Løsningsforslag eksamen TFY4106 18 des 2013

Inst for fysikk, NTNU

Oppgave 1

a) Total mekanisk energi er bevart når sylinderne ruller ned skråplanet fordi det kun er konservative krefter som virker. Den totale mekaniske energi ved en gitt høyde *h* er gitt ved kinetisk energi knyttet til translasjon ($\frac{1}{2}mv^2$, hvor m er masse og v hastighet), rotasjon ($\frac{1}{2}I\omega^2$, hvor I er treghetsmoment og ω er rotasjonshastighet) og potensiell energi (*mgh*):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh$$

For både den hule og den massive sylinderen, vil den totale mekaniske energi være den samme i startposisjon på skråplanet og ved enden. Bruker indeks 0 for start og e for egenskapene ved enden av skråplanet. Får da (for hver av sylinderne):

$$\frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_e^2 + \frac{1}{2}I\omega_e^2 + mgh_e$$

Siden h_0 er målt relativt h_e er h_e= 0. Videre er initialhastigheter for begge sylindre lik 0, v_0=0, ω_0=0 (de er i ro). Dette gir:

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_e^2 + \frac{1}{2}I\omega_e^2$$

Relasjon mellom translasjonshastighet v og rotasjon ω er gitt ved ω=v/r siden sylinderne ruller uten å skli. Får da:

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_e^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_e^2}{r^2}$$

Løst mhp slutthastighet:

$$v_e = \sqrt{\frac{2mgh_0}{m + I/r^2}}$$

Ser nå på treghetsmomentet for de to type sylinderne for å kunne beregne slutthastigheten:

For hul sylinder er $I_h = m_h r_h^2$ (indeks h for hul), og slutthastighet blir:

$$v_{e,h} = \sqrt{\frac{2m_h gh_0}{m_h + m_h r_h^2/r_h^2}} = \sqrt{\frac{2m_h gh_0}{m_h + m_h}} = \sqrt{gh_0}$$

For massiv sylinder er $I_s = \frac{1}{2}m_s r_s^2$ (indeks s for «solid»), og slutthastighet blir

$$v_{e,s} = \sqrt{\frac{2m_s gh_0}{m_s + m_s r_s^2/2r_s^2}} = \sqrt{\frac{2m_s gh_0}{m_s + m_s/2}} = \sqrt{4gh_0/3} = 1.15\sqrt{gh_0}$$

Massiv sylinder kommer først fram til enden siden den har størst hastighet ved enden.

b) Før kollisjonen er stanga i ro, og det er kun prosjektilet som har kinetisk energi, moment og spinn om aksen A:

$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad p_0 = mv_0$ og $L_0 = mv_0 \;\; d/2$

c) I et fullstendig uelastisk støt er ikke mekanisk energi bevart. Under kollisjonen vil det virke ei kraft fra opplagringsaksen på staven. Derfor er ikke bevegelsesmengde bevart. Den ytre krafta som virker i opplagringsaksen har null arm om opplagringsaksen A. Siden denne krafta virker gjennom A, har den null arm, og dermed er kraftmomentet null. Dette gjør at spinnet om aksen A til systemet er bevart. Det er ikke tilstrekkelig tid til at fjæra blir komprimert i løpet av støtet, derfor er det heller ikke noe kraftmoment fra denne. Etter kollisjonen gjelder følgende sammenheng mellom spinn L og rotasjon av stanga:

$$L = I\omega$$

Hvor I er treghetsmomentet til stanga (med kula) og ω er vinkelhastigheten. Bevaring av spinn, og innsatt uttrykket for treghetsmoment til stanga, oppnås:

$L_0 = L$; => $v_0 \;\; d/2 = \frac{1}{12}Md^2\omega$

Vinkelhastigheten til stanga blir:

$$\omega = \frac{6mv_0}{Md}$$

Den totale mekaniske energien til systemet rett etter kollisjonen er den kinetiske energien til stanga (med kula) knyttet til rotasjonen:

$E_1 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{12}Md^2\left(\frac{6mv_0}{Md}\right)^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2\left(\frac{3m}{M}\right)$

Med M = 100m, blir:

$$E_1 = \frac{1}{2}m{v_0}^2\left(\frac{3m}{M}\right) \quad = E_0\left(\frac{3m}{100m}\right) \quad = \frac{3}{100}E_0$$

Dvs., 97% av den mekaniske energien går tapt i den uelastiske kollisjonen.

