TFY4106 Eksamen 9 aug 2014. Løsningsforslag

Oppgave 1

a)

Når m_1 og m_2 er i ro er strekkraften i tauet som holder m_1 lik tyngdekraften:

$F_1 = m_1$

F_2 bestemmes ut fra at det totale dreiemomentet om aksen av trinsen er null når massen er i ro. Dvs:

$F_1 r_1 = F_2 r_2$ Dvs: $F_2 = F_1 \dfrac{r_1}{r_2} = m_1 g \dfrac{r_1}{r_2}$

Retningene: F_1 vertikal, F_2 horisontal.

Når systemet ikke er i ro, er sammenhengen mellom vinkelakselerasjon α og akselerasjon til hver av massene gitt ved:

$a_1 = r_1\alpha$ og $a_2 = r_2\alpha$

Kreftene blir da:

$F_1 = m_1(g - a_1) = m_1 g - m_1 r_1 \alpha$ og $F_2 = m_2 a_2 = m_2 r_2 \alpha$

Vinkelakselerasjonen er gitt ved netto dreiemoment til trinsa:

$I\alpha = F_1 r_1 - F_2 r_2 = m_1 g r_1 - m_1 r_1^2 \alpha - m_2 r_2^2 \alpha$

Løst mhp vinkelaksellerasjonen får en:

$$\alpha = \frac{m_1 g r_1}{I + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$$

b)

Endring i bevegelsesmengde til føreren angir impulsoverføring til føreren:

$$\vec{I} = \vec{p}_s - \vec{p}_i = m\vec{v}_s - m\vec{v}_i = m\left(\vec{v}_s - \vec{v}_i\right)$$

Hvor m angir masse, v hastighet, indeks s: slutt, og indeks i: initiell (før). Bruker vektornotasjon fordi det er nødvendig å se på endring i bevegelsesmengde både parallelt (x) og normalt på veggen (y). For x-og y retning:

$$I_x = m\left(v_{s,x} - v_{i,x}\right) = 80kg\left(50\,m/s\cos(-10^{\mathrm{O}}) - 70\,m/s\cos(30^{\mathrm{O}})\right) = -910 kgm/s$$

$$I_y = m\left(v_{s,y} - v_{i,y}\right) = 80kg\left(50\,m/s\sin(-10^{\mathrm{O}}) - 70\,m/s\sin(30^{\mathrm{O}})\right) = -3495 kgm/s$$

Total impuls

$$I = \sqrt{I_x^{\,2} + I_y^{\,2}} = 3616 kgm/s$$

Midlere kraft på føreren når kollisjonen varer 14 ms = 14 millisekund:

$$I = \int F dt = F_{av}\Delta t$$

Hvor F_{av} er midlere kraft og Δt er varighet av kollisjonen.

$$F_{av} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{3616 kgm/s}{14 \cdot 10^{-3} s} = 2.583 \cdot 10^5 N$$

(Denne kraften vil gi en akselerasjon større enn 300 ganger g, det er fatalt for føreren.)

c)
Total mekanisk energi er bevart når kula ruller ned skråplanet fordi det kun er konservative krefter som virker. Den totale mekaniske energi ved en gitt høyde *h* er gitt ved kinetisk energi knyttet til translasjon ($\frac{1}{2}mv^2$, hvor m er masse og v hastighet), rotasjon ($\frac{1}{2}I\omega^2$, hvor I er treghetsmoment og ω er rotasjonshastighet) og potensiell energi (*mgh*):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh$$

For kula vil den totale mekaniske energi være den samme i startposisjon på skråplanet og ved enden. Bruker indeks 0 for start og e for egenskapene ved enden av skråplanet. Får da

$$\frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_e^2 + \frac{1}{2}I\omega_e^2 + mgh_e$$

Siden h_0 er målt relativt h_e er h_e= 0. Videre er initialhastigheter for begge sylindre lik 0, v_0=0, ω_0=0 (de er i ro). Dette gir:

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_e^2 + \frac{1}{2}I\omega_e^2$$

Relasjon mellom translasjonshastighet v og rotasjon ω er gitt ved ω=v/r siden kula ruller uten å skli. Får da:

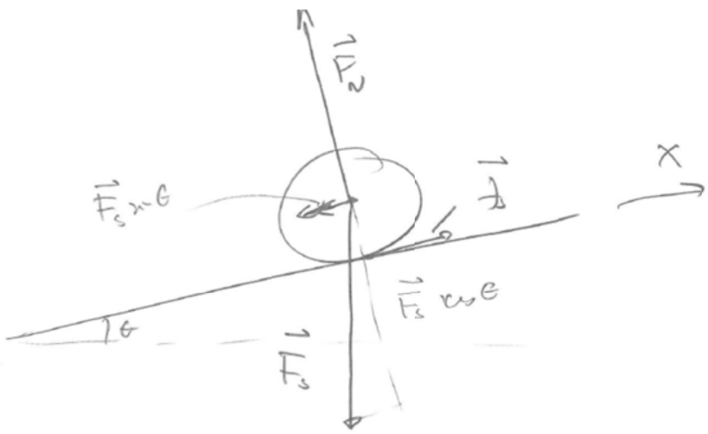
$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_e^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_e^2}{r^2}$$

