

Helningsvinkelen β er gitt ved

$$\tan\beta = \left|\frac{dy}{dx}\right| \Rightarrow \beta = \arctan\left|\frac{dy}{dx}\right|$$

Fra kjerneregelen får vi følgende derivasjon:

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = 2y_0\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)\cdot\left(-\frac{2x}{L^2}\right) = -\frac{4y_0}{L^2}x\left(1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right).$$

I endepunktet $x = -2L$ er

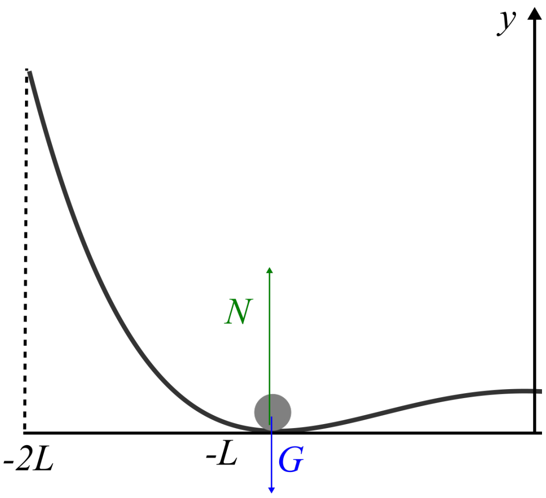
$$\frac{dy}{dx} = y'(-2L) = -\frac{4y_0}{L^2}(-2L)\left(1-(-2)^2\right) = \underline{-24\frac{y_0}{L}}$$

Dettet tilsvarer en helningsvinkel lik

$$\begin{aligned}
\beta &= \arctan\left|\frac{dy}{dx}(-2L)\right| \\
&= \arctan\left|-24\frac{y_0}{L}\right| \\
&= \arctan\left(24\cdot\frac{0,100}{1,20\,\mathrm{m}}\right) \\
&= \underline{\underline{63,4^\circ}}
\end{aligned}$$

Oppgave 16

Vi skal bestemme forholdet N/mg for det rullende legemet i bunnpunktet $x = -L$. Se figuren under.



Newtons 2. lov i bunnpunktet gir

$$N - mg = ma_\perp = m\frac{v^2}{R}$$
$$N = m\frac{v^2}{R} + mg$$
$$\frac{N}{mg} = \frac{v^2}{gR} + 1,$$

der R er krumningsradien i punktet bestemt fra formelen

$$\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Vi har tidligere beregnet y':

$$y' = -\frac{4y_0}{L^2}x\left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) = \underline{-\frac{4y_0}{L^2}\left(x - \frac{x^3}{L^2}\right)}$$

Det gir

$$y'' = -\frac{4y_0}{L^2}\left(1 - \frac{3x^2}{L^2}\right) = \underline{-\frac{4y_0}{L^2}\left(1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)}$$

I bunnpunktet $x = -L$ er

$$y''(-L) = -\frac{4y_0}{L^2}\left(1 - 3(-1)^2\right) = \underline{\frac{8y}{L^2}}$$

Da finner vi krumningsradien R fra (i bunnpunket er $y' = 0$):

$$\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{8y_0}{L^2}}{(1+0)^{\frac{3}{2}}}$$
$$R = \underline{\frac{L^2}{8y_0}}$$

Vi kan støtte oss på tidligere utregninger for å bestemme farten i bunnpunktet $y_2 = 0$ når den slippes fra $x = -2L$ der høyden $y_1 = 9y_0$:

