Oppgave 1_versjon 1(Bevegelseslingningene for konstant akselerasjon).

Du skal bestemme maksimal høyde for en stein som kastes loddrett oppover fra bakkenivå med en hastighet $\mathrm{v}_{0y} = 27{,}2\ \mathrm{m/s}$ på Mars hvor tyngdeakselerasjonen $g = -3{,}70\ \mathrm{m/s^2}$ (her er positiv retning valgt oppover). Ved å bruke bevegelseslingningen

$$\mathrm{v}_y^2 - \mathrm{v}_{0y}^2 = 2gy$$

finner vi at

$$y = \frac{\mathrm{v}_y^2 - \mathrm{v}_{0y}^2}{2g} = \frac{0^2 - (27{,}2\ \mathrm{m/s})^2}{2 \cdot (-3{,}70\ \mathrm{m/s^2})} = 100\ \mathrm{m}$$

Oppgave 1_versjon 2 (Bevegelseslingningene for konstant akselerasjon).

Du skal bestemme høyden h som en stein slippes fra når den med en starthastighet $\mathrm{v}_{0y} = 10{,}3\ \mathrm{m/s}$ lander på bakken etter $t = 2{,}60\ \mathrm{s}$. Velges positiv retning nedover gir bevegelseslingningen

$$h = \mathrm{v}_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 = 10{,}3\ \mathrm{m/s} \cdot 2{,}60\ \mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot (2{,}60\ \mathrm{s})^2 = 59{,}9\ \mathrm{m}$$

Oppgave 2_versjon 1 (Skrått kast).

De to steinene har samme starthastighet v_0 og samme utgangsvinkel α. Ettersom gravitasjonskrafta på begge steinene er like stor er akselerasjonen de erfarer på både opptur og nedtur den samme, nemlig g. Tiden t de begge bruker opp til toppen av banen er dermed gitt ved:

$$\mathrm{v}_y = \mathrm{v}_{0y} - gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\mathrm{v}_{oy}}{g} = \frac{\mathrm{v}_0 \sin\alpha}{g}$$

uavhengig av massen m. Konsekvensen er at de lander på bakken samtidig ettersom de begge bruker den samme tiden t på veien nedover igjen.

Oppgave 2_versjon 2 (Skrått kast).

Dette er en kastebevegelse der den horisontale forflytningen er gitt ved sammenhengen $s_x = \mathrm{v}_{0x}t$. Tiden t er en størrelse som er felles for både den vertikale og den horisontale forflytningen. Dermed er tidsforløpet med hensyn på den horisontale forflytningen mellom posisjon 1 og 2 gitt ved

$$t_{1\to2} = 2{,}0\ \mathrm{s}$$

Tiden steinen befinner seg i lufta før den lander er dermed

$$s_{1\to5} = 4 \cdot s_{1\to2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_{0x}t_{1\to5} = 4\,\mathrm{v}_{0x} \cdot t_{1\to2} \quad \Rightarrow \quad t_{1\to5} = 4 \cdot 2{,}0\ \mathrm{s} = 8{,}0\ \mathrm{s}$$

Oppgave 3_versjon 1 **(Newtons 3.lov).**

Det sentrale punktet er at kommoden ikke beveger seg. Dermed er friksjonen som virker mellom kommoden og teppet i form av statisk friksjon. Newtons 2.lov sier i dette tilfellet at:

$$\sum F = 0$$

som videre tilser at friksjonskrafta er nøyaktig like stor i verdi som den anvendte krafta på kommoden. Det vil si:

$$R = 800 \text{ N}$$

Oppgave 3_versjon 2 **(Newtons 3.lov).**

Det sentrale punktet er at kassa ikke beveger seg. Dermed er friksjonen som virker mellom kassa og underlaget i form av statisk friksjon. Ettersom kassa står stille sier Newtons 2.lov at:

$$\sum F = 0$$

som videre tilsier at friksjonskrafta er nøyaktig like stor som den anvendte krafta. Det vil si:

$$R = 950 \text{ N}$$

Oppgave 4_versjon 1 **(Grunnleggende energibevaring i tyngdefeltet).**
Energibevarelse gir at:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_a^2 + mga = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_b^2 + mgb$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{v}_b^2 = \mathrm{v}_a^2 + 2ga - 2gb$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{v}_b = \sqrt{\mathrm{v}_a^2 + 2g(a-b)}$$

Oppgave 4_versjon 2 **(Grunnleggende energibevaring i tyngdefeltet).**
Energibevarelse gir at:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_a^2 + mga = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_b^2 + mgb$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{v}_b^2 = \mathrm{v}_a^2 + 2ga - 2gb$$

$$\Downarrow$$

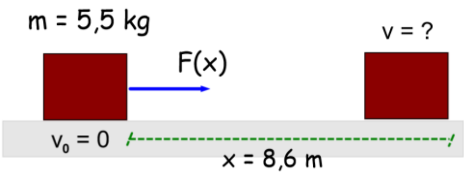
$$\mathrm{v}_b = \sqrt{\mathrm{v}_a^2 + 2g(a-b)}$$

Oppgave 5_versjon 1 **(Newtons 2.lov med derivasjon)**

Krafta F_x er gitt ved Newtons 2.lov der:

$$F_x = ma_x = m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\mathrm{v}_0 e^{-\frac{bt}{m}}\right) = m\mathrm{v}_0 \cdot \left(-\frac{b}{m}\right) \cdot e^{-\frac{bt}{m}} = -\mathrm{v}_0 \cdot be^{-\frac{bt}{m}} = -b\mathrm{v}_x(t)$$

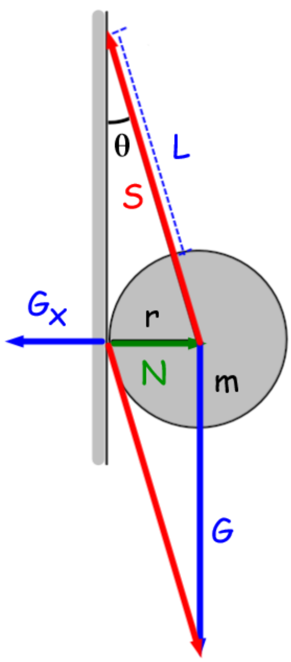
Oppgave 5_versjon 2 **(Mekanisk arbeid med integrasjon)**



