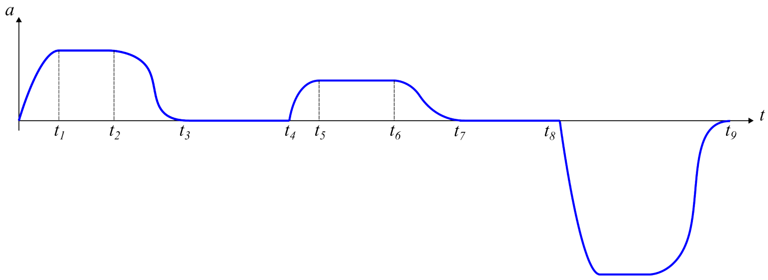
Oppgave 1

Bruker at $1\,\text{mm} = 10^{-3}\,\text{m}$ og $1\,\text{h} = 3600\,\text{s}$:

$$1,0\,\frac{\text{mm}}{\text{h}^2} = 1,0 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \cdot \frac{1}{(3600\,\text{s})^2}$$
$$= \underline{\underline{7,7 \cdot 10^{-11}\,\text{m/s}^2}}$$

Oppgave 2

Gitt akselerasjonsgrafen på figuren under:



Positiv akselerasjon (graf over x-aksen) tilsvarer økende fart; negativ akselerasjon (graf under x-aksen) tilsvarer avtakende fart.

Det er to ting vi må avgjøre:

- Hvor er togets hastighet maksimal: Svar: Farten øker først fra start til t_3, og så igjen fra t_4 til t_7. Fart er maksimal ved t_7, og holder seg konstant fram til t_8, dvs. farten er maksimal i tidsrommet $[t_7, t_8]$.
- Bremses toget opp fra t_2 til t_3? Nei, ettersom akselersjonen her er positiv. Toget bremses opp i tidsrommet $[t_8, t_9]$, der akselerasjonen er negativ.

Riktig påstand: Toget har sin største hastighet i tidsrommet $[t_7, t_8]$.

Oppgave 3

Bevegelseslikningene for kastebevegelse:

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos\theta \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\theta},\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

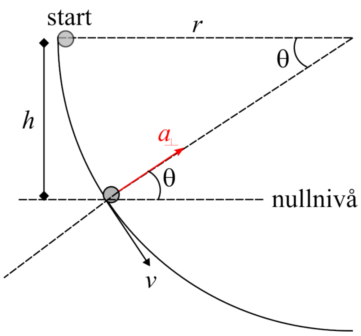
Kombinerer disse og får

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2$$
$$= v_0 \sin\theta \cdot \frac{x}{v_0\cos\theta} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta}$$
$$= x\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2\theta}$$

Dette gir at

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{gx^2}{2\cos^2\theta\,(x\tan\theta - y)}} \\ &= \sqrt{\frac{9,81\,\mathrm{m/s^2}\cdot(5,0\,\mathrm{m})^2}{2\cos^2 70^\circ\cdot(5,0\,\mathrm{m}\tan 70^\circ - 10\,\mathrm{m})}} \\ &= 16,7\,\mathrm{m/s} \\ &\approx \underline{\underline{17\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

Oppgave 4



Sentripetalakselerasjonen, med retning inn mot sentrum, har verdi

$$a_\perp = \frac{v^2}{r}.$$

Energibevaring for legemet[1] gir oss farten v som funksjon av θ:

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 \\ mgr\sin\theta &= \frac{1}{2}mv^2 \\ v^2 &= \underline{2gr\sin\theta} \end{aligned}$$

Dette gir at

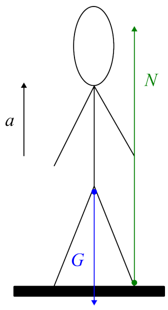
$$\begin{aligned} a_\perp &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{2gr\sin\theta}{r} \\ &= \underline{2g\sin\theta} \end{aligned}$$

Ettersom $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, tilsvarer dette graf E (sinusformet kurve).

[1]Normalkrafta fra underlaget gjør ikke et arbeid på legemet da vinkelen mellom normalkraft og bevegelse langs banen er lik 90°.

Oppgave 5

Figuren under viser kreftene som virker på personen idet heisen begynner å bevege seg oppover: tyngden G og normalkrafta N. Badevekta viser N, ettersom denne er like stor og motsatt rettet som krafta personen presser ned på badevekta med (Newtons 3. lov).



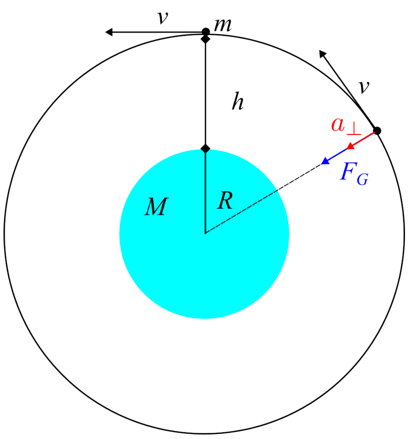
Dersom heisen er i ro, viser vekta personens tyngde $G = mg \Rightarrow m = G/g$.