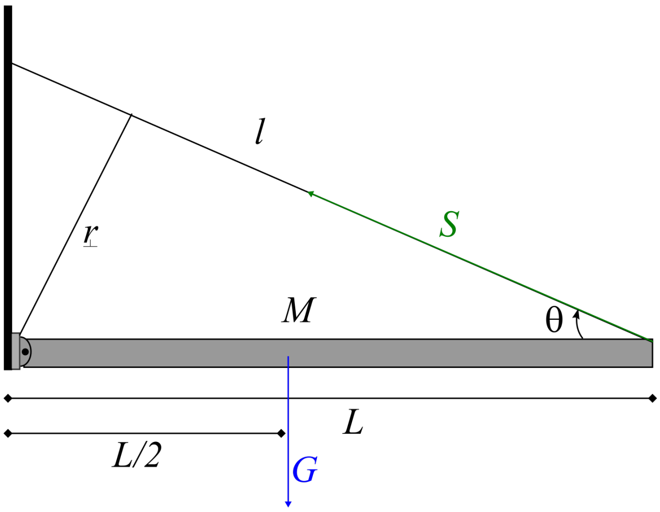
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2g\,(y_1 - y_2)}{1+c}} \\ &= \sqrt{\frac{2g\,(9y_0 - 0)}{1+c}} \\ &= \underline{\sqrt{\frac{18gy_0}{1+c}}} \end{aligned}$$

Forholdet N/mg i bunnpunktet blir da

$$\begin{aligned} \frac{N}{mg} &= \frac{v^2}{gR} + 1 \\ &= \frac{\frac{18gy_0}{1+c}}{g \cdot \frac{L^2}{8y_0}} + 1 \\ &= \underline{\underline{\frac{144}{1+c}\left(\frac{y_0}{L}\right)^2 + 1}} \end{aligned}$$

Oppgave 17

Figuren under viser kreftene på den horisontale bjelken når den henger i ro:



Ved å velge momentakse i veggfestet gir betingelsen om statisk likevekt at

$$\begin{aligned} \sum \tau &= 0 \\ Mg \cdot \frac{L}{2} - S \cdot L\sin\theta &= 0 \qquad \text{(Arma til } S \text{ er } r_\perp = L\sin\theta) \\ S &= \frac{\frac{1}{2}Mg}{\sin\theta}, \end{aligned}$$

der vinkel θ er bestemt fra

$$\cos\theta = \frac{L}{l} = \theta = \arccos\frac{L}{l}$$

Snordraget blir

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\frac{1}{2}Mg}{\sin\theta} \\
&= \frac{\frac{1}{2}Mg}{\sin\arccos\frac{L}{l}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot 80\,\mathrm{kg}\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}}{\sin\arccos\frac{5,0\,\mathrm{m}}{8,0\,\mathrm{m}}} \\
&= \underline{\underline{0,50\,\mathrm{kN}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 18

Vinkelfrekvensen til en torsjonspendel er gitt fra formelarket:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}},$$

der κ er torsjonskonstanten og I er treghetsmomentet til det svingende legemet den vertikale svingeaksen. For en tynn stang festet i midtpunktet er $I = \frac{1}{12}ML^2$. Svingetiden er bestemt fra

$$\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \Rightarrow \frac{I}{\kappa} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \\
\kappa &= I\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \\
&= \frac{1}{12}ML^2\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \\
&= \frac{1}{12}\cdot 1,0\,\mathrm{kg}\cdot(0,50\,\mathrm{m})^2\cdot\left(\frac{2\pi}{2,0\,\mathrm{s}}\right)^2 \\
&= 0,206\,\mathrm{Nm/rad} \\
&\approx \underline{\underline{0,21\,\mathrm{Nm/rad}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 19

Amplituden $A(\omega)$ for en tvungen svingning for en masse m som påvirkes av ytre kraft $F(t) = F_0\sin\omega t$ er gitt ved

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + b^2\omega^2}},$$

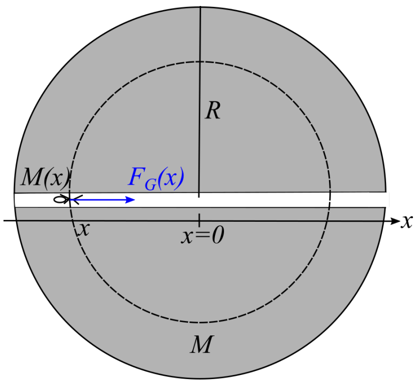
der $\omega_0^2 = k/m$ og dempeleddet er b. Ettersom denne dempingen er oppgitt å være udempet, blir