Det mekaniske arbeidet som den variable krafta utfører på legemet når det forflyttes $x = 8{,}6$ m er gitt ved integralet

$$W = \int_0^{8,6} F(x)dx = \int_0^{8,6} 6{,}0 - 2{,}0x + 6{,}0x^2 dx = [6{,}0x - x^2 + 2{,}0x^3]_0^{8,6} = 1250 \text{ J}$$

Oppgave 6_versjon 1 **(Newtons 1.lov med dekomponering)**



Fra den nedre trekanten dannet av snordraget S, tyngdekrafta G og normalkrafta N finner vi at:

$$\tan\theta = \frac{N}{G} \quad \Rightarrow \quad N = G\tan\theta \quad \Rightarrow \quad N = mg\tan\theta$$

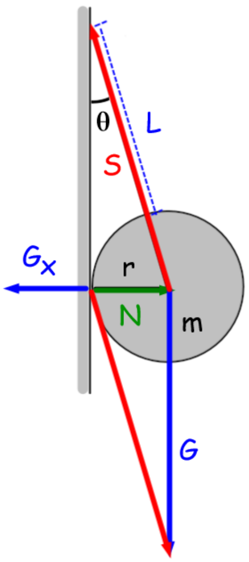
Den trigonometriske funksjonen kan uttrykkes ved hjelp av L og r på følgende måte:

$$\tan\theta = \frac{r}{\sqrt{(L+r)^2 - r^2}} = \frac{r}{\sqrt{L^2 + 2Lr}}$$

Dermed er:

$$N = mg\frac{r}{\sqrt{L^2 + 2Lr}}$$

Oppgave 6_versjon 2 (Newtons 1.lov med dekomponering)



Fra den nedre trekanten dannet av snordraget S, tyngdekrafta G og normalkrafta N finner vi at:

$$\cos\theta = \frac{G}{S} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{G}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{mg}{\cos\theta}$$

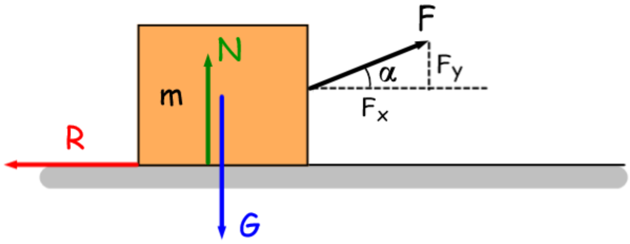
Den trigonometriske funksjonen kan uttrykkes ved hjelp av L og r på følgende måte:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{(L+r)^2 - r^2}}{L+r} = \frac{\sqrt{L^2 + 2Lr}}{L+r}$$

Dermed er:

$$S = mg\frac{L+r}{\sqrt{L^2+2Lr}}$$

Oppgave 7_versjon 1 (Newtons 2.lov med dekomponering)



Vet at kassa beveger seg framover med konstant hastighet v. Da gjelder ifølge Newtons 2.lov i henholdsvis x -og y-retningen at

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x - R = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N + F_y - G = 0 \qquad (2)$$

Fra ligning (1) innser vi at friksjonskrafta

$$R = F_x = F\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad F = \frac{R}{\cos\alpha}$$

Fra ligning (2) er tilsvarende:

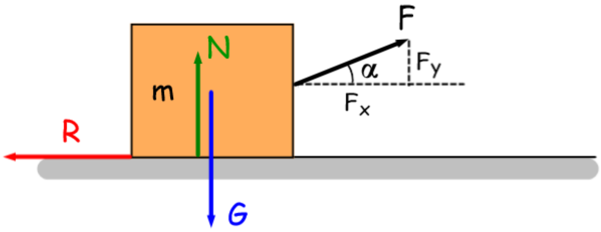
$$F_y = F\sin\alpha = G - N = mg - N \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg-N}{\sin\alpha}$$

Friksjonskrafta er dermed gitt ved:

$$\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{mg-N}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{(mg-N)\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{mg-N}{\tan\alpha}$$

Merk deg at $N < G = mg$ i dette tilfellet ettersom krafta F tenderer til å løfte opp kassa fra bordplata.

Oppgave 7_versjon 2 (Newtons 2.lov med dekomponering)



Vet at kassa beveger seg framover med konstant hastighet v. Da gjelder ifølge Newtons 2.lov i henholdsvis x -og y-retningen at

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x - R = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N + F_y - G = 0 \qquad (2)$$

Fra ligning (1) innser vi at friksjonskrafta

$$R = F_x = F\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad F = \frac{R}{\cos\alpha}$$

Fra ligning (2) er tilsvarende:

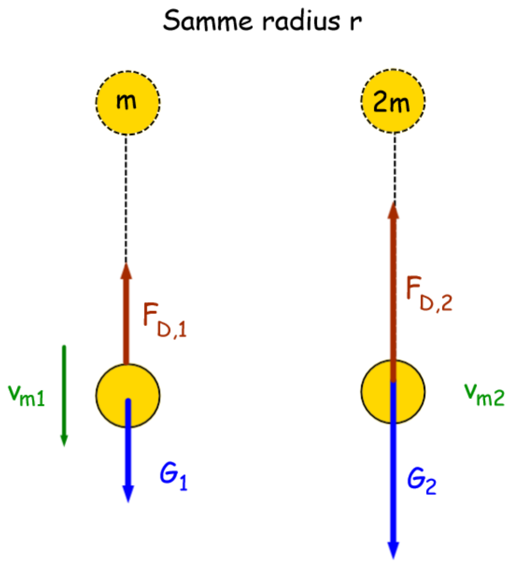
$$F_y = F\sin\alpha = G - N = mg - N \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg - N}{\sin\alpha}$$

Normalkrafta er dermed gitt ved:

$$\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{mg - N}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad N = mg - \frac{R\sin\alpha}{\cos\alpha} = mg - \mu_k N\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{mg}{1 + \mu_k\tan\alpha}$$

Oppgave 8_versjon 1 (Newtons 2.lov med luftmotstand)