Newtons 2. lov:

$$\begin{aligned}
\sum F &= ma \\
N - G &= ma \\
a &= \frac{N-G}{m} \\
&= \frac{N-G}{G/g} \\
&= \frac{N-G}{G} \cdot g \\
&= \frac{70,0\,\mathrm{N} - 67,0\,\mathrm{N}}{67,0\,\mathrm{N}} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \\
&= \underline{\underline{0,439\,\mathrm{m/s^2}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 6

Figuren under viser at den eneste krafta som virker på satellitten er tyngdekrafta F_G fra Jorda:



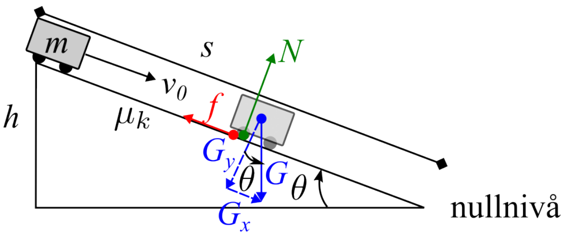
Det er tyngdekrafta fra Jorda som holder satellitten i sirkelbanen og besørger sentripetalakselerasjonen $a_\perp$. Newtons 2. lov for sirkelbevegelsen:

$$\begin{aligned}
\sum F &= ma_\perp = m\frac{v^2}{r}, \\
G\frac{Mm}{r^2} &= \frac{mv^2}{r} \\
v &= \sqrt{\frac{GM}{r}} \\
&= \sqrt{\frac{GM}{R+h}} \\
&= \sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}\cdot 5,97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{200\cdot 10^3\,\mathrm{m}+6,37\cdot 10^6\,\mathrm{m}}} \\
&= 7,79\cdot 10^3\,\mathrm{m/s} \\
&\approx \underline{\underline{7,8\,\mathrm{km/s}}}
\end{aligned}$$

ettersom baneradien $r = R + h$.

Oppgave 7

Den maksimale verdien for startfarten v_0 tilsvarer at bilen akkurat klarer å stoppe i løpet av strekningen s. Se figuren under.



Dette gir følgende energiregnskap for grensetilfellet: all kinetisk + potensiell energi i startpunktet må omdannes til friksjonsarbeid ved slutten av skråplanet (dvs. det er ikke noe resterende kinetisk energi i stoppunktet):

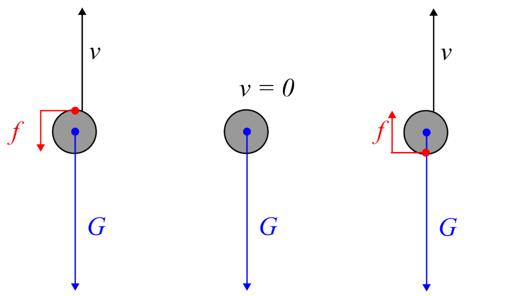
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = f\cdot s,$$

der friksjonskrafta er $f = \mu_k N = \mu_k G_y = \mu_k mg\cos\theta$. Dette gir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh &= \mu_k mg\cos\theta\cdot s \\
\frac{1}{2}mv_0^2 + mgs\sin\theta &= \mu_k mg\cos\theta\cdot s \qquad (h = s\sin\theta) \\
v_0 &= \underline{\underline{\sqrt{2gs\,(\mu_k\cos\theta - \sin\theta)}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 8

Figuren under viser kreftene som virker på legemet i tre punkter: på vei oppover, i toppunktet, og på vei nedover: tyngden $G = mg$ og luftmotstanden f.



På vei oppover gir Newtons 2. lov at

$$\sum F = f + mg = ma \Rightarrow a = \frac{f + mg}{m} = \frac{f}{m} + g,$$

dvs. her er (nedbremsings-)akselerasjonen $a > g$.

I det øverste punktet virker kun tyngden, slik at $a = g$.

På vei nedover gir Newtons 2. lov at

$$\sum F = mg - f = ma \Rightarrow a = \frac{mg - f}{m} = g - \frac{f}{m},$$

dvs. her er akselerasjonen $a < g$.

Riktig påstand: På vei oppover er kulas akselerasjon større enn tyngdeakselerasjonen.

Oppgave 9

Velger nullnivå for potensiell energi på gulvet. Potensiell energi i høyde h_1 går over til kinetisk energi $K_{\text{før}}$ like før støtet med gulvet:

$$K_{\text{før}} = mgh_1.$$

Noe kinetisk energi forsvinner i sammenstøtet med gulvet, men den kinetiske energien K_{etter} like etter støtet går over til potensiell energi, idet legemet går opp til en høyde $h_2 = \frac{1}{4}h_1$:

$$K_{\text{etter}} = mgh_2,$$

slik at andelen av kinetisk energi som forsvinner i kollisjonen blir

$$\begin{aligned}
\frac{K_{\text{før}} - K_{\text{etter}}}{K_{\text{før}}} &= \frac{mgh_1 - mgh_2}{mgh_1} \\
&= \frac{h_1 - h_2}{h_1} \\
&= \frac{h_1 - \frac{1}{4}h_1}{h_1} \\
&= \frac{3}{4} \\
&= \underline{\underline{75\,\%}}
\end{aligned}$$

Oppgave 10

La I_0 være treghetsmomentet om massesenteret. Akse A og B ligger i avstand hhv. $d_A = 2d_B$ og d_B fra CM.