$b = 0$ og vi får

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}} \\ &= \frac{F_0}{m\left(\omega^2-\omega_0^2\right)} \\ &= \frac{F_0}{m\left(\omega^2-\frac{k}{m}\right)} \qquad \left(\text{Her er } \omega_0^2 = \frac{k}{m}\right) \\ &= \frac{50\,\mathrm{N}}{0,20\,\mathrm{kg}\left(\left(30\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2 - \frac{90\,\mathrm{N/m}}{0,20\,\mathrm{kg}}\right)} \\ &= \underline{\underline{0,56\,\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

Oppgave 20

Figuren under viser kreftene som virker på legemet som beveger seg langs "hullet" gjennom Jorda: når vi ser bort fra alle slags tap, er det kun tyngdekrafta $F_G(x)$ som virker. Og, som oppgavehintet spesifiserer, $F_G(x)$ skapes av den kuleformede massen $M(x)$ som ligger innenfor en radius x.



Fra Newtons gravitasjonslov er (G er den universelle gravitasjonskonstanten):

$$F_G(x) = \frac{GM(x)\,m}{x^2}.$$

Newtons 2. lov gir

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ -\frac{GM(x)\,m}{x^2} &= ma_x. \end{aligned}$$

Minustegnet er med fordi når $x > 0$ ("høyre for sentrum") trekker tyngdekrafta legemet mot negativ x-retning ("mot venstre"). Dersom jorda er kuleformet og har konstant massetetthet $\rho = M/\frac{4}{3}\pi R^3$, er

$$\begin{aligned} M(x) &= \rho \cdot \frac{4}{3}\pi x^3 \\ &= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi x^3 \\ &= \underline{\frac{M}{R^3} \cdot x^3} \end{aligned}$$

Tilbake til Newtons 2. lov, der vi dessuten har sammenhengen $a_x = \ddot{x}$:

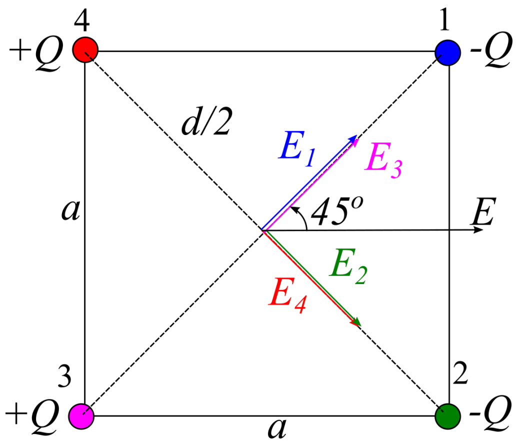
$$\begin{aligned} -\frac{GM(x)\,m}{x^2} &= m\ddot{x} \\ -\frac{G\cdot\frac{M}{R^3}\cdot x^3\cdot m}{x^2} &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} &= \underline{-\frac{GM}{R^3}\cdot x} \end{aligned}$$

Dette er likninga for en harmonisk oscillator $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$ der $\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$, tilsvarende en periode lik

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{(6,37\cdot 10^6\,\mathrm{m})^3}{6,67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}\cdot 5,97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}} \\ &= 5062\,\mathrm{s} \\ &\approx \underline{\underline{5060\,\mathrm{s}}} \end{aligned}$$

Oppgave 21

Bidragene til det elektriske feltet i sentrum av kvadratet fra de ulike ladningene er inntegnet på figuren under:



Som figuren viser, vil alle y-komponenten oppheve hverandre, mens x-komponentene går alle mot høyre og skal adderes. Det totale feltet i sentrum får derfor absoluttverdi (feltbidraget fra én partikkel er gitt fra Coulombs lov):

$$\begin{aligned} E &= 4E_1\cos 45^\circ \\ &= 4\cdot\frac{kQ}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 2\sqrt{2}\cdot\frac{kQ}{\frac{1}{2}a^2} \qquad \left(\text{Pytagoras: } d^2 = 2a^2 \Rightarrow \frac{d}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \underline{\underline{4\sqrt{2}\frac{kQ}{a^2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 22

Det elektriske potensialet i sentrum er summen av bidragene fra hver ladning. Ettersom det er to positive og to negative ladninger i lik avstand fra sentrum, blir det totale potensialet i sentrum lik 0:

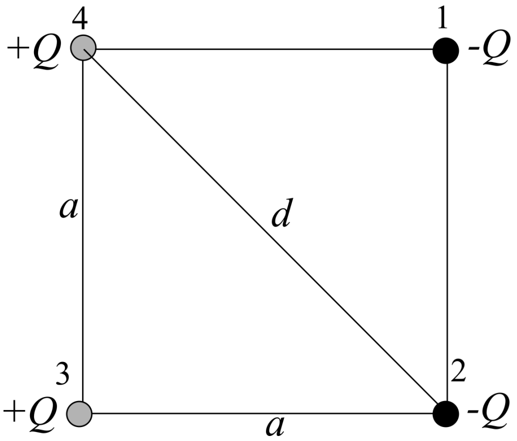
$$V = \underline{\underline{0}}$$

Oppgave 23

Den potensielle energien til ladningskonfigurasjonen er

$$U = \sum_{i<j} \frac{kQ_iQ_j}{r_{ij}},$$

der ladningene er nummererte på figuren under.



Ladningene vekselvirker parvis, og vi passer på å ta med hvert bidrag kun én gang (like ladninger gir positivt bidrag; ulike gir negativt):

$$\begin{aligned} U &= \underbrace{k\frac{Q(-Q)}{a} + k\frac{(-Q)^2}{a} + \frac{kQ(-Q)}{d}}_{\text{vekselvirkning med ladning 1}} + \underbrace{k\frac{Q(-Q)}{a} + k\frac{Q(-Q)}{d}}_{\text{vekselvirkning med ladning 2}} + \underbrace{k\frac{Q^2}{a}}_{\text{ladning 3+4}} \\ &= -2k\frac{Q^2}{d} \\ &= -2k\frac{Q^2}{a\sqrt{2}} \\ &= \underline{\underline{-\sqrt{2}k\frac{Q^2}{a}}} \end{aligned}$$

Oppgave 24

To punktpartikler med identisk, positiv ladning q og masser lik hhv. m og $2m$ holdes i ro ved i en viss avstand fra hverandre. Partiklene slippes så.

I dette tilfellet virker det hele tiden en frastøtende kraft F mellom partiklene, som avtar med avstanden:

$$F = \frac{kq^2}{r^2}.$$

Hver partikkel har altså en positiv akselerasjon (i hver sin retning), dvs. **partiklene fjerner seg fra hverandre med økende fart**.

Oppgave 25

Vi har 4 identiske kondensatorer med kapasitans $C = 1,0\,\mathrm{mF}$ som skal kobles sammen slik at alle kondensatorene tas i bruk, og vi skal bestemme den minste mulige kapasitansen for oppkoblingen.

Når kondensatorer kobles i serie, avtar den totale kapasitansen:

$$\frac{1}{C_{tot}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}.$$

Med fire seriekoblede kondensatorer blir den totale (minimale) kapasitansen

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{tot}} &= 4 \cdot \frac{1}{C} \Rightarrow C_{tot} = \frac{1}{4}C \\ C_{tot} &= \frac{1}{4} \cdot 1,0\,\mathrm{mF} \\ &= \underline{\underline{0,25\,\mathrm{mF}}} \end{aligned}$$

Oppgave 26

Kapasitansen til en luftfylt platekondensator med areal A og plateavstand d er

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Ut i fra definisjonen av kapasitans:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \frac{A}{d}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \cdot d.$$

Ser altså at spenningen er proporsjonal med plateavstanden d, når plateareal og ladning er konstante.

