Eksamen i fag TFY4106
Fysikk, den 6/8 - 2009

(1)

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) Sentripetalakselerasjonen er gitt ved $a_r = (-v^2/r =) -\omega^2 r$ slik at kraftbalansen blir

$$F = G\frac{M_1 M_2}{r^2} = M_1 \omega^2 r.$$

Vinkelhastigheten for jordrotasjonen er så

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Satelittmassen M_1 kan forkortes bort, og ved innsetting for ω finner en så

$$\frac{GM_2}{r^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$GM_2\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = r^3$$

$$r = \left[GM_2\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\right]^{1/3} = \left[6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\,s^2}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}kg \times\left(\frac{24\cdot 60\cdot 60s}{2\pi}\right)^2\right]^{1/3} = 4{,}223\cdot 10^7 = \underline{42230\,km}$$

Høyden over jordoverflata for geostasjonær satelitt

$$h = r - R = (42230 - 6370)km = \underline{\underline{35860 km.}}$$

(2)

b) I høyeste og laveste punkt i banen beveger satelitten seg normalt på radien ut fra sentrum. Dermed har en $L = |\vec{L}| = |\vec{r}\times\vec{p}| = rp\sin\theta = rp = M_1 r v$ der v er hastigheten til satelitten. ($\sin\theta = 1$ med $\theta = 90°$).
Bevarelse av dreieimpuls innebærer dermed ($L_1 = L_2$)

$$r_2 v_2 = r_1 v_1$$

slik at satelittens banehastighet i det laveste punktet blir

$$v_2 = v_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = v_1\frac{h_1+R}{h_2+R} = 3470\,m/s\,\frac{25000+6370}{22000+6370}$$

$$= \underline{\underline{3840\,m/s.}}$$

Oppgave 2.

a) Frekvensen bilen mottar ($u_r = v$, $u_s = 0$)

$$f_b = f_s\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

Frekvensen radaren mottar

$$f_r = f_b\left(1+\frac{v}{c}\right) = f_s\left(1+\frac{v}{c}\right)^2 \approx f_s\left(1+\frac{2v}{c}\right)$$

Frekvensendring

$$\Delta f = f_r - f_s = f_s\frac{2v}{c} = 2\frac{v}{\lambda}$$

der $f_s\lambda = c$.

Dette gir farten

$$v = \frac{1}{2}\lambda \cdot \Delta f = \frac{1}{2}\, 0{,}07\,\mathrm{m} \cdot 700\,\mathrm{s}^{-1} = 24{,}5\,\mathrm{m/s} = \underline{\underline{88{,}2\,\mathrm{km/h}}}.$$

b) Den stående bølgen kan skrives som

$$y = A[\sin(kx-\omega t) + \sin(kx+\omega t)] = \underline{2A \sin kx \cos \omega t}.$$

Derivering gir så

$$y' = 2Ak \cos kx \cos \omega t.$$

Ved $x=0$ er grensebetingelsen alltid oppfylt (dvs. $y=0$). Kravet $y'=0$ ved $x=L$ er oppfylt dersom

$$\cos kL = 0,$$

som har løsning

$$kL = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$k = k_n = \underline{\underline{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{L}}}$$

der n er heltall (≥ 0).

Dersom kun det ene endepunktet ligger i ro må en ha $n=0$. Bølgelengden til en slik svigning er følgelig

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_0} = \underline{\underline{4L.}}$$

Oppgave 3.

a) Siden ikke all isen smelter, vil sluttemperaturen bli $T_s = 0°C$. Avgitt varme fra vannet blir følgelig

$$Q_v = C_v m_v (T_v - T_s)$$

der massen av 3,5 l vann er $m_v = 3{,}5\,\mathrm{kg}$.
Opptatt varme i isen blir tilsvarende

$$Q_{is} = C_{is}\, m_{is}\,(T_s - T_{is})$$

Forskjellen i varmemengde brukes til å smelte is slik at

$$Q_v - Q_{is} = L_{is}\,\Delta m_{is}$$

$$\Delta m_{is} = \frac{Q_v - Q_{is}}{L} = \frac{C_v m_v (T_v - T_s) - C_{is} m_{is} (T_s - T_{is})}{L}$$

$$= \frac{4{,}18\,\mathrm{kJ/(kg\cdot K)} \cdot 3{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 35\,\mathrm{K} - 2{,}0 \cdot 2{,}5 \cdot 15\,\mathrm{kJ}}{334\,\mathrm{kJ/kg}} = \underline{\underline{1{,}31\,\mathrm{kg}.}}$$

b) For en ideell gass er indre energi uavhengig av temperaturen, dvs. $U(T,V) = U(T)$. Følgelig mellom punktene 1 og 2 på isotermen

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \underline{\underline{0.}}$$

Med ideell gass blir arbeidet

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = RT_2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_2 \Big|_{V_1}^{V_2} \ln V = \underline{\underline{RT_2 \ln(V_2/V_1).}}$$

Da $\Delta U_{12} = 0$ blir tilført varme

(NB! T_1 og T_2 er ombyttet på gitt figur i forhold til oppgitt W_{34}.)

$$Q_t = \Delta U_{12} + W_{12} = \underline{W_{12}}.$$

Avgitt varme blir tilsvarende

$$Q_a = W_{34} = -\frac{T_1}{T_2} W_{12} = \underline{-\frac{T_1}{T_2} Q_t}.$$

For et helt omløp er endring i indre energi lik 0 slik at netto arbeid blir $W_n = Q_t + Q_a$.

Virkningsgraden blir følgelig

$$\eta = \frac{W_n}{Q_t} = \frac{Q_t + Q_a}{Q_t} = 1 + \frac{Q_a}{Q_t} = \underline{\underline{1 - \frac{T_1}{T_2}}}.$$

Oppgave 4.

a) Spenning over motstanden: $V_R = RI = R\frac{dQ}{dt}$.

Spenning over kapasitansen: $V_c = \frac{1}{C} Q$,

Differensiallikningen for Q blir dermed

$$\underline{\underline{R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = \mathcal{E}.}}$$

Løsningen er gitt ved

$$Q = A + Be^{-t/\tau}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{B}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Setter dette inn i differensiallikningen og får

$$-R\frac{B}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{A}{C} + \frac{B}{C}e^{-t/\tau} = \mathcal{E}.$$

Dette skal holde for alle tider, Følgelig

$$A/C = \mathcal{E}$$

$$A = \underline{\underline{C\mathcal{E}.}}$$

$$B(-R/\tau + 1/C) = 0$$

$$\tau = \underline{RC.}$$

Grensebetingelsen $Q(0) = 0$ innebærer $A + B = 0$ slik at

$$B = -A = -\underline{C\mathcal{E}.}$$

$$Q(t) = \underline{\underline{C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau})}}.$$

b) Total strømstyrke innenfor radien $r < R$

$$I(r) = \int j(r)\,dA = \int_0^r j(u)\cdot 2\pi u\,du = \frac{3I_0}{\pi R^2} 2\pi \int_0^r \left[1 - \frac{u}{R}\right] u\,du$$

$$= \frac{6I_0}{R^2}\left|_0^r \left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}\frac{u^3}{R}\right) = \underline{\underline{I_0\left[3\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^3\right].}}\right.$$

Legger sirkel om sentrum og benytter Ampères lov der $I_i = I(r)$

$$\oint \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I_i$$

$$2\pi r B = \mu_0 I(r)$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(r) = \underline{\underline{\begin{cases} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\left[3\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^3\right], & r < R \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}, & r > R. \end{cases}}}}$$