Fra Steiners sats/parallellakse-teoremet er treghetsmomentene I_A og I_B om aksene A og B gitt ved

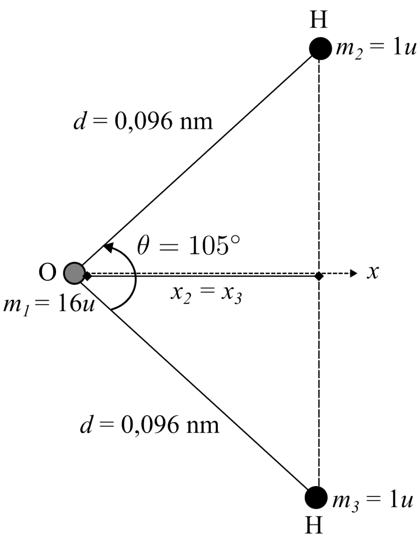
$$\begin{aligned} I_A &= I_0 + md_A^2 = I_0 + m\left(2d_B\right)^2 = I_0 + 4md_B^2 \\ I_B &= I_0 + md_B^2 \end{aligned}$$

Ut i fra dette ser vi at $I_A > I_B$, men vi kan ikke angi et mer spesifikt størrelsesforhold mellom I_A og I_B.

Riktig påstand: $I_A > I_B$.

Oppgave 11

Velger origo $x = 0$ i O-atomet, som indikert på figuren under.



Fra definisjonen av tyngdepunkt:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_1x_1 + 2m_2x_2}{m_1 + 2m_2} \qquad \text{(Her er } x_3 = x_2 \text{ og } m_2 = m_3\text{)} \\ &= \frac{16\,\mathrm{u}\cdot 0 + 2\cdot 1,0u\cdot d\cos\frac{105^\circ}{2}}{16u + 2\cdot 1,0u} \\ &= 0,0676d \\ &= 0,0676\cdot 0,096\,\mathrm{nm} \\ &= \underline{\underline{0,0065\,\mathrm{nm}}} \end{aligned}$$

Oppgave 12

Dreieimpulsbevaring om hengslingspunktet i bakken gir (merk at det er den totale dreieimpulsen som er bevart; summen av banedreieimpuls og spinn):

$$\begin{aligned} L_{\text{før}} &= L_{\text{etter}} \\ mv_0 L &= m\left(-v_0\right)L + I\omega. \end{aligned}$$

Her er det brukt at ballen kun har banedreieimpuls $L_b = r_\perp p$, mens stanga kun har spinn $L_s = I\omega$ etterpå (ettersom den sitter fast i bakken).

Stanga har treghetsmoment $I = \frac{1}{3}ML^2$ om omdreiningsaksen. Dette gir:

$$\begin{aligned} mv_0 L &= -mv_0 L + I\omega \\ \omega &= \frac{2mv_0 L}{I} \\ &= \frac{2mv_0 L}{\frac{1}{3}ML^2} \\ &= \underline{\underline{6\frac{m}{M}\frac{v_0}{L}}} \end{aligned}$$

Oppgave 13

Banens høyde over gulvet er

$$y(x) = y_0 \frac{x^2}{L^2},$$

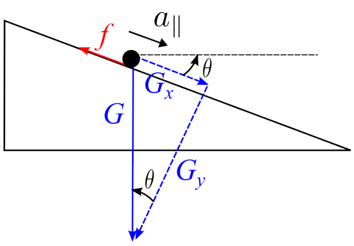
med endepunkter i $x = \pm L$. Legemet slippes i $x = -L$, tilsvarende en høyde $y_1 = y_0 \left(-L\right)^2 / L^2 = y_0$ med null startfart. Finner farten i $x = 0$, der høyden er $y_2 = y\left(0\right) = 0$ ved energibevaring (nullpunkt for potensiell energi settes i $y = 0$):

$$\begin{aligned} mgy_1 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ mgy_0 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^2 && \text{(Rullebetingelsen: } v = \omega r \Rightarrow \omega = \tfrac{v}{r}\text{)} \\ 2gy_0 &= v^2 + \frac{2}{5}v^2 && \text{(Ganger med faktor } \tfrac{2}{m}\text{)} \\ \frac{7}{5}v^2 &= 2gy_0 \\ v &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{10gy_0}{7}}}} \end{aligned}$$

Oppgave 14

Vi skal bestemme baneakselerasjonen $a_{\parallel}$ i punktet $x = -L/2$ for gitte baneparametre $L = 2{,}00\,\text{m}$ og $y_0 = 0{,}200\,\text{m}$.

Baneakselerasjonen finnes ved å dekomponere kreftene på legemet i to retninger: parallelt med underlaget (x-retning), og normalt på underlaget (y-retning). Se figuren under.



Newtons 2. lov i x-retning (parallelt med underlaget):

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_{\|}\\ mg\sin\theta - f &= ma_{\|}\end{aligned}$$

Newtons 2. lov for rotasjon om kulas massesenter:

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I\alpha\\ f\cdot r &= I\alpha = I\frac{a_{\|}}{r} && \text{(Rullebetingelse: } \alpha = a/r\text{)}\\ f &= I\frac{a_{\|}}{r^2}\\ &= \frac{2}{5}mr^2\cdot\frac{a_{\|}}{r^2}\\ &= \underline{\frac{2}{5}ma_{\|}}\end{aligned}$$

Dette gir:

$$\begin{aligned}mg\sin\theta - f &= ma_{\|}\\ mg\sin\theta - \frac{2}{5}ma_{\|} &= ma_{\|}\\ \frac{7}{5}ma_{\|} &= mg\sin\theta\\ a_{\|} &= \underline{\frac{5}{7}g\sin\theta}\end{aligned}$$

