Eksamen i fag TFY4106
Fysikk, den 5/12 – 2008.

Forslag til løsning

Oppgave 1

a) Impulsbevarelse i støtet innebærer

$$mv = (m+M)v_e$$

$$v_e = \frac{m}{m+M}v.$$

Kinetisk energi etter støtet

$$K = \frac{1}{2}(m+M)v_e^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v^2.$$

Etter støtet går kinetisk energi over til potensiell energi

$$U = (m+M)gh$$

Med $U = K$ finner en dermed

$$(m+M)gh = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v^2$$

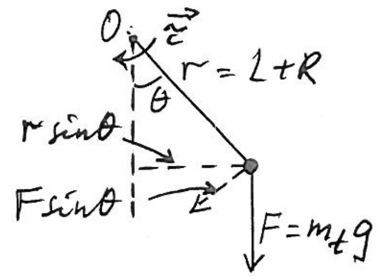
$$h = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 v^2.$$

b) Treghetsmomentet kan bestemmes med Steiners sats. Tyngdepunktet har avstanden R+L fra opphengningspunktet og massen er $m_t = m+M$.

$$I_t = I_0 + I = m_t r^2 + I = (m+M)(L+R)^2 + I.$$

Dreiemomentet er gitt ved (se fig. neste side)

$$\tau = rF\sin\theta = r(F\sin\theta) \underset{evt}{=} (r\sin\theta)F$$



$$\tau = (m+M)(L+R)g\sin\theta$$

$$\approx (m+M)(L+R)g\,\theta.$$

Newtons 2. lov for rotasjon gir

$$I_t\ddot{\theta} = -\tau = -(m+M)(L+R)g\,\theta.$$

Dette er likningen for en harmonisk oscillator ($\theta \to x$, $I_t \to m$, $(m+M)(L+R)g \to k$).
Sirkelfrekvensen blir dermed

$$\omega = \sqrt{\frac{(m+M)(L+R)g}{(m+M)(L+R)^2 + I}}.$$

Oppgave 2.

a) Frekvensen bilen mottar ($u_r = v$, $u_s = 0$)

$$f_b = f_s\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

Frekvensen radaren mottar

$$f_r = f_b\left(1+\frac{v}{c}\right) = f_s\left(1+\frac{v}{c}\right)^2 \approx f_s\left(1+\frac{2v}{c}\right)$$

Frekvensendring

$$\Delta f = f_r - f_s = f_s\frac{2v}{c} = 2\frac{v}{\lambda}$$

der $f_s\lambda = c$.

Dette gir farten

$$v = \frac{1}{2}\lambda \cdot \Delta f = \frac{1}{2}\, 0{,}06\,\mathrm{m} \cdot 800\,\mathrm{s}^{-1} = \underline{\underline{24\,\mathrm{m/s}}} = \underline{\underline{86{,}4\,\mathrm{km/h}}}.$$

b) Vinkelfrekvensen er $\omega = 2\pi f$.
Bølgehastigheten er $c = \frac{\omega}{k}$ slik at bølgetallet blir

$$k = \frac{\omega}{c} = 2\pi\frac{f}{c} = 2\pi \cdot \frac{60\,\mathrm{s}^{-1}}{250\,\mathrm{m}} = \pi \cdot 0{,}48\,\mathrm{m}^{-1} = \underline{\underline{1{,}51\,\mathrm{m}^{-1}}}.$$

Effekten er proporsjonal med kvadratet av amplituden, dvs $P = \text{konst} \cdot A^2$. Følgelig

$$\frac{P}{A_1^2} = \frac{P_0}{A_0^2} \;(= \text{konst})$$

$$P A_0^2 = P_0 A_1^2$$

$$A_1 = A_0\sqrt{\frac{P}{P_0}} = A_0\sqrt{\frac{3{,}6 P_0}{P_0}} = \underline{\underline{1{,}90\, A_0}}.$$

Oppgave 3

a) Langs adiabaten gjelder

$$T_1 p_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T_3 p_2^{(1-\gamma)/\gamma}$$

$$T_3 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 300\,\mathrm{K} \cdot 5{,}0^{0{,}4/1{,}4} = \underline{\underline{475\,\mathrm{K}}} = \underline{\underline{202\,^\circ\mathrm{C}}}.$$

Arbeidet langs isotermen

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = RT_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = RT_1 \Big|_{V_1}^{V_2} \ln V = \underline{\underline{RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}}}$$

$$= -RT_1 \ln\frac{V_1}{V_2} = -8{,}314\,\mathrm{J/K}\; 300\,\mathrm{K}\, \ln 5{,}0 = \underline{\underline{-4{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{J}}}.$$

Langs adiabaten er det ingen varmeutveksling, dvs. $dQ = 0$. Entropiforskjellen mellom punktene 3 og 1 er derfor

$$\Delta S_{31} = \underline{\underline{0}}.$$

b) Tilført varmemengde mellom punktene 2 og 3 (ved konstant trykk)

$$Q_t = \underline{\underline{C_p(T_3 - T_1)}} = \underline{\underline{\frac{\gamma}{\gamma-1}R(T_3 - T_1)}}.$$

Den avgitte varmen må være lik arbeidet langs isotermen (da $Q = \Delta U + W$ og $\Delta U = 0$ for ideell gass med $T = \text{konst}$). Følgelig

$$Q_a = \underline{\underline{W}} = \underline{\underline{-\frac{\gamma}{\gamma-1}RT_1 \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right)}}.$$

Ved omløp er indre energi uendret.
Netto arbeid er derfor $W_n = Q_t + Q_a$.
Virkningsgraden blir dermed

$$\eta = \frac{W_n}{Q_t} = 1 + \frac{Q_a}{Q_t} = 1 - \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} R T_1 \ln \frac{T_3}{T_1}}{\frac{\gamma}{\gamma-1} R (T_3 - T_1)}$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{T_1}{T_3 - T_1} \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right).}}$$

Oppgave 4.

a) Spenning over motstanden: $V_R = RI$

Spenning over induktansen: $V_L = L \frac{dI}{dt}$

Differensiallikningen for I blir dermed

$$\underline{\underline{L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}.}}$$

Løsningen er gitt ved

$$I = A + B e^{-t/\tau}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{B}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Setter dette inn i differensiallikningen og får

$$-L \frac{B}{\tau} e^{-t/\tau} + RA + RBe^{-t/\tau} = \mathcal{E}.$$

Dette skal holde for alle tider. Følgelig

$$AR = \mathcal{E}$$

$$A = \underline{\underline{\mathcal{E}/R.}}$$

$$B(R - L/\tau) = 0$$

$$\tau = \underline{\underline{L/R.}}$$

Grensebetingelsen $I(0) = 0$ innebærer $A + B = 0$ slik at

$$B = -A = -\underline{\underline{\mathcal{E}/R.}}$$

$$I(t) = \underline{\underline{\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right).}}$$

b) Total strømstyrke innenfor radien $r < R$

$$I(r) = \int j(r)\, dA = \int_0^r j(u) \cdot 2\pi u\, du = \frac{2I_0}{\pi R^2} 2\pi \int_0^r \left[1 - \left(\frac{u}{R}\right)^2\right] u\, du$$

$$= \frac{4I_0}{R^2} \Big|_0^r \left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}\frac{u^4}{R^2}\right) = \underline{\underline{I_0 \left[2\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right].}}$$

Legger sirkel om sentrum og benytter Ampères lov der $I_i = I(r)$.

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_i$$

$$2\pi r B = \mu_0 I(r)$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(r) = \underline{\underline{\begin{cases} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\left[2\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right], & r < R \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} & r > R. \end{cases}}}$$