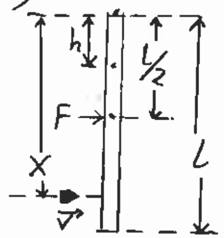
Eksamen i fag TFY4106
Fysikk, 20/8 – 2010.

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a)



Treghetsmomentet om tyngdepunktet til staven er gitt ved

$$I_L = \frac{1}{12} M L^2$$

Aksen i avstand h fra enden har avstanden

$$\frac{L}{2} - h$$

fra tyngdepunktet. Med Steiners sats blir da treghetsmomentet

$$I_h = I_L + M\left(\frac{L}{2} - h\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3} M L^2 - MhL + Mh^2.}}$$

Dreiemomentet til krafta F

$$\tau = F\left(\frac{L}{2} - h\right)$$

Bevegelseslikningen for rotasjon

$$I_h \alpha = \tau$$

som gir vinkelakselerasjonen

$$\alpha = \frac{\tau}{I_h} = \underline{\underline{\frac{F(L/2 - h)}{\frac{1}{3} M L^2 - MhL + Mh^2}.}}$$

b) Dreieimpulsen er gitt ved $\vec{L} = m(\vec{v} \times \vec{r})$.
Med $\vec{v} \perp \vec{r}$ blir dreieimpulsen til kula

$$L = \underline{\underline{mvx.}}$$

Når kula treffer er dreieimpulsen bevart. Dreieimpulsen til bjelken etter at den er truffet er $L = I\omega$. Vinkelhastigheten blir dermed

$$I\omega = mvx$$

$$\omega = \frac{mvx}{\frac{1}{3} M L^2} = \underline{\underline{\frac{3mvx}{ML^2}}} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot 200\,\mathrm{m/s} \cdot 1{,}0\,\mathrm{m}}{2{,}5\,\mathrm{kg} \cdot (1{,}2\,\mathrm{m})^2}$$

$$= \underline{\underline{0{,}83\ \mathrm{s}^{-1}.}}$$

c) Bevegelsesmengden til kula er $p = mv$. Denne overføres til bjelken som får bevegelsesmengden MV. ($m \ll M$) slik at

$$MV = mv$$

$$V = \frac{m}{M} v$$

når $F_s = 0$. Nå er V hastigheten til massefellespunktet i avstand $L/2$ fra enden. Dersom enden skal ligge i ro må dette tilsvare en rotasjon med vinkelhastighet

$$\omega_1 = \frac{V}{L/2} = \frac{2mv}{ML}.$$

Med $F_s = 0$ må en ha $\omega_1 = \omega$ slik at

$$\frac{2mv}{ML} = \frac{3mvx}{ML^2}$$

$$x = \underline{\underline{\frac{2}{3} L.}}$$

Oppgave 2.

a) Når massen henger i ro vil kraften fra fjæra motvirke tyngdekrafta slik at $(y=0)$

$$-a(-y_0) = Mg$$

$$y_0 = \frac{Mg}{a} = \frac{10\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}{400\,\mathrm{N/m}} = \underline{\underline{24{,}5\,\mathrm{cm}}}$$

Bevegelseslikningen er $M\ddot{y} = -ay - b\dot{y}$ (da $(ay_0 = Mg)$) slik at med $\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y$ har en

$$\underline{\underline{\delta = \frac{b}{2M}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{M}}}}.$$

b) Massen M starter i posisjonen $y = y_0$ med hastighet $\dot{y} = 0$. Med den gitte bevegelsen gir dette likningene (for $t=0$)

$$y = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t + \varphi) = A\cos\varphi = y_0$$

$$\dot{y} = \left[-\delta\cos(\omega_d t + \varphi) - \omega_d\sin(\omega_d t + \varphi)\right]Ae^{-\delta t}$$

$$= (-\delta\cos\varphi - \omega_d\sin\varphi)A = 0$$

Fra den siste likninga finner en så for vinkelen φ

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\delta}{\omega_d} = -\frac{\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = -\frac{0{,}8\,\omega_0}{\sqrt{1 - 0{,}8^2}\,\omega_0} = -\frac{4}{3}.$$

$$\varphi = \underline{\underline{-53^\circ}} \; (= -0{,}93\,\mathrm{rad}).$$

Fra den første likninga finner en så for forholdet A/y_0

$$\frac{A}{y_0} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos(53^\circ)} = \underline{\underline{1{,}67}}$$

$$\left[\text{Evt. } \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \sqrt{1 + \left(-\tfrac{4}{3}\right)^2} = \tfrac{5}{3} \approx 1{,}67\right]$$

c) Bølgen kan beskrives ved

$$\underline{\underline{y = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \varphi\right].}}$$