Vinkelen θ kan bestemmes ut i fra den deriverte dy/dx:

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \left|\frac{dy}{dx}\right|\\ &= \left|\frac{2y_0x}{L^2}\right|\\ \theta &= \arctan\left|\frac{2y_0x}{L^2}\right|,\end{aligned}$$

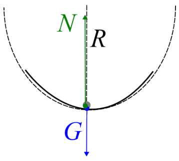
slik at

$$\begin{aligned}
a_{\parallel} &= \frac{5}{7} g \sin\theta \\
&= \frac{5}{7} g \sin\left(\arctan\left|\frac{2y_0 x}{L^2}\right|\right) \\
&= \frac{5}{7} g \sin\left(\arctan\left|\frac{2y_0\left(-L/2\right)}{L^2}\right|\right) \\
&= \frac{5}{7} g \sin\left(\arctan\frac{y_0}{L}\right) \\
&= \frac{5}{7} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot \sin\left(\arctan\frac{0,200\,\mathrm{m}}{2,00\,\mathrm{m}}\right) \\
&= 0,6972\,\mathrm{m/s^2} \\
&\approx \underline{\underline{0,697\,\mathrm{m/s^2}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 15

Vi skal bestemme forholdet mellom normalkrafta N og tyngden G i det laveste punktet $x = 0$ for gitte baneparametre $L = 2,00\,\mathrm{m}$ og $y_0 = 0,200\,\mathrm{m}$, når det oppgis at farten i det laveste punktet er $v = 5,00\,\mathrm{m/s}$.

Figuren under viser situasjonen:



Newtons 2. lov i vertikalretningen gir (her er det kun sentripetalakselerasjon $a_\perp$,ettersom baneaks. i det nederste punktet er null):

$$\sum F = ma_\perp = m\frac{v^2}{R},$$

der R er krumningsradien i bunnpunktet. Videre er

$$\begin{aligned}
N - mg &= m\frac{v^2}{R} \\
N &= m\frac{v^2}{R} + mg \\
\frac{N}{mg} &= \underline{\frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{R} + 1}
\end{aligned}$$

Krumningsradien er gitt på formelarket:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= y'',
\end{aligned}$$

ettersom $y' = 0$ i bunnpunktet. Fra tidligere er\alpha

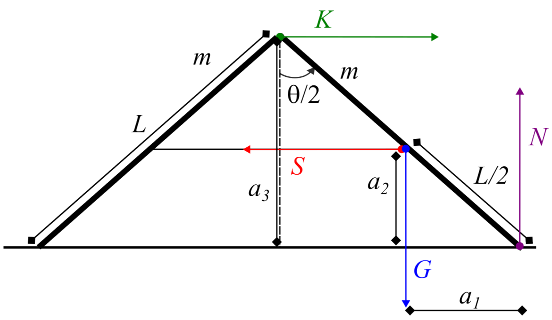
$$y' = \frac{2y_0}{L^2}x$$
$$y'' = \frac{2y_0}{L^2},$$

slik at

$$\begin{aligned}\frac{N}{mg} &= \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{R} + 1 \\ &= \frac{v^2}{g} \cdot \frac{2y_0}{L^2} + 1 \\ &= \frac{(5,00\,\mathrm{m/s})^2}{9,81\,\mathrm{m/s^2}} \cdot \frac{2 \cdot 0,200\,\mathrm{m}}{(2,00\,\mathrm{m})^2} + 1 \\ &= \underline{\underline{1,25}}\end{aligned}$$

Oppgave 16

Figuren under viser kreftene på én av de hengslede bjelkene: tyngden G, normalkrafta N fra underlaget, snordraget S og kontaktkrafta K fra den andre bjelken (overført via hengslet).



Newtons 1. lov i horisontalretningen (x-retning) gir at

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow S = K$$

Momentbetingelsen for likevekt for den ene bjelken med akse om kontaktpunktet (armene for kreftene er indikerte på figuren over):

$$\begin{aligned}\sum \tau &= 0 \\ G \cdot a_1 + S \cdot a_2 - K \cdot a_3 &= 0 \\ G \cdot \frac{L}{2}\sin\frac{\theta}{2} + S \cdot \frac{L}{2}\cos\frac{\theta}{2} - K \cdot L\cos\frac{\theta}{2} &= 0 \\ G \cdot \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} + S \cdot \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} - S \cdot \cos\frac{\theta}{2} &= 0 \qquad \text{(Forkorter } L \text{ og bruker } K = S\text{)} \\ \frac{1}{2}S\cos\frac{\theta}{2} &= \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} \cdot mg \\ S &= \underline{\underline{mg\tan\frac{\theta}{2}}}\end{aligned}$$

Oppgave 17

En harmonisk oscillator slippes fra $x = A$ med null startfart, og vi skal identifisere størrelsesforholdet mellom fartene v_1, v_2 og v_3 henholdsvis i de tre punktene $x_1 = \frac{A}{2}$, $x_2 = 0$ og $x_3 = -\frac{A}{4}$.

I en harmonisk oscillator er energi fordelt mellom kinetisk energi og potensiell energi i fjæra. Størst fart/kinetisk energi tilsvarer "slappest" mulig fjær, som er i $x_2 = 0$. Nest slappest fjær og neste størst fart er i $x_3 = -\frac{A}{4}$ (fortegnet har ingen betydning her; det er kun avstanden fra likevektspunktet som bestemmer hvor mye energi som ligger i fjæra), mens fjæra er strammest og farten minst i $x_1 = \frac{A}{2}$.