Oppgave 2

a) Nettokraften som virker på massen er summen av fjærkraften, kraften knyttet til friksjon og den eksterne kraften:

$$-kx - b\dot{x} + F$$

Nettokraften gir opphav til akselerasjon av massen i følge Newtons 2.lov:

$$-kx - b\dot{x} + F = M\ddot{x}$$

Omorganisert:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F$$

som skulle vises.

Med ytre kraft gitt som en harmonisk kraft: $F = F_0 \sin(\omega t)$, hvor F_0 er amplituden til kraften, innsatt i differensial likningen over, gir:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

Deler på M:

$$\ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = \frac{F_0}{M}\sin \omega t$$

sammenlikning med:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \text{a} \sin\omega t$$

gir følgende relasjoner:

$$\delta = \frac{b}{2M}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}; \text{ og } a = F_0/M$$

Utsagnet: «Systemet i Figur 3 med *M* = 0.2 kg, *k*=30 N/m, *b*=2 Ns/m holdes i ro med en konstant kraft *F* = 3N. Kraften slippes ved *t*=0» gjør at vi har en beskrivelse av et svingesystemet med initialverdier. Utsagnet tilsier at systemet har er i ro og har et utsving x_0 gitt ved balanse av ekstern kraft og fjærkraft:

$$x(t = 0) = \frac{F}{k} = \frac{3\ N}{30\ N/m} = 0.1\ m$$

Etter at krafta er slipt ved t=0, følger massen bevegelsen til en dempet svingning. Løsningen er på formen:

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t + \varphi)$$

Hvor A er en konstant, δ er som gitt over, ω_d er vinkelfrekvens til den dempede svingningen, gitt ved

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \delta^2}$$

og φ en fase. Numeriske verdier:

$$\omega_0 = \sqrt{k/M} = \sqrt{\frac{30\,N/m}{0.2\,kg}} = \sqrt{150 s^{-2}} = 12.24\, s^{-1}$$

$$\delta = \frac{b}{2M} = \frac{2Ns/m}{2\cdot 0.2kg} = 5s^{-1}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \delta^2} = \sqrt{150\, s^{-2} - 25s^{-2}} = 11.18 s^{-1}$$

Verdiene av konstanten A og fase φ må bestemmes for å kunne svare på spørsmålet. Disse oppnås ved å se på startverdiene av x(t) og dx/dt ved t= 0 (den siste er lik null siden massen holdes med konstant kraft før den slippes ved t=0:

$$x(t = 0) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t + \varphi)\Big|_{t=0} = A\cos\varphi = \frac{F}{k} = 0.1m$$

$$dx/dt = -\delta A e^{-\delta t}\cos(\omega_d t+\varphi) - \omega_d A e^{-\delta t}\sin(\omega_d t+\varphi)$$

$$dx/dt\big|_{t=0} = 0 = -\delta A\cos\varphi - \omega_d A\sin\varphi$$

Denne har to løsninger: enten A=0 eller $\tan\varphi = -\dfrac{\delta}{\omega_d}$

Den matematiske løsningen A=0 gir null amplitude for alle t, og av den grunn er den ikke interessant.

Den andre gir: $\varphi = \arctan\left(-\dfrac{\delta}{\omega_d}\right) = -0.42\,radianer$ og $A = \dfrac{F}{k\cos\varphi} = \dfrac{0.1m}{0.913} = 0.11m$

Utsving og utsvingshastighet ved t=0.5 s:

$x(t = 0.5s) = 0.004m$;

$dx/dt = -\delta A e^{-\delta t}\cos(\omega_d t+\varphi) - \omega_d A e^{-\delta t}\sin(\omega_d t+\varphi)$ ved t=0.5s er 0.07 m/s