Ved tiden $t=0$ og posisjonen $x=0$ har en

$$y = y_1 = A\sin\varphi.$$

Ved tiden $t = t_2$ har en så

$$y = y_2 = A\sin\left(-\frac{2\pi}{\lambda}ct_2 + \varphi\right).$$

Fra første likning finner en fasevinkelen

$$\sin\varphi = \frac{y_1}{A} = \frac{6{,}0}{12{,}0} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \underline{\underline{30^\circ}} = \underline{\underline{\pi/6}} \left(< \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right),$$

slik at

$$y_2 = 12{,}0\,\mathrm{cm}\cdot\sin\left(-\frac{2\pi}{18\,\mathrm{m}}5\,\mathrm{m/s}\cdot 3{,}0\,\mathrm{s} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 12{,}0\,\mathrm{cm}\,\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \underline{\underline{12{,}0\,\mathrm{cm}.}}$$

$$\left[-\tfrac{3}{2}\pi\,\mathrm{rad} = -270^\circ,\ \sin(-270^\circ) = \sin 90^\circ = 1.\right]$$

Oppgave 3

a) Smelting av isen og oppvarming av smeltevannet krever varmen eller energien

$$Q_{is} = m_{is} L + m_{is} C(T_s - T_0)$$

der $T_0 = 0°C$ er smeltepunktet. Avgitt varme fra vannet er tilsvarende

$$Q_v = m_v C(T_v - T_s)$$

der massen av 3,5 l vann er $m_v = 3{,}5\,kg$.
Energibevarelse bestemmer da sluttemperaturen

$$m_{is} L + m_{is} C(T_s - T_0) = m_v C(T_v - T_s)$$

$$T_s = \frac{m_v C T_v + m_{is}(C T_0 - L)}{(m_{is} + m_v) C} =$$

$$\frac{(3{,}5 \cdot 35 + 0{,}5 \cdot 0) \cdot 4{,}18 - 0{,}5 \cdot 334}{(0{,}5 + 3{,}5) \cdot 4{,}18}\,°C = \underline{20{,}6°C} \approx \underline{\underline{21°C}}.$$

b) Langs adiabaten gjelder

$$T_1 p_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T_3 p_2^{(1-\gamma)/\gamma}$$

$$T_3 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 300K \cdot 5{,}0^{0{,}4/1{,}4} = \underline{475K} = \underline{\underline{202°C}}$$

Arbeidet langs isotermen

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_1 \Big|_{V_1}^{V_2} \ln V = \underline{\underline{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}}$$

$$= 8{,}314\,J/K \cdot 300K \ln\left(\frac{1}{5{,}0}\right) = \underline{\underline{-4{,}0 \cdot 10^3 J.}}$$

Langs adiabaten er det ingen varmeutveksling, dvs. $dQ = 0$. Entropiforskjellen mellom punktene 3 og 1 er derfor

$$\Delta S_{31} = \underline{\underline{0.}}$$

c) Den tilførte varmemengden mellom punktene 2 og 3 (ved konstant trykk)

$$Q_t = \underline{C_p(T_3 - T_1)} = \underline{\underline{\frac{\gamma}{\gamma-1} R(T_3 - T_1).}}$$

Den avgitte varmen må være lik arbeidet langs isotermen (da $Q = \Delta U + W$ og $\Delta U = 0$ for ideell gass med $T = konst$). Følgelig

$$Q_a = \underline{\underline{W}} = \underline{\underline{-\frac{\gamma}{\gamma-1} RT_1 \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right).}}$$

Ved et omløp er indre energi uendret.
Netto arbeid er derfor $W_n = Q_t + Q_a$.
Virkningsgraden blir dermed

$$\eta = \frac{W_n}{Q_t} = 1 + \frac{Q_a}{Q_t} = 1 - \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} RT_1 \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right)}{\frac{\gamma}{\gamma-1} R(T_3 - T_1)}$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{T_1}{T_3 - T_1} \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right).}}$$