Løst mhp slutthastighet:

$$v_e = \sqrt{\frac{2mgh_0}{m + I/r^2}}$$

Treghetsmomentet for kula er $I = \frac{2}{5}mr^2$ og slutthastighet blir:

$$v_e = \sqrt{\frac{mgh_0}{\frac{1}{2}m + \frac{2}{5}mr^2/r^2}} = \sqrt{\frac{10gh_0}{7}} = 4.10 m/s^2$$



Figur: Kraftdiagram for krefter som virker på kula

Kreftene som virker på kula er gravitasjonskraften på kula, $\overrightarrow{F_g}$, normalkraften mellom kula og skråplanet $\overrightarrow{F_N}$ og (statisk) friksjonskraft $\overrightarrow{f_s}$. Normalkraften balanser av $F_g \cos\theta$, dvs $\left|\overrightarrow{F_N}\right| = F_g \cos\theta$. Komponenten av gravitasjonskraften på kula og friksjonskraften bestemmer aksellerasjonen. Definerer x-koordinat langs skråplanet. Akselerasjonen til kula når den ruller ned skråplanet brukes til å bestemme friksjonskraften. Statisk friksjonskraft $\overrightarrow{f_s}$ virker i kontaktpunktet mellom kula og skråplanet langs x-aksen:

$$f_s - mg\sin\theta = ma \qquad \text{hvor } f_s = \left|\overrightarrow{f_s}\right|$$

Her er både f_s og a ukjente. Bruker Newtons 2lov for rotasjon, $\tau = I\alpha$, hvor I er treghetsmomentet og α vinkelakselerasjonen. Dreieimpulsen er $\tau = rf_s$. Siden kula ruller i kontakt med skråplanet er: $\alpha = -a/r$. Får da følgende sammenheng mellom friksjonskraft og akselerasjon:

$$f_s = \frac{I\alpha}{r} = \frac{I}{r}\left(-\frac{a}{r}\right) = -\frac{I}{r^2}a$$

Innsatt i $f_s - mg\sin\theta = ma$ gir dette en likning for a:

$$-\frac{I}{r^2}a - mg\sin\theta = ma \qquad a = -\frac{g\sin\theta}{1 + I/mr^2}$$ For kule er $I = \frac{2}{5}mr^2$. Dette gir:

$$a = -\frac{g\sin\theta}{1 + 2/5} = -\frac{5}{7}g\sin\theta = -3.5m/s^2$$

Friksjonskraften:

$$f_s = -\frac{I}{r^2}a = -\frac{2mr^2}{5r^2}a = -\frac{2}{5}ma = 8.4N$$

Oppgave 2

a) Figuren viser en bølge med to hele bølgelengder på strengen spent opp med avstand mellom endepunktene på 0.8 m. Bølgelengden til den illustrerte stående bølgen blir da:

$$2\lambda = L = 0.8m \qquad \lambda = 0.4m$$

En stående bølge kan ha knutepunkt kun i endene (grunnfrekvens), dvs: $\lambda/2 = L$, med en eller flere knutepunkter mellom endene. Den illustrerte har 3knutepunkter i tillegg til den på enden. Dvs., overharmonisk orden n=4.

Likning for stående bølge:

$$y(t) = y_0\cos(kx + \omega t) - y_0\cos(kx - \omega t) = y_0\sin(kx)\cos(\omega t)$$

Transversal hastighet:

$dy(t)/dt = \frac{d}{dt}(y_0 \sin(kx)\cos(\omega t)) = -y_0\omega \sin(kx)\sin(\omega t)$

Maks transversal hastighet forekommer når $|\sin(\omega t)| = 1$.

Maks transversal hastighet: $v_{t,maks} = -y_0\omega \sin(kx)$

Her er $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4m}$; bølgehastighet: $v = \sqrt{\tau/\mu} = \sqrt{FL/m} = \sqrt{325\,N\,0.8m/0.0025kg} = 322.5m/s$

Frekvens: $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{322.5m/s}{0.4m} = 806.25Hz$

Maks transversal hastighet til strengen ved x =0.18m: $|v_{t,maks}| = y_0\omega \sin(kx) = 6.26m/s$

b)

Den generelle likning for Doppler effekter er:

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \pm v_s}$$

Hvor v: er lydhastighet, v_D er hastighet som detektor beveger seg med og med og v_s hastighet til kilden.