Oppgave 2b

Frekvensen som observatøren registrerer, f_0, er gitt ved:

$$f_0 = \frac{1 - v_0/v}{1 - v_s/v} f_s = \frac{v - v_0}{v - v_s} f_s$$

Her er v bølgehastighet, v_0 hastighet til observatør, v_s hastighet til kilde (sender) og f_s frekvens som kilde sender ut. Det er fire mulige relative bevegelser av kilde og observatør når de beveger seg langs samme linje. Disse og de frekvenser som observatøren registrer er:

Kilde v_s = +60 m/s, observatør , v_0=30 m/s og kilde nærmer seg observatør.

$$f_0 = \frac{v - v_0}{v - v_s} f_s = \frac{340 - 30}{340 - 60} 500Hz = 533Hz$$

Kilde v_s = -60 m/s, observatør , v_0=-30 m/s og kilde fjerner seg fra observatør:

$$f_0 = \frac{v - v_0}{v - v_s} f_s = \frac{340 - (-30)}{340 - (-60)} 500Hz = 462Hz$$

Kilde v_s = 60 m/s, observatør , v_0=-30 m/s og kilde og observatør beveger seg mot hverandre:

$$f_0 = \frac{v - v_0}{v - v_s} f_s = \frac{340 - (-30)}{340 - 60} 500Hz = 660Hz$$

Kilde v_s = -60 m/s, observatør , v_0=30 m/s og kilde og observatør beveger seg fra hverandre:

$$f_0 = \frac{v - v_0}{v - v_s} f_s = \frac{340 - 30}{340 - (-60)} 500Hz = 387Hz$$

Oppgave 2c

Bølgehastighet og retning til de vandrende bølgene beskrevet ved bølgefunksjonene:

$y_1(x,t) = A\sin\left[k\left(x + (34m/s)t\right)\right]$, og $y_2(x,t) = Be^{k[x-(20m/s)t]}$,

finnes ved å se på betingelsene y = konstant. Dette gir:

for y_1 : $k(x + (34m/s)t) = konst$. Deriver med hensyn på t og forkort med k: $\frac{dx}{dt} + 34\,m/s = 0$

$\frac{dx}{xt} = v$ = -34 m/s mot venstre (negativ x)

For y_2: (viser fremgangsmåte hvor vi ser på y_2 direkte, uten å argumentere for at vi kan se på eksponenten):

$$y_2(x,t) = Ae^{k[x-(20m/s)t]} = konst$$

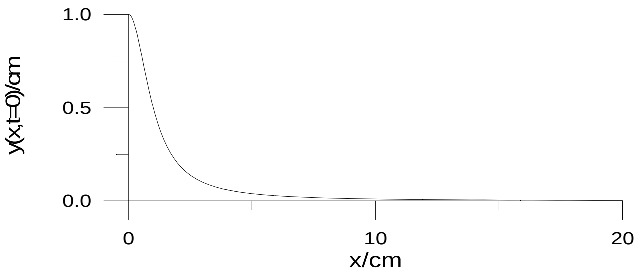
Deriverer med hensyn på t og setter lik 0: $\frac{dy_2}{dt} = Ae^{k[x-(20m/s)t]}\left(k(\frac{dx}{dt} - 20m/s)\right) = 0$

dvs., v = 20 m/s mot høyre (positiv x) for y_2

Det er her valgt å vise fremgangsmåten fullt ut for å finne v. Begge bølgefunksjonene er av formen $y(x,t) = f(t - \frac{x}{v})$ (for bølge i positiv x-retning) og bølgehastigheten kan også ses direkte fra denne sammenhengen.

Bølgepulsen $y_3(x,t) = \frac{D^3}{D^2 + (x - vt)^2}$, D = 1.0 cm og v = 20 m/s

i)



Ut fra ligningen finner en at maksimum i y inntrer når x=vt. Maksimalverdien er y_{max} = D. For x = x_1 gir dette tiden t_1: $t_1 = x_1 / v = \frac{0.04\,\mathrm{m}}{20\mathrm{m/s}} = 2 \cdot 10^{-3}\mathrm{s} = 2\,\mathrm{ms}$

