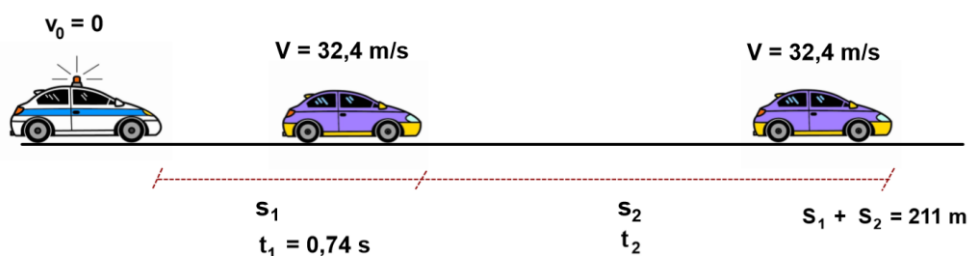


Løsningsforslag eksamen august 2022.

Oppgave 1



Før politibilen rekker å komme i bevegelse har den andre bilen beveget seg en distanse

$$s_1 = v \cdot t_1 = 32,4 \text{ m/s} \cdot 0,74 \text{ s} = 24,0 \text{ m}$$

Tiden som politibilen dermed har til rådighet for å tilbakelegge distansen $s_1 + s_2 = 211 \text{ m}$ er den samme tiden som den andre bilen bruker på å tilbakelegge distansen $s_2 = 211 \text{ m} - 24,0 \text{ m} = 187 \text{ m}$. Det vil si:

$$t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{187 \text{ m}}{32,4 \text{ m/s}} = 5,77 \text{ s}$$

Politibilens akselerasjon blir dermed:

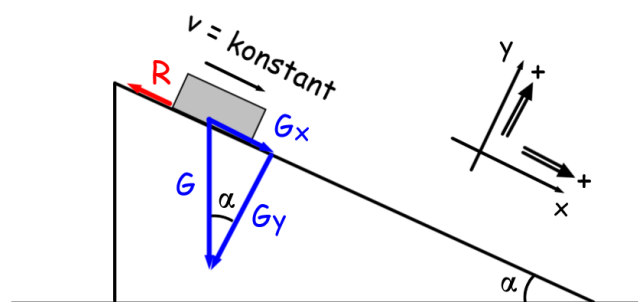
$$s_1 + s_2 = \frac{1}{2}at_2^2 \Rightarrow a = \frac{2(s_1 + s_2)}{t_2^2} = \frac{2 \cdot 211 \text{ m}}{(5,77 \text{ s})^2} = 12,7 \text{ m/s}^2$$

Oppgave 2

Endringen i gokartens fart v over akselerasjonsperioden på 5.0 sekunder er

$$v(5) = \int_0^5 a(t) dt = \int_0^5 8.0 \sin\left(\frac{\pi t}{5}\right) dt = -\left[\frac{40}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right]_0^5 = \frac{80}{\pi} \text{ m/s} \approx 92 \text{ km/t}$$

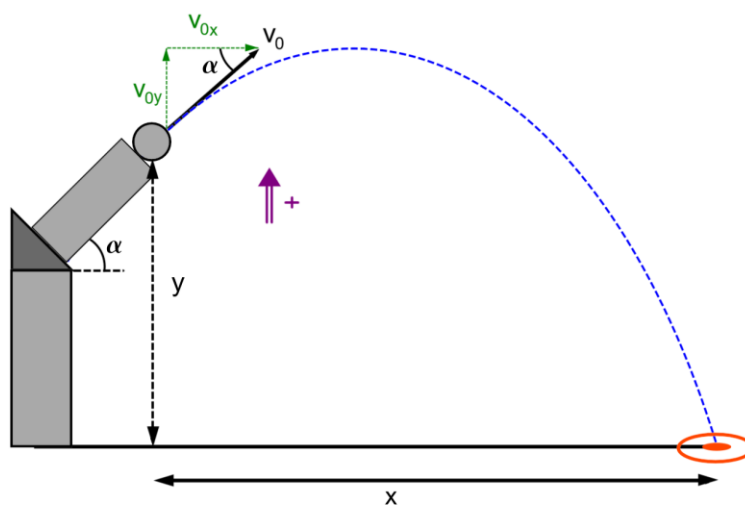
Oppgave 3



Newtons 2.lov med hensyn på klossens bevegelse nedover skråplanet er gitt ved:

$$\begin{aligned}\sum F &= G_x - R = G_x - \mu_k G_y = ma \\ \Rightarrow mg \sin \alpha - \mu_k mg \cos \alpha &= ma \\ \Rightarrow g \sin \alpha - \mu_k g \cos \alpha &= a \\ \Rightarrow \mu_k &= \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha} = \tan \alpha - \frac{a}{g \cos \alpha} \\ \Rightarrow \mu_k &= \tan 22^\circ - \frac{0,94 \text{ m/s}^2}{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 22^\circ} = 0,30\end{aligned}$$

Oppgave 4



Kulas bevegelse i henholdsvis x - og y -retningen rett etter utskytingen er:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Tiden t finner vi fra den horisontale bevegelsesligningen der:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

Setter denne ligningen inn i bevegelsesligningen for y -retningen:

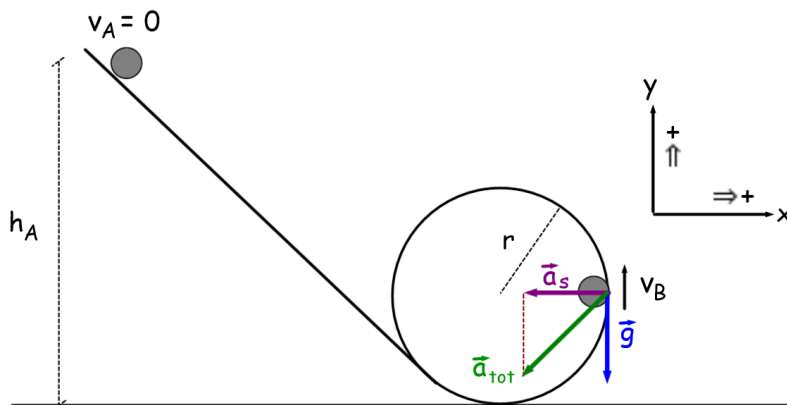
$$y = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

$$= x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} + \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Oppgave 5



Sentripetalakselerasjonen a_s til legemet i posisjon B er gitt ved:

$$a_s = \frac{v_B^2}{r}$$

Farta v_B finner vi fra energiloven der:

$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg(h_A - r) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgr \Rightarrow v_B^2 = 2gr$$

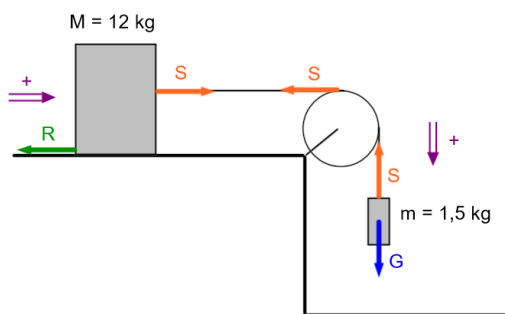
som innsatt gir:

$$a_s = \frac{2gr}{r} = 2g$$

Legemets totale akselerasjon blir dermed ut fra vektordiagrammet og valg av positiv retning i figuren over:

$$\vec{a}_{tot} = -2g\vec{i} - g\vec{j}$$

Oppgave 6



Newtons 2.lov (eller 1.lov) for dette systemet gir at:

$$mg - S = 0 \quad (1)$$

$$S - \mu_s Mg = 0 \quad (2)$$

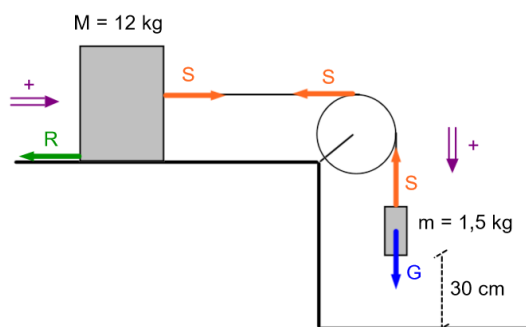
Ut fra ligning (1) er

$$S = mg$$

Innsatt i ligning (2) gir dette direkte at:

$$\mu_s = \frac{S}{Mg} = \frac{mg}{Mg} = \frac{m}{M} = \frac{1,5 \text{ kg}}{12 \text{ kg}} = 0,125$$

Oppgave 7



Friksjonskoeffisienten knyttet til friksjonskrafta mellom underlaget og massen M er $\mu_k = 0,10$.