Forholdet mellom fartene blir derfor:

Riktig påstand: $v_2 > v_3 > v_1$.

Oppgave 18

Perioden T for en enkel/matematisk pendel er gitt ved

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

dvs. perioden $T \sim \sqrt{L}$. Hvis den originale lengden er L, tilsvarende en periode T, og lengden øker med $1,0\,\%$, dvs. til $1,01L$ tilsvarende en periode T', blir den prosentvise økningen i svingetiden

$$\frac{T' - T}{T} = \frac{\sqrt{1,01L} - \sqrt{L}}{\sqrt{L}} \approx 0,0050 = \underline{\underline{0,50\,\%}}$$

Oppgave 19

Vinkelutslaget for en dempet huske er gitt ved

$$\theta(t) = \underbrace{\theta_0 e^{-at}}_{\text{amplitude}} \underbrace{\cos\omega t}_{\text{svingefaktor}},$$

med $a = 0,20\,\mathrm{s}^{-1}$ og $\theta_0 = 15°$. Vi skal bestemme hvor lang tid det tar før amplituden, dvs. det maksimale vinkelutslaget, er redusert til et utslag $\theta_1 = 5,0°$.

For en dempet svingning er den tidsavhengige, eksponentielt avtakende amplituden gitt ved

$$A(t) = \theta_0 e^{-at},$$

slik at vi får likningen

$$\begin{aligned}
\theta_0 e^{-at} &= \theta_1 \\
-at &= \ln\frac{\theta_1}{\theta_0} \\
t &= -\frac{1}{a}\ln\frac{\theta_1}{\theta_0} \\
&= -\frac{1}{0,20\,\mathrm{s}^{-1}}\ln\frac{5,0°}{15°} \\
&= 5,49\,\mathrm{s} \\
&\approx \underline{\underline{5,5\,\mathrm{s}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 20

Kriteriet for kritisk demping for en svingning med dempingskonstant b er at

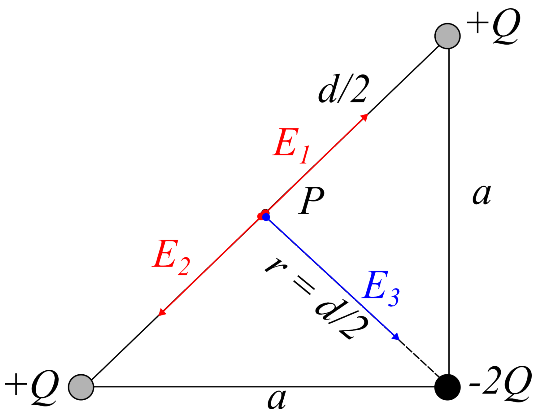
$$\frac{b}{2m} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow b = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km}.$$

Dette gir at

$$\begin{aligned} b &= 2\sqrt{1,0 \cdot 10^2\,\mathrm{N/m} \cdot 4,0 \cdot 10^2\,\mathrm{kg}} \\ &= \underline{\underline{4,0 \cdot 10^2\,\mathrm{kg/s}}} \end{aligned}$$

Oppgave 21

Gitt ladningskonfigurasjonen på figuren under:



Vi skal besemme feltet i punkt P, som ligger midt på hypotenusen med lengde $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$. Vi finner også[2] at avstanden $r = d/2$.

Bidragene E_1 og E_2 fra de to positive ladningene kansellerer hverandre; vi sitter igjen med bidraget E_3 fra ladningen $-2Q$, som har absoluttverdi gitt ved

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{k \cdot 2Q}{r^2} \\ &= \frac{k \cdot 2Q}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} \qquad \left(\text{Her er } r = \tfrac{d}{2} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}a\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{4kQ}{a^2}}} \end{aligned}$$

Oppgave 22

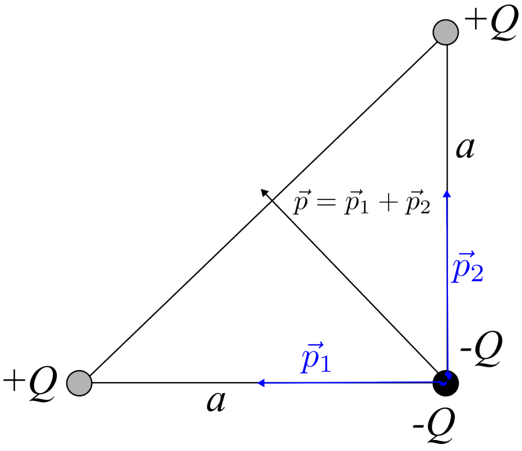
Det elektriske potensialet i P er summen av bidragene fra hver ladning (alle ladningene ligger i samme avstand $r = d/2 = \sqrt{2}/2a$ fra P):

$$\begin{aligned} V &= 2\frac{kQ}{r} + \frac{k\,(-2Q)}{r} \\ &= \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

[2] Dette kan vi enten regne ut eksplisitt, eller ved å innse at den rettvinklede trekanten mellom Q, $-2Q$ og punktet P er likebeint.