Newtons 2.lov for hver av de to kulene:

$$\sum F_1 = G_1 - F_{D,1} = mg - k\mathrm{v}_{m1}^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{v}_{m1}^2 = \frac{mg}{k}$$

og

$$\sum F_2 = G_2 - F_{D;2} = (2m)g - k\mathrm{v}_{m2}^2 = 0$$

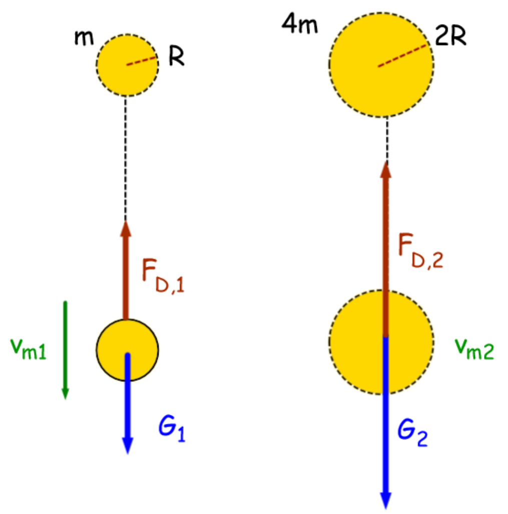
$$\Downarrow$$

$$\mathrm{v}_{m2}^2 = \frac{2mg}{k} = 2\mathrm{v}_{m1}^2$$

Basert på den siste ligningen innser vi at terminalhastigheten til kula med masse $2m$ er av størrelsesorden:

$$\mathrm{v}_{m2} = \sqrt{2}\,\mathrm{v}_{m1}$$

Oppgave 8_versjon 2 (Newtons 2.lov med luftmotstand)



Luftmotstanden F_D på ei kule med tverrsnitt-areal A og hastighet v er angitt ved

$$F_D = k \cdot A \cdot \mathrm{v}^2$$

Idet kulene oppnår sin terminalhastighet er i hvert enkelt tilfelle luftmotstanden F_D lik tyngdekrafta G. Det vil si:

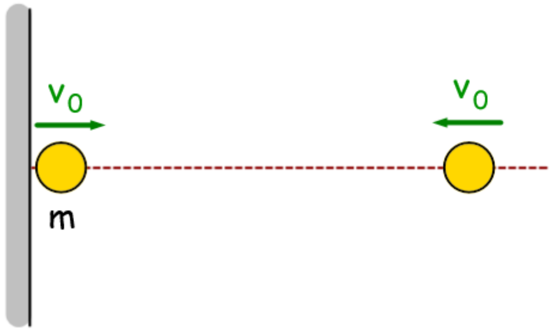
$$G = F_D = kA\mathrm{v}^2$$

Basert på dette blir forholdet mellom de to terminalhastighetene av størrelsesorden:

$$\frac{4mg}{mg} = \frac{k \cdot (\pi(2R)^2) \cdot \mathrm{v}_{tB}^2}{k \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot \mathrm{v}_{tA}^2)} \quad \Rightarrow \quad 4 = 4 \cdot \frac{\mathrm{v}_{tB}^2}{\mathrm{v}_{tA}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{v}_{tB}}{\mathrm{v}_{tA}} = 1$$

(Merk at k i versjon 1 over er lik kA i denne versjonen. Verdien er den samme i begge tilfeller).

Oppgave 9_versjon 1 (impuls)



Impulsloven gir oss direkte at:

$$I = F \cdot \Delta t = m(\mathrm{v}_0 - (-\mathrm{v}_0))$$

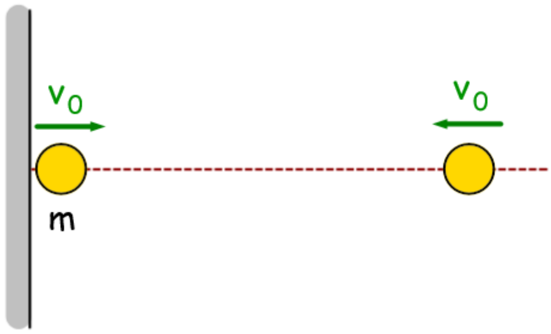
$$\Downarrow$$

$$F \cdot \Delta t = 2m\mathrm{v}_0$$

Krafta F som virker mellom ballen og veggen i kollisjonsøyeblikket er dermed:

$$F = \frac{2m\mathrm{v}_0}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg} \cdot 15\ \mathrm{m/s}}{1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s}} = 60\ \mathrm{N}$$

Oppgave 9_versjon 2 (impuls)



Impulsloven gir oss direkte at:

$$I = F \cdot \Delta t = m(\mathrm{v}_0 - (-\mathrm{v}_0))$$

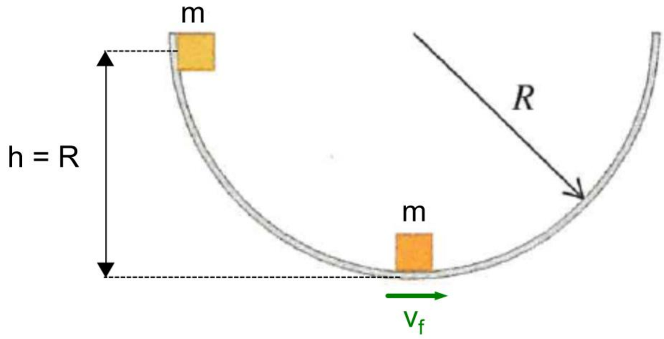
$$\Downarrow$$

$$F \cdot \Delta t = 2m\mathrm{v}_0$$

Krafta F som virker mellom ballen og veggen i kollisjonsøyeblikket er dermed:

$$\mathrm{v}_0 = \frac{F \cdot \Delta t}{2m} = \frac{4{,}5\ \mathrm{Ns}}{2 \cdot 0{,}15\ \mathrm{kg}} = 15\ \mathrm{m/s}$$

Oppgave 10_versjon 1 **(Uelastisk kollisjon)**



Vi benytter loven for bevaring av den totale mekaniske energien i gravitasjonsfeltet til å bestemme hastigheten til massen til venstre idet det treffer legemet i bunnen av banen:

$$\frac{1}{2}m\text{v}_f^2 = mgh \;\Rightarrow\; \text{v}_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gR}$$

Hastigheten for felleslegemet finner vi ved å bruke bevaring av bevegelsesmengden som gir at:

$$m_1\text{v}_f = (m_1 + m_2)\text{v}_e \;\Rightarrow\; \text{v}_e = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\text{v}_f$$