Sommerfuglen hører frekvensen f' :

$$f' = f\frac{v - v_D}{v - v_s} = 82.52kHz\left(1 - \frac{8m/s}{v}\right) \Big/ \left(1 - \frac{9m/s}{v}\right)$$

Satt inn med lydhastighet i luft (v= 343 m/s): f'=82.76kHz

Frekvens flaggermusen mottar tilbake:

$$f_{r,f} = 82.76Hz\left(1 + \frac{9m/s}{v}\right) \Big/ \left(1 + \frac{8m/s}{v}\right)$$

$f_{r,f}$ = 83.0 kHz

c)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65N/m}{0.68kg}} = 9.78\,rad/s$$

Frekvens: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9.78}{2\pi}Hz = 1.56Hz$

Periode: $T = 1/f = \frac{1}{1.56}s = 0.64s$

Akselerasjon. Posisjonen x er løsning av: $\ddot{x} + \omega x = 0$. Løsningene er på formen: $x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Hastighet og akselerasjon er da gitt ved:

$$\dot{x} = v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t + \varphi) \qquad \ddot{x} = a(t) = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

Maksimal aksellerasjon forekommer når $|\cos(\omega t + \varphi)| = 1$

Initialverdiene gir $x(t=0) = x_0 \cos(\varphi) = 0.11m \quad \dot{x}(t=0) = -\omega x_0 \sin(\varphi) = 0.$; dvs $x_0 = 0.11m$ og $\varphi = n\pi$, n=0,1,2,...

Maks akselerasjon: $\max(\ddot{x}(t)) = \omega^2 x_0 = 0.11m(9.78s^{-1})^2 = 10.52ms^{-2}$

Dette forekommer ved x=-11cm, x=11cm (i ytterpunktene av svingingen)

Oppgave 3a

Temperaturen T_4 inngår i uttrykket for varmeledning gjennom mursteinslaget:

$$I_4 = \lambda_4 \cdot A \cdot \left(T_4 - T_5\right) / L_4$$

hvor λ_4 er varmeledningsevnen for murstein og A det totale areal. I dette uttrykket er A og L_4 ukjent. Ved å se på varmestrømmen gjennom det første laget: $I_1 = \lambda_1 \cdot A \cdot \left(T_1 - T_2\right) / L_1$ og å benytte at varmestrømmen er lik for disse lagene:

$$I_1 = I_4 \qquad \lambda_1 \cdot A \cdot \left(T_1 - T_2\right) / L_1 = \lambda_4 \cdot A \cdot \left(T_4 - T_5\right) / L_4$$

Dette gir for T_4:

$$T_4 = T_5 + \frac{\lambda_1}{\lambda_4} \frac{L_4}{L_1} \left(T_1 - T_2\right) = T_5 + \frac{\lambda_1}{5\lambda_1} \frac{2L_1}{L_1} \left(T_1 - T_2\right) = T_5 + \tfrac{2}{5} \left(T_1 - T_2\right) = -8^\circ C$$

3b

Initialtilstanden til gassen er gitt ved: p_i = 2.0Pa; V_i=12 liter, T_i = 37 °C = 310 K.

Temperaturen T_f etter adiabatisk ekspansjon til et volum på V_f = 19 liter beregnes ved åbenytte likningen som beskriver adiabatisk tilstandsendring:

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$$

Hvor γ er adiabatkonstanten. Adiabatkonstanten for en toatomig gass er gitt ved:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{7}{2} R}{\frac{5}{2} R} = 1.4$$

Sluttemperaturen etter ekspansjon til 19 liter ved adiabatisk prosess beregnes til:

$$T_f = T_i \frac{V_i^{\gamma-1}}{V_f^{\gamma-1}} = T_i \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} = 310K \left(\frac{12}{19}\right)^{0.4} = 258K = -15^\circ C$$

For isoterm prosess er T_i = T_f = 310 K. Trykket etter ekspansjon til 19 liter ved isoterm prosess beregnes ved å bruke: $pV = nRT$ (ideell gasslov). Siden T_i = T_f , får vi: $p_i V_i = p_f V_f$.

$$p_f = p_i V_i / V_f = 2Pa 12/19 = 1.26 Pa$$

3c

Virkningsgraden gir tilført varme ved høy temperatur, Q_h, i følge definisjonen: $\varepsilon = W / Q_h$, dvs $Q_h = W / \varepsilon$.
Energibevaring gir grunnlag for å beregne avgitt varme på lavtempertursiden:

$$Q_L = Q_h - W = W\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$

Endring i entropi til reservoarene blir:

$$\Delta S = \frac{Q_L}{T_L} - \frac{Q_h}{T_h} = \frac{W}{T_L}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) - \frac{W}{T_h \varepsilon} = 92.2 kJ / K$$