Oppgave 23

Elektrisk dipolmoment: Vi organiserer ladningene i to dipolpar:



Hvert dipolpar bidrar med et beløp

$$p_1 = p_2 = Qa,$$

slik at det totale elektriske dipolmomentet blir absoluttverdien av vektorsummen $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, som fra Pytagoras' er lik

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot (Qa)^2} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{2}Qa}} \end{aligned}$$

Oppgave 24

Elektronet holdes i sirkelbevegelse med sentripetalaks. $a_\perp$ på grunn av coulombkraften fra den positive atomkjernen:

$$\begin{aligned} \sum F &= ma_\perp = m\frac{v^2}{r} \\ \frac{ke^2}{r^2} &= m\frac{v^2}{r} \\ v &= \sqrt{\frac{ke^2}{mr}} \\ &= \sqrt{\frac{8,99 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2} \cdot (1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{9,11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 5,3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}}} \\ &\approx \underline{\underline{2,2 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

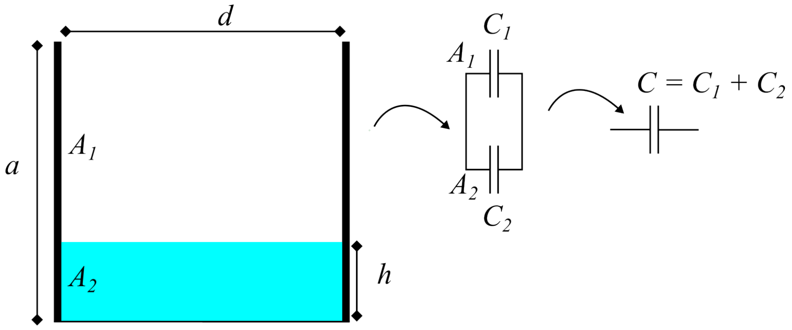
Oppgave 25

Tidskonstanten for en RC-krets bestående av seriekobling av en motstand med resistans R og en kondensator med kapasitans C er $\tau = RC$. Vi skal ha $\tau \sim 1\,\mathrm{s}$ for $C \sim 10^{-6}\,\mathrm{F}$. Vi må da velge en verdi for R av størrelsesorden

$$\begin{aligned} R &= \frac{\tau}{C} \\ &\sim \frac{1\,\mathrm{s}}{10^{-6}\,\mathrm{F}} \\ &\sim 10^{6}\,\Omega \\ &\sim \underline{\underline{1\,\mathrm{M}\Omega}} \end{aligned}$$

Oppgave 26

Tankmåleren kan ansees som en parallellkobling av en luftfylt og en væskefylt kondensator, som vist på figuren under:



Kapasitansen til den luftfylte platekondensatoren med areal A_1 og plateavstand d er

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{A_1}{d}.$$

Kondensatoren med areal A_2 som er fylt med en væske med relativ permittivitet ε_r, har kapasitans

$$C_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A_2}{d}$$

Den totale kapasitansen C av parallellkoblingen er

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 \\ &= \varepsilon_0 \frac{A_1}{d} + \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A_2}{d}. \end{aligned}$$

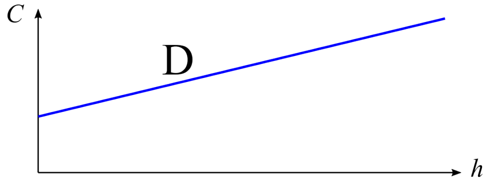
Platearealene A_1 og A_2 endrer seg med væskenivået h. Hvis platebredden er b (inn i papirplanet) er:

$$\begin{aligned} A_2 &= bh \\ A_1 &= b\,(a-h)\,, \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} C &= \varepsilon_0 \frac{A_1}{d} + \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A_2}{d} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{d}\,(A_1 + \varepsilon_r A_2) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{d}\,(b\,(a-h) + \varepsilon_r \cdot bh) \\ &= \underline{\frac{\varepsilon_0}{d} b\,(a + (\varepsilon_r - 1)\,h)} \end{aligned}$$

Dette er en lineær sammenheng på formen $C = kx + c$ med $k > 0$ (fordi $\varepsilon_r > 1$ og dermed $\varepsilon_r - 1 > 0$) og positivt konstantledd, tilsvarende graf D:



Oppgave 27

I en seriekobling er det samme ladning Q på hver kondensator. Ut i fra definisjonen av kapasitans er spenningen over kondensatoren med kapasitans C lik

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C}.$$

Kirchoffs 2. lov for kretsen gir at

$$\begin{aligned} V_0 - \frac{Q}{C} - \frac{Q}{2C} - \frac{Q}{3C} &= 0 \\ \frac{11}{6}\frac{Q}{C} &= V_0, \end{aligned}$$

slik at spenningen V=Q/C over kondensatoren med kapasitans C blir bestemt fra

$$\begin{aligned} \frac{11}{6}V &= V_0 \\ V &= \underline{\underline{\frac{6}{11}V_0}} \end{aligned}$$

Oppgave 28

Når den samme kondensatoren lades opp og så ut igjen gjennom den samme motstanden, er tidskonstanten $\tau = RC$ den samme. Spenningen over kondensatoren ved opp- og utladning er gitt ved hhv.

$$V(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad \text{(Oppladning)}$$

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{(Utladning)}$$

Ved å løse likningen $V(t) = \frac{1}{2}V_0$, finner vi at tidene t_1 og t_2 for hhv. opp- og utladning til spenningen $\frac{1}{2}V_0$ er identiske.