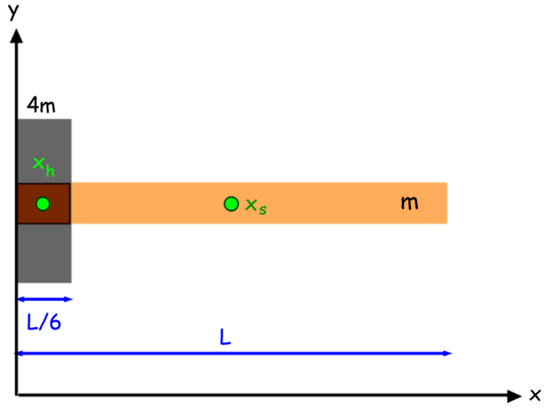
Den maksimale høyden over bakken blir dermed ut fra energiloven:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\text{v}_e^2 = (m_1 + m_2)gh$$

$$\Downarrow$$

$$h = \frac{\text{v}_e^2}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{\text{v}_f^2}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{2gR}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 R$$

Oppgave 11_v1 (Massemiddelpunkt)



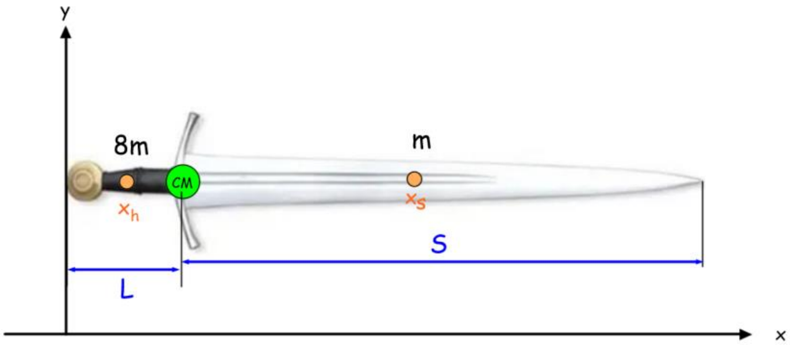
Vi beregner først posisjonen til hammerens massesenter x_{CM}. Dette gir at:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}(x_h m_h + x_s m_s) = \frac{1}{4m+m} \cdot \left(\frac{L}{12} \cdot 4m + \frac{L}{2} \cdot m\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{L}{3} + \frac{L}{2}\right) = \frac{L}{6}$$

Avstanden fra hammerens høyre ende blir dermed:

$$x = L - \frac{L}{6} = \frac{5L}{6}$$

Oppgave 11_v2 (Massemiddelpunkt)



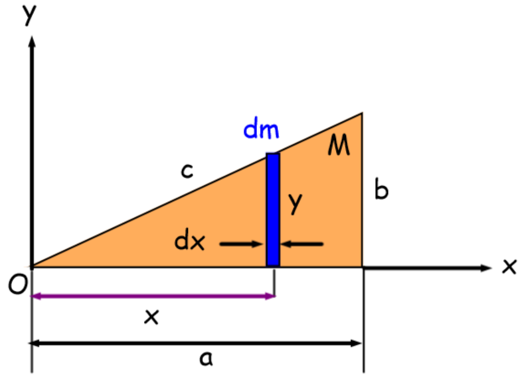
Sverdets massemiddelpunkt befinner seg ved $x_{CM} = L$. Hjaltets og sverdbladets massemiddelpunkter befinner seg ved henholdsvis $x_h = L/2$ og $x_s = L + S/2$. Dette innebærer at:

$$x_{CM} = L = \frac{1}{M}(x_h m_h + x_s m_s) = \frac{1}{8m+m} \cdot \left(\frac{L}{2} \cdot 8m + \left(L + \frac{S}{2}\right) \cdot m\right)$$

$$\Downarrow$$

$$L = \frac{1}{9} \cdot \left(4L + L + \frac{S}{2}\right) = \frac{5}{9}L + \frac{S}{18} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{4}{9}L \cdot 18 = 8L \quad \Rightarrow \quad \frac{S}{L} = 8$$

Oppgave 12_v1 **(Massemiddelpunkt)**



Vi bestemmer x-koordinaten til legemets massesenter ved å ta utgangspunkt i den blå stripen i figuren over. Denne stripen angir et lite masse-element med bredde dx og lengde y. Massen til dette masse-elementet er gitt ved:

$$dm = \sigma dA = \frac{M}{A} dA = \frac{M}{\frac{1}{2}ab} \cdot ydx = \frac{2M}{ab} \cdot ydx$$

$$\Downarrow$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int xdm = \frac{1}{M} \int_0^a x \cdot \frac{2M}{ab} \cdot ydx = \frac{2M}{Mab} \int_0^a x \cdot y\, dx = \frac{2}{ab} \int_0^a x \cdot y\, dx$$

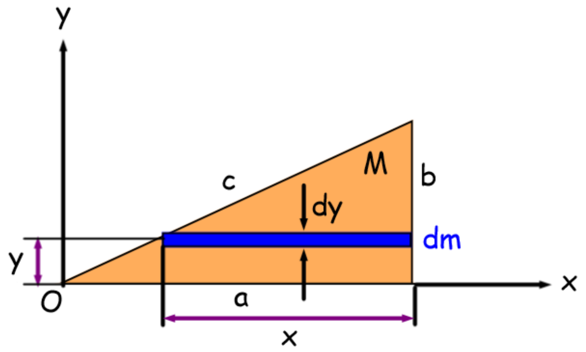
For å komme videre og få løst dette integralet må vi uttrykke variabelen y ved bruk av variabelen x. Dette får vi til ved å sammenligne den store trekanten (oransje) med trekanten hvor masselementet dm danner en av sidekantene. Dette gir oss at:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{b}{a} x$$

Settes dette inn i integralet finner vi

$$x_{CM} = \frac{2}{ab} \int_0^a \frac{b}{a} x^2 dx = \frac{2}{a^2} \cdot \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^a = \frac{2a}{3}$$

Oppgave 12_v2 (Massemiddelpunkt)



Vi bestemmer y-koordinaten til legemets massesenter ved å ta utgangspunkt i den blå stripen i figuren over. Denne stripen angir et lite masse-element med bredde dy og lengde x. Massen til dette masse-elementet er gitt ved:

$$dm = \sigma dA = \frac{M}{A} dA = \frac{M}{\frac{1}{2}ab} \cdot xdy = \frac{2M}{ab} \cdot xdy$$

$$\Downarrow$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int ydm = \frac{1}{M} \int_0^b y \cdot \frac{2M}{ab} \cdot xdy = \frac{2M}{Mab} \int_0^b y \cdot x\, dy = \frac{2}{ab} \int_0^b y \cdot x\, dy$$

For å komme videre og få løst dette integralet må vi uttrykke variabelen x ved bruk av variabelen y. Dette får vi til ved å sammenligne den store trekanten (oransje) med trekanten hvor masselementet dm danner en av sidekantene. Dette gir oss at:

$$\frac{x}{b-y} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{b}(b-y) = a - \frac{ay}{b}$$