Ligningen for utslag redusert til 50% av maks ved x_1, t_2 finnes ved innsetting i $y_3(x,t)$:

$$y_3(x_1,t_2) = \frac{D^3}{D^2 + (x_1 - vt_2)^2} = \frac{D}{2}$$

Dette gir: $\dfrac{1}{1+\left(\frac{x_1-vt_2}{D}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$ eller: $x_1 - vt_2 = \pm D$; $t_2 = \dfrac{x_1 \pm D}{v}$

Innsatt med de numeriske tallene fås to løsninger for t_2: 1.5 ms og 2.5 ms. Det er den siste av disse som er > t_1, og svaret er: $\underline{\underline{t_2 = 2.5 \text{ ms}}}$

Oppgave 3a

Den totale varmestrømmen gjennom treveggen, tykkelse 5 cm er:

$$I = \lambda_{tre} \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{t_{tre}}$$

hvor λ_{tre} er varmeledningsevnen for tre, A, det totale areal, ΔT er temperaturdifferanse mellom ut- og innside og t_{tre} tykkelse av trelaget. Innsatt med numeriske verdier oppnår vi:

$$I = \lambda_{tre} \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{t_{tre}} = 0.080 W m^{-1} K^{-1} 110 m^2 \frac{25K}{0.05m} = 4400W = 4.4kW$$

Etter at treveggen er isolert: Temperaturen i grenseflaten mellom tre og isolasjonslag innstiller seg slik at varmestrømmen blir den samme i de to lagene (med hver sin temperaturdifferanse):

$$I_2 = \lambda_{tre} \cdot A \cdot \frac{\Delta T_{tre}}{t_{tre}} = \lambda_{isol} \cdot A \cdot \frac{\Delta T_{isol}}{t_{isol}}$$

Hvor indeks isol for variablene gjelder for isolasjonsmaterialet. ΔT_{tre} og ΔT_{isol} er temperaturdifferansen over henholdsvis tre og isolasjonsmaterialet. Arealet er det samme for de to materialene. Varmestrømmen gjennom den isolerte veggen, I_2 kan beregnes ut fra et av uttrykkene over, men trenger å bestemme enten ΔT_{tre} eller ΔT_{isol} . Temperaturforskjellen over veggen er:

$$\Delta T = \Delta T_{tre} + \Delta T_{isol} = 25K$$

Løser likn i I_2 mhp ΔT_{tre} og setter inn i

$$\Delta T_{tre} = \Delta T_{isol} \cdot \frac{\lambda_{isol}}{\lambda_{tre}} \frac{t_{tre}}{t_{isol}}$$

$$\Delta T = \Delta T_{isol} \cdot \frac{\lambda_{isol}}{\lambda_{tre}} \frac{t_{tre}}{t_{isol}} + \Delta T_{isol} = \Delta T_{isol} \left(1 + \frac{\lambda_{isol}}{\lambda_{tre}} \frac{t_{tre}}{t_{isol}}\right) = 25K$$

Løst mhp ΔT_{isol} :

$$\Delta T_{isol} = \Delta T \left(1 + \frac{\lambda_{isol}}{\lambda_{tre}} \frac{t_{tre}}{t_{isol}}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{0.035}{0.08} \frac{0.05}{0.15}\right)^{-1} 25K = 21.8K$$

Dette gir varmestrøm

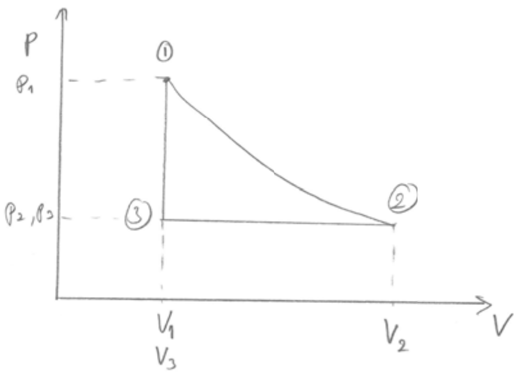
$$I_2 = \lambda_{isol} \cdot A \cdot \frac{\Delta T_{isol}}{t_{isol}} = 0.035 W m^{-1} K^{-1} 110 m^2 \frac{21.8 K}{0.15 m} = 560 W = 0.56 kW$$