Riktig påstand: $t_1 = t_2$.

Oppgave 29

Den elektriske krafta på en elektrisk ladd partikkel i et homogent elektrisk felt er gitt ved

$$F_e = qE.$$

Akselerasjonen til hver partikkel er bestemt fra Newtons 2. lov:

$$\sum F = F_e = ma \Rightarrow a = \frac{F_e}{m} = \frac{qE}{m},$$

slik at vi kan bruke følgende bevegelseslikning for rettlinjet bevegelse med konstant akselerasjon:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{a}} \\ t &= \sqrt{\frac{2 \cdot d}{\frac{qE}{m}}} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{\frac{2md}{qE}}}} \end{aligned}$$

Oppgave 30

Ettersom magnetkrafta $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ hele tiden står normalt på farten, vil partikkelen få en sirkelbevegelse med konstant banefart. Newtons 2. lov for sirkelbevegelsen:

$$\begin{aligned} \sum F &= ma_\perp = m\frac{v^2}{R} \\ qvB &= m\frac{v^2}{R} \\ R &= \underline{\frac{mv}{qB}} \end{aligned}$$

Ut i fra figuren er sammenhengen mellom R, d og vinkelen θ gitt ved

$$R \sin\theta = d \Rightarrow R = \frac{d}{\sin\theta},$$

slik at vi får likninga

$$\begin{aligned} \frac{mv}{qB} &= \frac{d}{\sin\theta} \\ m &= \underline{\underline{\frac{qBd}{v\sin\theta}}} \end{aligned}$$

Oppgave 31

Ettersom batterispenningen på $12\,\mathrm{V}$ skal reduseres til $3,0\,\mathrm{V}$ over enheten ved en strøm på $0,50\,\mathrm{A}$,må spenningen over kobberlederen være

$$V = 12\,\mathrm{V} - 3,0\,\mathrm{V} = 9,0\,\mathrm{V},$$

dvs. resistansen i lederen må være

$$R = \frac{V}{I} = \frac{9,0\,\mathrm{V}}{0,50\,\mathrm{A}} = \underline{18\,\Omega}$$

Resistansen til en leder med resistivitet ρ, tverrsnitt A og lengde l er gitt ved

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\rho l}{A} \Rightarrow l = \frac{RA}{\rho} \\
l &= \frac{18\,\Omega \cdot 0,050\left(10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2}{1,7 \cdot 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}} \\
&= 52,9\,\mathrm{m} \\
&\approx \underline{\underline{50\,\mathrm{m}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 32

For at elektronet skal bevege seg rettlinjet, må den elektriske krafta $F_e = eE$ være like stor og motsatt rettet av magnetkrafta $F_m = evB$:

$$eE = evB \Rightarrow E = vB.$$

Sammenhengen mellom elektrisk feltstyrke og platespenningen ΔV er gitt fra

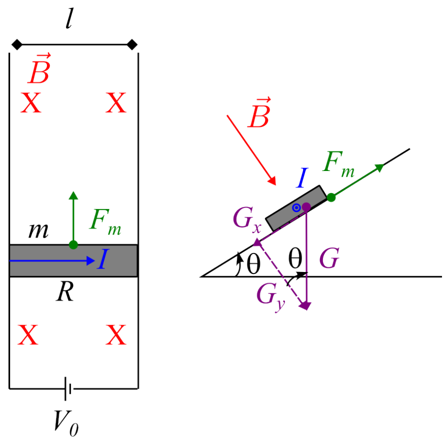
$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot \vec{ds} = Ed,$$

ettersom feltet er homogent. Vi får altså likningen

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= Ed \\
&= vBd \\
&= 1,0 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s} \cdot 10 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T} \cdot 0,10\,\mathrm{m} \\
&= \underline{\underline{1,0 \cdot 10^2\,\mathrm{V}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 33

Figuren under viser kreftene som virker på stanga: i fravær av friksjon virker kun magnetkrafta $\vec{F_m} = I\vec{l} \times \vec{B}$ (fra det ytre magnetfeltet) og tyngden mg. Ut i fra høyrehåndsregelen har magnetkrafta retning oppover langs skråplanet.



Newtons 1. lov for stanga dersom den skal gli med konstant fart opp skråplanet (x-retning):

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \Rightarrow F_m = G_x \\ IlB &= mg\sin\theta \\ \frac{V_0}{R}lB &= mg\sin\theta && \text{(Ohms lov: } V_0 = IR\text{)} \\ V_0 &= \underline{\underline{\frac{mgR\sin\theta}{lB}}}\end{aligned}$$

Oppgave 34

En strømsløyfe med areal A og strøm I i et ytre magnetfelt B utsettes for et dreiemoment

$$\tau = IAB\sin\phi,$$

der ϕ er vinkelen mellom sløyfas arealvektor og magnetfeltet. Man vil med andre ord få et (harmonisk) varierende dreiemoment på sløyfa, og en tilsvarende varierende vinkelakselerasjon:

$$\sum \tau = I\alpha.$$

Riktig påstand: Sløyfa vil rotere med variabel vinkelakselerasjon.