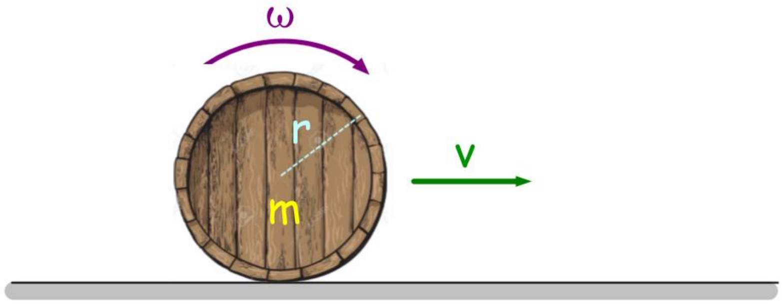
Settes dette inn i integralet finner vi at:

$$y_{CM} = \frac{2}{ab} \int_0^b y \cdot \left(a - \frac{ay}{b}\right) dy = \frac{2}{ab} \int_0^b ay - \frac{ay^2}{b} dy = \frac{2}{ab} \cdot \left[\frac{a}{2} y^2 - \frac{a}{3b}\, y^3\right]_0^b$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2}{ab} \cdot \left(\frac{ab^2}{2} - \frac{ab^2}{3}\right) = \frac{2}{ab} \cdot \frac{ab^2}{6} = \frac{1}{3}\, b$$

Oppgave 13_v1 (Kinetisk rotasjonsenergi)



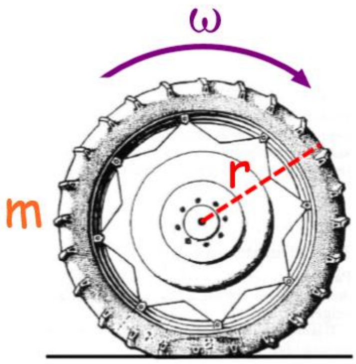
Sylinderen totale kinetiske energi er gitt ved:

$$E_K = \frac{1}{2}m\text{v}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Med $I = \frac{1}{2}mr^2$ og $\omega = \frac{\text{v}}{r}$ gir dette direkte at:

$$E_K = \frac{1}{2}m\text{v}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{\text{v}^2}{r^2} = \frac{1}{2}m\text{v}^2 + \frac{1}{4}m\text{v}^2 = \frac{3m\text{v}^2}{4}$$

Oppgave 13_v2 (Treghetsmoment)



Traktorhjulets totale kinetiske energi er gitt ved

$$E_K = \frac{1}{2}m\text{v}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{9}{4}m\text{v}^2$$

$$\Downarrow$$

$$I\omega^2 = \frac{7}{2}m\text{v}^2$$

Løses den siste ligningen med hensyn på treghetsmomentet I finner vi at:

$$I = \frac{7}{2}m\text{v}^2\cdot\frac{1}{\omega^2} = \frac{7}{2}m\text{v}^2\cdot\frac{r^2}{\text{v}^2} = \frac{7}{2}mr^2$$

Oppgave 14_versjon 1 **(Rullebetingelsen)**

Beltet glir, eller slurer, ikke relativt til bakken mens vogna beveger seg framover. Dermed gjelder rullebetingelsen slik at beltet ruller rent:

$$\mathrm{v}_b = R\omega$$

Her er v_b beltets lineære hastighet, ω er beltets rotasjonshastighet når det er i kontakt med vognas indre hjulsystem og R er disse hjulenes radius. Hjulenes massesenter (CM) følger en ren lineær bevegelse med en lineær hastighet

$$\mathrm{v}_{CM} = R\omega$$

Her angir ω rotasjonshastigheten helt ytterst på hjulet som er i kontakt med beltet. Et punkt P på beltet som befinner seg i direkte kontakt med bakken beveger seg like raskt, men i motsatt retning, relativt til hjulets massesenter. Relativt til bakken blir dermed hastigheten til punktet P:

$$\mathrm{v}_p = \mathrm{v}_{CM} - \mathrm{v}_b = R\omega - R\omega = 0$$

Et punkt Q på beltet som befinner seg på toppen av hjulet beveger seg like raskt og i samme retning relativt til hjulets massesenter. Relativt til bakken blir dermed hastigheten til punktet Q

$$\mathrm{v}_Q = \mathrm{v}_{CM} + \mathrm{v}_b = R\omega + R\omega = 2R\omega = 2\mathrm{v}_b = 2 \cdot 25\ \mathrm{km/t} = 50\ \mathrm{km/t}$$

Oppgave 14_versjon 2 **(Rullebetingelsen)**

Når kula ikke samtidig glir, eller slurer, mens den ruller gjelder rullebetingelsen som sier at:

$$\mathrm{v} = R\omega$$

Samtidig følger kulas massesenter (CM) en lineær bevegelse med en hastighet gitt ved sammenhengen:

$$\mathrm{v}_{CM} = R\omega$$

a) Punktet P på kula beveger seg i motsatt retning relativt til massesenteret. Relativt til skråplanet blir dermed hastigheten til punktet P

$$\mathrm{v}_P = \mathrm{v}_{CM} - \mathrm{v} = R\omega - R\omega = 0$$

b) Punktet Q på kula beveger seg i samme retning relativt til massesenteret. Relativt til skråplanet blir dermed hastigheten til punktet Q

$$\mathrm{v}_Q = \mathrm{v}_{CM} + \mathrm{v} = R\omega + R\omega = 2R\omega = 2\mathrm{v}$$

Oppgave 15_v1: Solid sylinder (Parallellaksesetningen)

Parallell-akse setningen (Steiners sats) gir direkte at

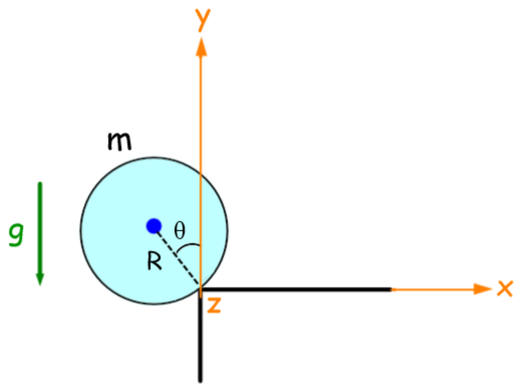
$$I_z = I_0 + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

Oppgave 15_v2: Tynnvegget kuleskall (Parallellaksesetningen)

Parallell-akse setningen (Steiners sats) gir direkte at

$$I_z = I_0 + mR^2 = \frac{2}{3}mR^2 + mR^2 = \frac{5}{3}mR^2$$

Oppgave 16_v1: Solid kule (Energibevaring med rulling)



Her er det sentralt å innse at kula kun ruller og ikke beveger seg lineært. Vi kan dermed anvende energibevarelse for ren rulling som gir at:

$$\frac{1}{2}I_z\omega_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}I_z\omega_1^2 + mgh_1$$

Her angir indeks «0» rett før kula begynner å rulle, og indeks «1» etter at kula har rullet en vinkeldistanse θ.