Når kondensatoren tilkobles et batteri med spenning V_0, tilføres platene en viss ladning. Når batteriet så kobles fra og plateavstanden økes, er ladningen på platene konstant (ladning "lekker ikke" fra en ideell kondensator).

Ettersom spenningen ved konstant A og Q er proporsjonal med plateavstanden d, vil en dobling av plateavstanden gi en dobling av spenningen mellom platene:

$$V = \underline{\underline{2V_0}}$$

Oppgave 27

Den ekvivalente resistansen for de to kondensatorene i parallellkoblinga er

$$C_{tot} = 2C = 2 \cdot 1,0\,\mu\mathrm{F} = \underline{2,0\,\mu\mathrm{F}}$$

Her skal altså kondensatorer lades ut gjennom en motstand, dvs. vi har en RC-krets. Ladningen $Q(t)$ på kondensatorene er

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau},$$

der tidskonstanten $\tau = RC_{tot}$. Ut i fra definisjonen av kapasitans er spenningen V over kondensatoren gitt ved

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C},$$

slik at

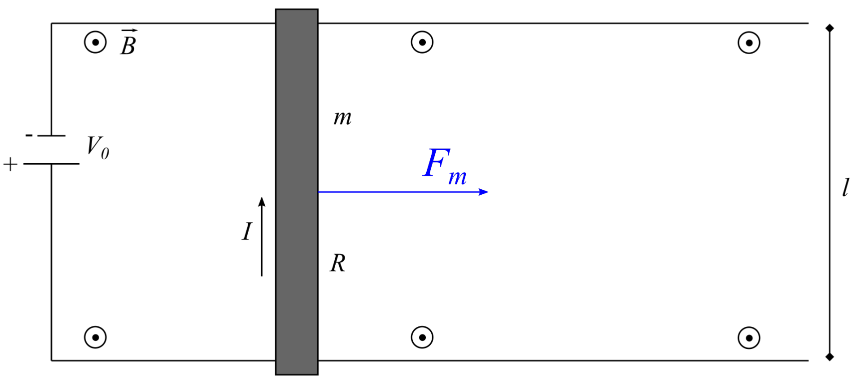
$$V(t) = \frac{Q_0}{C} e^{-t/\tau} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

der $V_0 = 12\,\mathrm{V}$ er utgangsspenningen over kondensatorene. Tiden det tar før spenningen er $6,0\,\mathrm{V} = V_0/2$ finnes fra

$$\begin{aligned}
V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} &= \frac{V_0}{2} \\
-\frac{t}{\tau} &= \ln\frac{1}{2} \\
t &= -\tau \ln\frac{1}{2} \\
&= -RC_{tot}\ln\frac{1}{2} \\
&= -1,0\cdot 10^{6}\,\Omega \cdot 2,0\cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}\cdot \ln\frac{1}{2} \\
&= 1,39\,\mathrm{s} \\
&\approx \underline{\underline{1,4\,\mathrm{s}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 28

Figuren under viser kreftene som virker på stanga: i fravær av friksjon er det kun magnetkrafta $\vec{F_m} = I\vec{l}\times\vec{B}$ som virker på stanga, med retning mot høyre.



Newtons 2. lov for stanga:

$$\begin{aligned}
\sum F &= ma \\
IlB &= ma \\
a &= \underline{\frac{IlB}{m}}
\end{aligned}$$

Ved $t = 0$ er strømmen i kretsen gitt fra Ohms lov,

$$V_0 = RI \Rightarrow I = \frac{V_0}{R},$$

som gir

$$\begin{aligned} a &= \frac{IlB}{m} \\ &= \underline{\underline{\frac{V_0 lB}{mR}}} \end{aligned}$$

Akselerasjonen har retning **mot høyre**.