Oppgave 35

Gitt magnetfeltet langs symmetriaksen til en sirkulær sløyfe med radius R ved strøm I,

$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Magnetfeltstyrken i sløyfas sentrum, dvs. $x = 0$, er

$$B(0) = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I}{2R}}}$$

Vi skal bestemme x der $B(x)=\frac{1}{2}B(0)$. Dette gir likningen

$$\begin{aligned}B(x) &= \frac{1}{2}B(0) = \frac{\mu_0 I}{4R} \\ \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{\mu_0 I}{4R} \\ \left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}} &= 2R^3 \\ x^2 + R^2 &= \left(2R^3\right)^{\frac{2}{3}} \\ x^2 &= \left(2^{\frac{2}{3}} - 1\right)R^2 \\ x &= \sqrt{\left(2^{\frac{2}{3}} - 1\right)}R \\ &= 0,766R \\ &\approx \underline{\underline{0,77R}}\end{aligned}$$

Oppgave 36

En strømsløyfe med areal A og resistans R er omgitt av et homogent, tidsvariabelt magnetfelt med absoluttverdi $B(t) = B_0 e^{-kt}$, med retning inn i sløyfeplanet.

Indusert ems i sløyfa er gitt fra Faradays induksjonslov:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}(BA) \\ &= -A\frac{dB}{dt} \\ &= -A \cdot \left(-B_0 k e^{-kt}\right) \\ &= \underline{B_0 A k e^{-kt}}\end{aligned}$$

Indusert strøm er da fra Ohms lov lik

$$\begin{aligned}I &= \frac{\varepsilon}{R} \\ &= \underline{\underline{\frac{B_0 A k e^{-kt}}{R}}}\end{aligned}$$

Ettersom magnetfeltet avtar eksponentielt med tiden, vil strømsløyfa forsøke å styrke det ytre feltet ("boost"). Ut i fra høyrehåndsregelen for magnetfelt fra sløyfe blir da strømretningen **med klokka** på figuren.

Oppgave 37

Når en spole og en motstand er koblet i serie med et batteri (RL-krets), er spenningen over hhv. spolen og motstanden gitt ved

$$V_R = IR,\ V_L = L\frac{dI}{dt}.$$

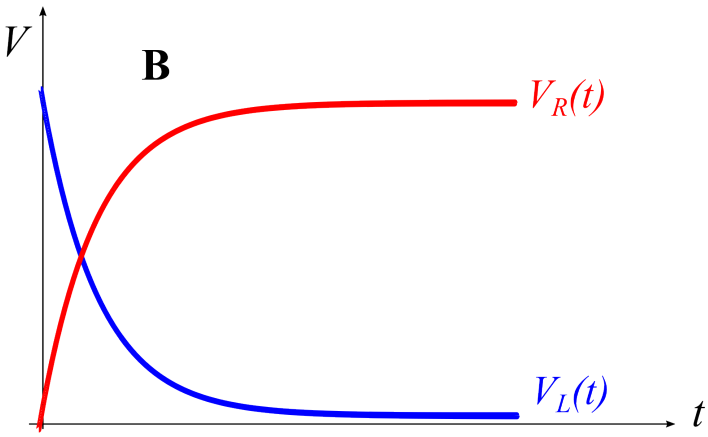
Strømoppbyggingen i en RL-krets er gitt på formelarket:

$$I(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

som sammenholdt med uttrykkene for spenningene gir

$$V_R = I_0 R\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),\ V_L = L \cdot I_0\left(-\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{LI_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Altså: spenningen over motstanden ØKER eksponentielt opp til en maksverdi, mens strømmen gjennom spolen AVTAR eksponentielt mot null. Dette tilsvarer grafen under:



Oppgave 38

En LC-krets utgjør en harmonisk svingning, dvs. både strømmen $I(t)$ og spenningen over komponentenene varierer harmonisk med tiden. Svinge(vinkel-)frekvensen til en LC-krets er gitt ved

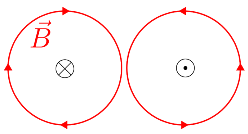
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

tilsvarende en svingetid/periode T lik

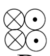
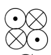
$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \\ T &= 2\pi\sqrt{10 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} \\ &= \underline{\underline{2,0\,\mathrm{ms}}} \end{aligned}$$

Oppgave 39

Magnetfeltet rundt en lang, rett strømleder er konsentriske sirkler rundt lederen, der orientering avhenger av strømretningen, og er gitt fra høyrehåndsregelen:



Dette viser at dersom ledere legges med parvis motsatte strømretninger, vil magnetfeltene fra lederne kansellere hverandre. Dvs. følgende orienteringer gir null magnetfelt rundt lednings-bunten:

B C

Riktig påstand: B og C.

Oppgave 40

Strømamplituden for RLC-krets er

$$\begin{aligned} I_0(\omega) &= Q_0(\omega)\,\omega \\ &= \frac{\frac{V_0}{L}\omega}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2}} \\ &= \underline{\frac{\frac{V_0}{L}\omega}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(\frac{R}{L}\omega\right)^2}}} \end{aligned}$$

Ettersom frekvensen på den påtrykte spenningen også er $\omega = \omega_0$,forenkles uttrykket for strømamplituden:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\frac{V_0}{L}\omega}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(\frac{R}{L}\omega\right)^2}} \\ &= \frac{\frac{V_0}{L}\omega}{\frac{R}{L}\omega} && (\text{Her er } \omega = \omega_0) \\ &= \frac{V_0}{R} \\ &= \frac{12\,\mathrm{V}}{10\,\Omega} \\ &= \underline{\underline{1,2\,\mathrm{A}}} \end{aligned}$$