Merk deg at den maksimale høyden over bordkanten som massemiddelpunktet befinner seg er $h_0 = R$. I samme posisjon er vinkelhastigheten $\omega_0 = 0$. Tilsvarende er den nye høyden til massemiddelpunktet etter at røret har rullet vinkelavstanden θ gitt ved

$$h_1 = R\cos\theta$$

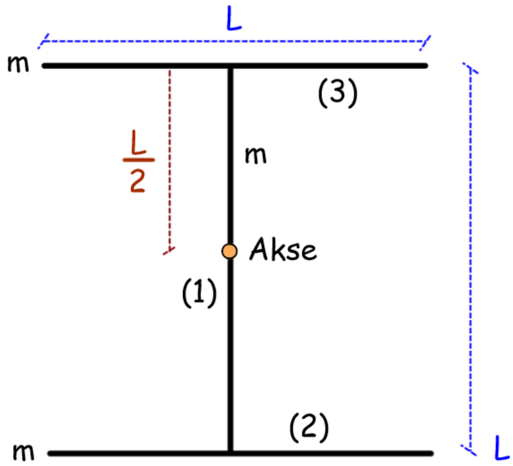
Basert på dette finner vi at:

$$\frac{1}{2}I_z\omega_1^2 = mg(h_0 - h_1) = mgR(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_1^2 = \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{I_z} = \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{\frac{2}{5}mR^2 + mR^2} = \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{\frac{7}{5}mR^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{10g}{7R}(1-\cos\theta)}$$

Oppgave 17_v1 (Parallellaksesetningen)



Treghetsmomentet til stang (1) er fra tabell gitt ved

$$I_1 = \frac{1}{12} mL^2$$

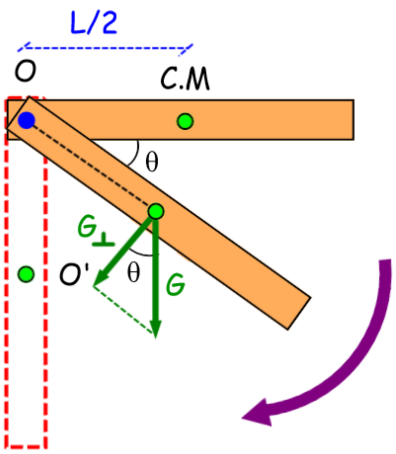
Treghetsmomentet til stang (2) finnes vi ved å benytte parallellaksesetningen:

$$I_2 = I_{CM} + I_S = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} mL^2$$

Treghetsmomentet til stang (3) er identisk med treghetsmomentet til stang (2) ettersom disse to stengene er plassert symmetrisk om aksen. Legemets treghetsmoment blir dermed:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{12} mL^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} mL^2 = \frac{9}{12} mL^2 = \frac{3}{4} mL^2$$

Oppgave 18_v1 (Mekanisk arbeid ved rotasjon)



Her er det viktig å innse at komponenten $G_\perp$ avtar i verdi når θ øker i verdi. Dette ser vi ut fra sammenhengen:

$$G_\perp = G \cos\theta$$

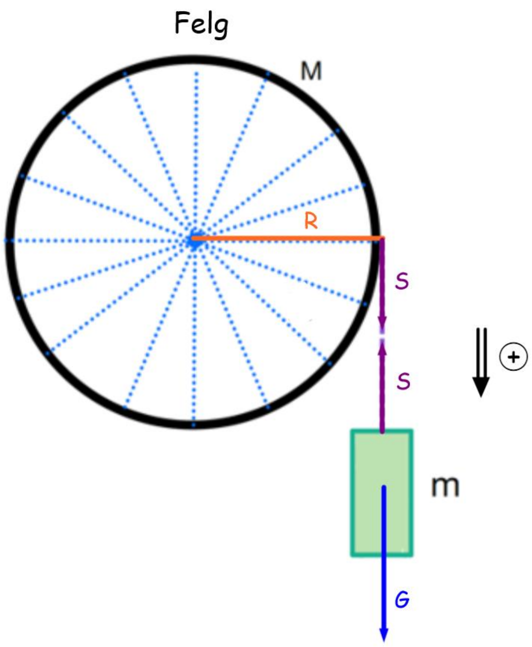
Konsekvensen av dette er at vi må regne infinitesimalt. Det mekaniske arbeidet dW utført av $G_\perp$ over et lite vinkelintervall $d\theta$ er

$$dW = \tau \, d\theta = \frac{L}{2} \cdot G_\perp \; d\theta = \frac{L}{2} mg \cos\theta \; d\theta$$

Det totale mekaniske arbeidet W som gravitasjonskrafta dermed har gjort når staven har rotert $\theta = 90^0$ er

$$W = \int_0^{90^0} \frac{L}{2} mg \cos\theta \; d\theta = \frac{L}{2} mg \int_0^{90^0} \cos\theta \; d\theta = \frac{Lmg}{2} [\sin\theta]_0^{90^0} = \frac{Lmg}{2}$$

Oppgave 19_v1 (Newtons 2.lov på rotasjonsform)



Loddets lineære akselerasjon a finner vi fra Newtons 2.lov der:

$$\sum F = G - S = ma$$

Snordraget S er fra rotasjons-dynamikkens grunnlov gitt ved:

$$\tau = S \cdot R = I\alpha = I\frac{a}{R}$$

Ettersom massen M i sin helhet befinner seg på felgen helt ytterst på hjulet kan dette hjulet modelleres som en tynnvegget sylinder med treghets-moment

$$I = MR^2$$

Dermed kan vi bestemme snordraget på loddet som blir av størrelsesorden:

$$S = MR^2 \cdot \frac{a}{R^2} = Ma$$

Loddets lineære akselerasjon blir da fra ligningen aller øverst:

$$G - S = mg - Ma = ma \quad \Rightarrow \quad mg = (m + M)a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m}{m + M}g$$