Oppgave 29

Den elektriske krafta på en elektrisk ladd partikkel i et homogent elektrisk felt er

$$F_e = qE.$$

Akselerasjonen til partiklene er fra Newtons 2. lov lik, ettersom kun elektriske krefter fra feltet virker,

$$\sum F = F_e = ma \Rightarrow a = \frac{F_e}{m} = \frac{qE}{m}.$$

Ettersom akselerasjonen er proporsjonal med ladningen og omvendt proporsjonal med massen, vil de tre partiklene få **samme** akselerasjon:

$$a_1 = \frac{qE}{m},\ a_2 = \frac{2qE}{2m} = \frac{qE}{m},\ a_3 = \frac{3qE}{3m} = \frac{qE}{m}$$

Samme akselerasjon og samme startfart betyr at ladningene **treffer den negative plata samtidig**.

Oppgave 30

Fra forrige oppgave: akselerasjonet til heliumionet i det homogene elektriske feltet er gitt ved

$$a = \frac{qE}{m}.$$

Det elektriske feltet er bestemt fra potensialforskjellen $\Delta V = 1{,}0\,\mathrm{kV}$ mellom platene:

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot \vec{ds} = -E \int ds = -Ed,$$

der d er plateavstanden. Vi er kun interesserte i absoluttverdien til feltet, slik at

$$E = \frac{\Delta V}{d},$$

som gir

$$\begin{aligned} a &= \frac{qE}{m} \\ &= \underline{\frac{q\Delta V}{md}} \end{aligned}$$

Bevegelseslikning for konstant akselerasjon med null startfart:

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a}} \\
t &= \sqrt{\frac{2d}{\frac{q\Delta V}{md}}} \\
&= \sqrt{\frac{2md^2}{q\Delta V}} \\
&= \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot (0,10\,\mathrm{m})^2}{2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 1,0 \cdot 10^3\,\mathrm{V}}} \\
&= 6,44 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} \\
&\approx \underline{\underline{0,64\,\mu\mathrm{s}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 31

Fra uttrykket for dreiemoment på ledersløyfe med areal Aog strøm I i et ytre felt B,

$$\tau = IAB\sin\phi,$$

der ϕ er vinkelen mellom sløyfas arealvektor og magnetfeltet $\vec{B}$.

Ser at dreiemomentet er størst når $\phi = 90°$,dvs. når arealvektoren står normalt på magnetfeltet. Dette tilsvarer **figur C**.

Oppgave 32

Resistansen til en leder med resistivitet ρ, tverrsnitt A og lengde l er gitt ved

$$R = \frac{\rho l}{A}.$$

Har to ledere med samme resistivitet og diametre $D_1 = D$,$D_2 = 2D$ og lengder $l_1 = l$ og $l_2 = 2l$, og resistans hhv. R_1 og R_2. Får at

$$
\begin{aligned}
\frac{R_2}{R_1} &= \frac{\frac{l_2}{A_2}}{\frac{l_1}{A_1}} = \frac{l_2}{l_1}\frac{A_1}{A_2} \\
&= \frac{l_2}{l_1}\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 33

Vi får gitt at to ladde partikler med samme positive ladning q, men ulike masser m og $2m$ kommer med samme hastighet v inn i et homogent magnetfelt som peker innover i figurplanet og som står normalt på partiklenes fartsretning. Vi skal vurdere hvilken av følgende påstander som er riktig:

- ○ Partikkelen med masse $2m$ går i en sirkelbane med dobbelt så stor radius som den med masse m.
- ○ Partiklenes banefart avtar med tiden.
- ○ To de partiklene går i en sirkelbane med samme radius.
- ○ Partikkelen med masse $2m$ går i en sirkelbane med halvparten så stor radius som den med masse m.
- ○ Partiklenes banefart øker med tiden.