(utregnet ut fra temperaturforskjellen over laget med tre i den isolerte veggen:)

$$I_2 = \lambda_{tre} \cdot A \cdot \frac{\Delta T_{tre}}{t_{tre}} = 0.08 W m^{-1} K^{-1} 110 m^2 \frac{3.2 K}{0.05 m} = 560 W = 0.56 kW$$

3b

Den ideell gassen med adiabatkonstant γ=5/3, ved volum 0.5m^3 og trykk 2 atm ved temperaturen 27 °C refereres til som tilstand 1. Dvs., V_1=0.5m^3 , p_1= 2 atm og T_1=(27+273.15) K = 300.15 K.



Figur til venstre skisserer prosessen som er beskrevet.

Adiabatisk prosess til tilstand 2 hvor V_2=1.2m^3. Siden dette er en adiabatisk prosess gjelder tilstandslikningen

$$T V^{\gamma-1} = \text{konstant}$$

i hele overgangen fra tilstand 1->2. For endepunktene av denne prosessen får vi:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

og løst mhp T_2:

$$T_2 = T_1 \left(V_1/V_2\right)^{\gamma-1} = 300.15 K \left(0.5/1.2\right)^{2/3} = 167.4 K$$

Komprimerer gassen ved en isobar prosess til startvolumet, til en tilstand vi kaller 3. Overgangen fra tilstand 2->3 er da karakterisert ved:

$$p_3 V_3 = p_2 V_1 = nRT_3 \qquad T_3 = \frac{p_2 V_1}{nR} = \frac{p_2 V_1}{p_2 V_2} T_2 = \frac{V_1}{V_2} T_2 = \frac{0.5}{1.2} 167.4 K = 69.7 K$$

Ved retur tilbake til tilstand 1 (isokor prosess), kommer en tilbake til temperaturen T_1.

Arbeidet som utføres i den sykliske prosessen er:

Fra tilstand 1 til 2: Adiabatisk prosess.

$$W_{1\to 2} = \frac{nR\left(T_2 - T_1\right)}{\gamma - 1} = 67.2 \text{ kJ}$$

Fra tilstand 2 til 3: pdV arbeide under konstant trykk:

$W_{2\to3} = -33$ kJ (trenger p_2 som er beregnet til 0.465 atm, og konverterin: 1 atm = 1.01 10^5 N/m^2)

For overgangen fra 3 tilbake til 1: ikke noe arbeid utføres.

Totalt arbeide:

$$W_{tot} = W_{1\to2} + W_{2\to3} = (67.2-33)kJ = 34.2kJ$$

Oppgave 3c.

Betrakter en ideell gass, dvs. $pV = nRT$ gjelder. Fra varmelærens 1. hovedsetning har vi:

$$dU = dQ - dW$$

Hvor U er indre energi, Q er varme og W arbeide. Definisjon av inkrementell endring av entropi:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Bruk av varmelærens 1. hovedsetning:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{dW}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{pdV}{T}$$

For aktuell gass med $U = \frac{3}{2}nRT$ og eliminering av T i leddet som kommer fra dW ved likning for ideell gass:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{pdV}{T} = \frac{\frac{3}{2}nRdT}{T} + \frac{nRT}{V}\frac{dV}{T} = nR\left(\frac{3}{2}\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V}\right)$$

Integrering av uttrykket for dS:

$$S = nR\left(\tfrac{3}{2}\ln T + \ln V\right) + S_0 = nR\left(\ln T^{3/2} + \ln V\right) + S_0 = nR\left(\ln\left(V\,T^{3/2}\right)\right) + S_0$$

Hvor S_0 er en konstant. Entropiforskjellen fra tilstanden (V_1,T_1) til (V_2,T_2) er gitt ved:

$$\begin{aligned}\Delta S &= S(2) - S(1) = nR\left(\ln\left(V_2\,T_2^{3/2}\right)\right) + S_0 - nR\left(\ln\left(V_1\,T_1^{3/2}\right)\right) - S_0 \\ &= nR\left(\ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{3}{2}\ln\frac{T_2}{T_1}\right)\end{aligned}$$