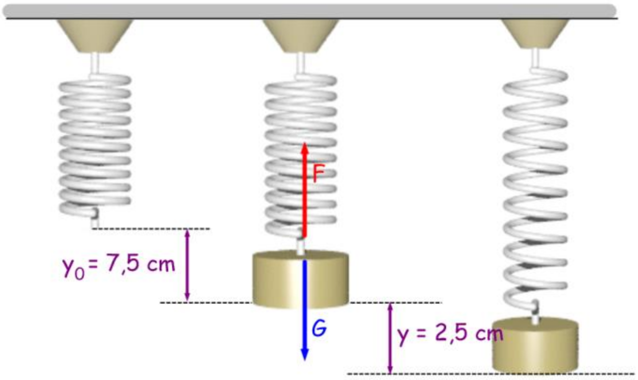
Oppgave 20_v1 (Dreieimpuls)

Idet marihøna begynner å krype innover endres systemets (skiva + marihøna) totale treghetsmoment I. Og ettersom massen til marihøna kryper nærmere rotasjonsaksen <u>avtar</u> det totale treghetsmomentet fra en verdi I_1 ned til en verdi $I_2 < I_1$. Videre vet vi at det ikke virker noen ytre krefter på systemet, noe som innebærer at dreieimpulsen L er bevart under marihønas forflytning. Det vil si:

$$\omega_1 I_1 = \omega_2 I_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \cdot \omega_1 > \omega_1$$

Konsekvensen av at marihøna flytter seg innover er at systemets rotasjonshastighet ω øker.

Oppgave 21_v1



Loddets harmoniske svingning beskrives generelt av bølgefunksjonen

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t)$$

Bestemmer først fjæras stivhet k ved å ta utgangspunkt i figuren i midten hvor fjær og lodd henger i ro. Newtons 1.lov gir da direkte at:

$$F - G = 0 \quad \Rightarrow \quad F = G \quad \Rightarrow \quad ky_0 = mg$$

$$\Downarrow$$

$$k = \frac{mg}{y_0} = \frac{0{,}500\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s\hat{}2}}{0{,}0750\ \mathrm{m}} = 65{,}4\ \mathrm{N/m}$$

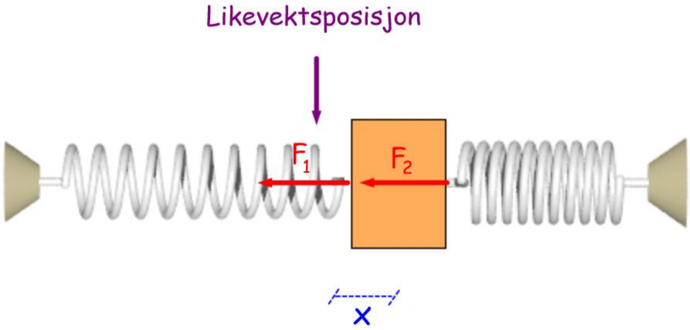
Her er amplituden $A = 0{,}025\ \mathrm{m}$ og svingefrekvensen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65{,}4\ \mathrm{N/m}}{0{,}500\ \mathrm{kg}}} = 11{,}43\ \mathrm{rad/s}$$

Dette gir konkret at:

$$y(t) = 0{,}0250 \cdot \cos(11{,}4\ t)$$

Oppgave 22_v1



Dersom klossen trekkes en distanse x mot høyre ut fra likevektsposisjonen så vil begge fjærene virke med ei kraft med retning mot venstre se (figuren). Den totale krafta på klossen vil derfor ifølge Newtons 2.lov være gitt ved:

$$F_1 + F_2 = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = mx''(t)$$

$$\Downarrow$$

$$mx'' = -k_1x - k_2x = -(k_2 + k_2)x$$

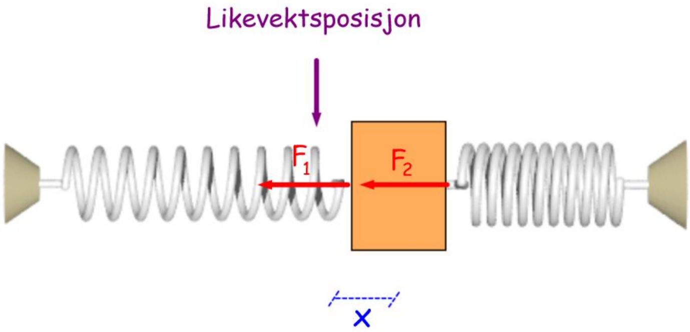
$$\Downarrow$$

$$x'' = -\frac{k_1 + k_2}{m}\,x = -\omega_0^2 x$$

Denne differensialligningen beskriver en harmonisk svingning med svingefrekvens

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{75\ \mathrm{N/m} + 125\ \mathrm{N/m}}{0{,}160\ \mathrm{kg}}} = 5{,}6\ \mathrm{Hz}$$

Oppgave 22_v2



Dersom klossen trekkes en distanse x mot høyre ut fra likevektsposisjonen så vil begge fjærene virke med ei kraft med retning mot venstre se (figuren). Den totale krafta på klossen vil derfor ifølge Newtons 2.lov være gitt ved:

$$F_1 + F_2 = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = mx''(t)$$

$$\Downarrow$$

$$mx'' = -k_1x - k_2x = -(k_2 + k_2)x$$

$$\Downarrow$$

$$x'' = -\frac{k_1 + k_2}{m}\,x = -\omega_0^2 x$$

Denne differensialligningen beskriver en harmonisk svingning med svingefrekvens

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}070 \text{ kg}}{25 \text{ N/m} + 45 \text{ N/m}}} = \; 0{,}20 \text{ s}$$

Oppgave 23, versjon 1

Bølgas fasehastighet v langs strengen er bestemt ved krafta F som virker på strengen i festepunktet, samt strengens lineære massetetthet μ der

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Ettersom

$$\rho = \frac{\mu}{A(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \rho \cdot A(x)$$

kan denne fasehastigheten uttrykkes ved $A(x)$ som:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A(x)}} = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot (10^{-3}x + 0{,}010)\ \mathrm{cm}^2}}$$

Oppgave 23, versjon 2

Bølgas fasehastighet v langs strengen er bestemt ved krafta F som virker på strengen i festepunktet, samt strengens lineære massetetthet μ der