Ettersom magnetkrafta på en ladd partikkel i et magnetfelt er $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$. Ettersom denne alltid står normalt på farten, vil banefarten være konstant - magnetkrafta blir en ren sentripetalkraft som gjør at partiklene går i en sirkelbane.

Sammenhengen mellom masse m og baneradius r kan vi undersøke med Newtons 2. lov:

$$\begin{aligned}\sum F &= ma = m\frac{v^2}{r}\\ qvB &= m\frac{v^2}{r}\\ r &= \underline{\frac{mv}{qB}}\end{aligned}$$

Dette viser at banen er omvendt proporsjonal med m, slik at **en partikkel med masse $2m$ har dobbelt så stor radius som en med masse m** når de andre størrelsene er de samme.

Oppgave 34

Den magnetiske krafta F_m pr. lengdeenhet mellom to lange, parallelle ledere som begge fører strøm I i avstand d er gitt ved

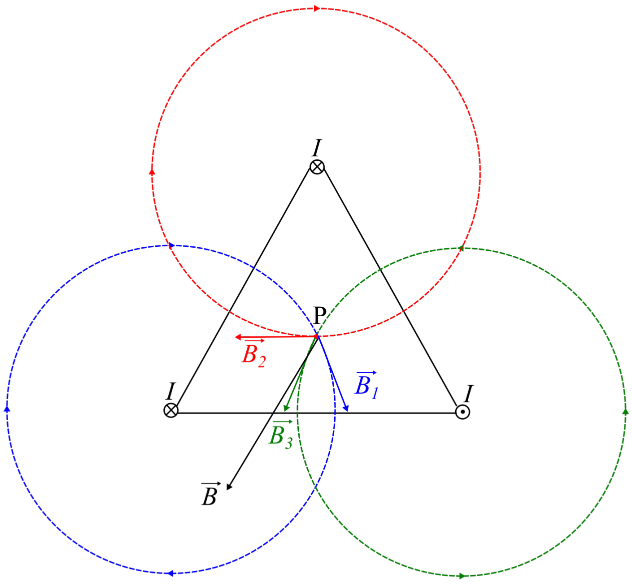
$$\begin{aligned}\frac{F_m}{l} &= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \Rightarrow F_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d}\\ I &= \sqrt{\frac{2\pi d \cdot F_m}{\mu_0 l}}\end{aligned}$$

Skal bestemme I slik at krafta på lederne blir $1,0\,\mathrm{N}$:

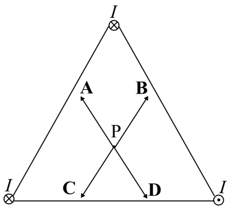
$$\begin{aligned}I &= \sqrt{\frac{2\pi \cdot 0,10\,\mathrm{m} \cdot 1,0\,\mathrm{N}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}}}\\ &= 707\,\mathrm{A}\\ &\approx \underline{\underline{0,71\,\mathrm{kA}}}\end{aligned}$$

Oppgave 35

Feltet rundt en rett leder er sirkulært med en retning gitt fra høyrehåndsregelen. Figuren under viser feltbidragene $\vec{B_1}$, $\vec{B_2}$ og $\vec{B_3}$ fra de tre lederne og det resulterende totale feltet $\vec{B}$:

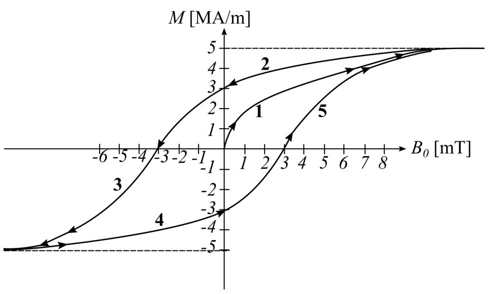


Dette tilsvarer **alternativ C** på oppgavefiguren:



Oppgave 36

Et ferromagnetisk materiale utsettes for et ytre magnetfelt og følger hysteresekurven 1-2-3-4-5 på figuren under:



Metningsmagnetiseringen M_s, dvs. den maksimale magnetiseringen som materialet kan oppnå, leses av som den horisontale asymptoten på y-aksen:

$$M_s = \underline{\underline{5\,\mathrm{MA/m}}}$$

Restmagnetiseringen finner vi ved å følge del 2 av kurva tilbake til det ytre feltet er null, dvs. M_r er skjæringspunktet med y-aksen:

$$M_r = \underline{\underline{3\,\mathrm{MA/m}}}$$

Oppgave 37

Q-faktoren for en RLC-krets er gitt ved

$$Q = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q = \frac{1}{1,0\,\Omega}\sqrt{\frac{10\cdot10^{-3}\,\mathrm{H}}{10\cdot10^{-9}\,\mathrm{F}}}$$

$$= \underline{\underline{10^3}}$$

Oppgave 38

Resonansfrekvensen til en RLC-krets er (tilnærmet) gitt ved

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

der L er spolens selvinduktans. Når det settes en jernkjerne inne i spolen, vil magnetfeltet B inne i spolken forsterkes med en faktor μ_r. Spolens selvinduktans er

$$L = \frac{\Phi}{I},\ \Phi \propto B \propto \mu_r,$$

dvs. spolens selvinduktans øker med en faktor μ_r.

Ettersom $\omega_0 \propto \frac{1}{\sqrt{L}}$, blir den nye resonansfrekvensen

$$\frac{1}{\sqrt{10^4}}\omega_0 = \underline{\underline{\frac{1}{100}\omega_0}}$$

Oppgave 39

Denne kretsen kan ansees som en udempet RLC-krets drevet av en ytre vekselspenning $V_0 \sin\omega t$, der altså $R = 0$ slik at dempingsleddet $\gamma = \frac{R}{L} = 0$.

Strømamplituden for en slik krets er

$$I_0(\omega) = Q_0(\omega)\,\omega$$

$$= \frac{\frac{V_0}{L}\omega}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

$$= \frac{\frac{V_0}{L}\omega}{\omega^2-\omega_0^2} \qquad \text{(Setter inn } \gamma = 0\text{)}$$

$$= \frac{\frac{V_0}{L}\omega}{\omega^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$= \frac{\frac{12\,\mathrm{V}}{1{,}0\cdot10^{-3}\,\mathrm{H}}\cdot 2000\,\mathrm{s}^{-1}}{(2000\,\mathrm{s}^{-1})^2 - \frac{1}{1{,}0\cdot10^{-3}\,\mathrm{H}\cdot1{,}0\cdot10^{-3}\,\mathrm{F}}}$$

$$= \underline{\underline{8,0\,\mathrm{A}}}$$

Oppgave 40

Den gjensisige induktansen til spolene er definert som

$$M = \Phi/I,$$

når en strøm I i den ene skaper en fluks Φ i den andre. Magnetfeltet inne i en spole med vindingstall N og lengde l, der materialet i kjernen har relativ permeabilitet μ_r, er

$$B = \mu_r \mu_0 I \frac{N}{l}.$$

Anta at det går en strøm I i spolen med N_1 vindinger. Denne setter opp et magnetfelt

$$B_1 = \mu_r \mu_0 I \frac{N_1}{l}$$

Dette skaper en fluks Φ i den andre gitt ved

$$\Phi = N_2 B_1 A = N_2 \cdot \mu_r \mu_0 I \frac{N_1}{l} \cdot A$$

Den gjensidige induktansen er da

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Phi}{I} \\ &= \underline{\underline{\frac{N_1 N_2 \mu_r \mu_0 A}{l}}} \end{aligned}$$