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Ettersom

$$\rho = \frac{\mu}{A(x)} \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \rho \cdot A(x)$$

kan svingefrekvensen ω uttrykkes ved $A(x)$ som:

$$\omega = k \cdot \mathrm{v} = k \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A(x)}} = \sqrt{\frac{F \cdot k^2}{\rho \cdot (10^{-3}x + 0{,}010)\ \mathrm{cm}^2}}$$

Oppgave 24, versjon 1

Basert på oppgitte opplysninger finner vi først bølgas fasehastighet v der:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}} = \sqrt{\frac{0{,}50\ \mathrm{N}}{3{,}50\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}}} = 30{,}9\ \mathrm{m/s} = 31\ \mathrm{m/s}$$

Bølgetallet k blir dermed:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{\mathrm{v}} = \frac{2\pi\ \mathrm{rad} \cdot 5{,}0\ \mathrm{Hz}}{30{,}9\ \mathrm{m/s}} = 1{,}0\ \mathrm{rad/m}$$

Oppgave 24, versjon 2

Basert på oppgitte opplysninger finner vi først bølgas fasehastighet v der:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}} = \sqrt{\frac{1{,}50\ \mathrm{N}}{4{,}5\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}}} = 36{,}5\ \mathrm{m/s} = 37\ \mathrm{m/s}$$

Bølgetallet k blir dermed:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{\mathrm{v}} = \frac{2\pi\ \mathrm{rad} \cdot 7{,}5\ \mathrm{Hz}}{36{,}5\ \mathrm{m/s}} = 1{,}3\ \mathrm{rad/m}$$

Oppgave 25, versjon 1

Den totale tilførte energien pr. tidsenhet er det samme som effekten P som leveres for å produsere bølgeforplantingene på hver av de to strengene. Denne effekten er gitt ved

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \mathrm{v}$$

der μ er strengens lineære massetetthet, ω er bølgas svingefrekvens, A er amplituden og v er bølgas fasehastighet langs strengen. Svingefrekvensen til bølga på hver av de to strengene er bestemt ved

$$\omega = k \cdot \mathrm{v} = k \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Dette gir at:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{2}\mu_1\omega_1^2 A^2\,\mathrm{v}_1}{\frac{1}{2}\mu_2\omega_2^2 A^2 \mathrm{v}_2} = \frac{\mu_1(k \cdot \mathrm{v}_1)^2 A^2 \mathrm{v}_1}{\mu_2(k \cdot \mathrm{v}_2)^2 A^2 \mathrm{v}_2} = \frac{\mu_1 \mathrm{v}_1^3}{\mu_2 \mathrm{v}_2^3} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{\left(\sqrt{\frac{F}{\mu_1}}\right)^3}{\left(\sqrt{\frac{F}{\mu_2}}\right)^3} = \frac{\mu_1^{-\frac{1}{2}}}{\mu_2^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

Oppgave 26, versjon 1

Doppler-ligningen når lydkilden kommer mot deg er generelt gitt ved

$$f' = f_S \cdot \left(\frac{\mathrm{v} + \mathrm{v}_O}{\mathrm{v} - \mathrm{v}_S}\right)$$

Her er v fasehastigheten til lydbølgene, v_0 er hastigheten til observatøren, v_s er hastigheten til toget (lydkilden), f_S er frekvensen til lydbølgene som sendes ut fra toget og f' er den frekvensen som observatøren registrerer. Ettersom observatøren står i ro er $\mathrm{v}_O = 0$ slik at:

$$f' = f_S \cdot \left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v} - \mathrm{v}_S}\right) = f_S + \Delta f = f_S + 0{,}0030 f_S = 1{,}0030\, f_S$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v} - \mathrm{v}_S} = 1{,}0030 \;\Rightarrow (\mathrm{v} - \mathrm{v}_S) \cdot 1{,}0030 = \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_S = \mathrm{v}\left(1 - \frac{1}{1{,}0030}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{v}_S = 331 \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}0030}\right) = 0{,}99\ \mathrm{m/s}$$

Oppgave 26, versjon 2

Når lydkilden beveger seg mot observatøren er Doppler-effekten gitt ved

$$f_1' = f_S \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{\mathrm{v}_S}{\mathrm{v}}}\right) = 320\ \mathrm{Hz} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{40\ \mathrm{m/s}}{343\ \mathrm{m/s}}}\right) = 362\ \mathrm{Hz}$$

Når lydkilden beveger seg vekk fra observatøren er Doppler-effekten gitt ved:

$$f_2' = f_S \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{\mathrm{v}_S}{\mathrm{v}}}\right) = 320\ \mathrm{Hz} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{40\ \mathrm{m/s}}{343\ \mathrm{m/s}}}\right) = 287\ \mathrm{Hz}$$

Den totale doppler-effekten som observatøren registrerer etter at toget har passert er dermed gitt ved:

$$\Delta f' = f_1' - f_2' = 362\ \mathrm{Hz} - 287\ \mathrm{Hz} = 75{,}7\ \mathrm{Hz} = 76\ \mathrm{Hz}$$

Oppgave 27, versjon 1

Den laveste harmoniske tonen ($n = 1$) utspennes av en halv bølgelengde λ over lengden L av strengen. Det vil si:

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{\mathrm{v}}{2f} = \frac{330\ \mathrm{m/s}}{2 \cdot 440\ \mathrm{Hz}} = 0{,}375\ \mathrm{m}$$

Oppgave 27, versjon 2

Den laveste tonen har en bølgelengde λ som er lik halvparten av gitarhalsens lengde L. Det vil si:

Frekvensen til de stående bølgende er tilsvarende:

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}70\ \mathrm{m}} \cdot \sqrt{\frac{25\ \mathrm{N}}{0{,}150\ \mathrm{kg/m}}} = 9{,}2\ \mathrm{Hz}$$

Oppgave 28, versjon 1

Lydintensiteten er gitt ved

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

der $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$. For henholdsvis musikkanlegg 1 og musikkanlegg 2 er

$$\beta_1 = 10 \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \qquad \text{og} \qquad \beta_2 = 10 \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\beta_2 - \beta_2 &= 10(\log I_2 - \log I_0) - 10(\log I_1 - \log I_0)\\ &= 10\,(\log I_2 - \log I_1)\\ &= 10 \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = \frac{\beta_2 - \beta_1}{10} = \frac{93{,}0\ \mathrm{dB} - 90{,}0\ \mathrm{dB}}{10} = 0{,}30$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^{0.30} = 1{,}995 = 2{,}0$$