Newtons 2.lov for begge legemer gir at:

$$mg - S = ma \quad (1)$$

$$S - \mu_k Mg = Ma \quad (2)$$

Setter ligning (2) inn i ligning (1):

Loddens akselerasjon a blir ut fra dette:

$$mg - M(a + \mu_k g) = ma$$

↓

$$a(m + M) = g(m - \mu_k M)$$

↓

$$a = \frac{m - \mu_k M}{m + M} g$$

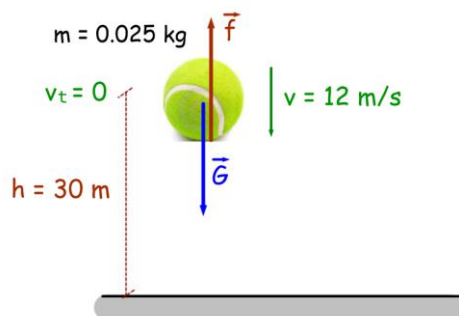
Denne akselerasjonen er konstant så tiden lodd m bruker å nå ned til bakken er:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{g(m - \mu_k M)}{2(m + M)} \cdot t^2$$

↓

$$t = \sqrt{\frac{2s(m + M)}{g(m - \mu_k M)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,30 \text{ m} \cdot (1,5 \text{ kg} + 12 \text{ kg})}{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (1,5 \text{ kg} - 0,10 \cdot 12 \text{ kg})}} = 1,659 \text{ s} \approx 1,7 \text{ s}$$

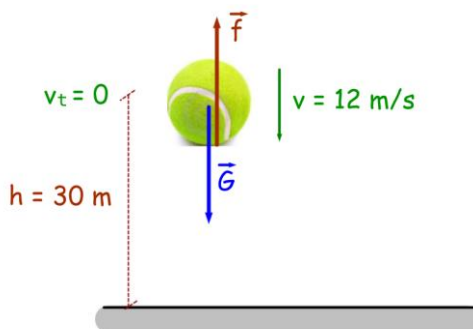
Oppgave 8



Newtons 1.lov gir direkte at:

$$G - f = 0 \Rightarrow mg = bv \Rightarrow b = \frac{mg}{v} = \frac{0,025 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{12 \text{ m/s}} = 0,0204 \text{ kg/s} \approx 20 \text{ g/s}$$

Oppgave 9



Tennisballens holdes i ro på toppen av banen. Den har da en total mekanisk energi lik:

$$U = mgh_t$$

Tennisballens kinetiske energi idet den når terminalhastigheten v er videre gitt ved:

$$U - E_{K,t} \neq 0$$

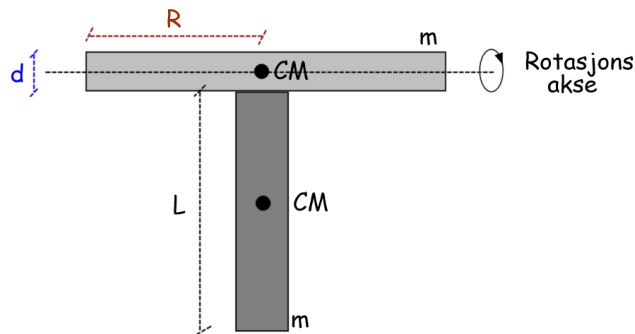
Mengden energi som går tapt underveis i fallbevegelsen blir dermed:

$$\frac{U - E_{K,t}}{U} = \frac{mgh_t - \frac{1}{2}mv^2}{mgh_t} = 1 - \frac{v^2}{2gh_t} = 1 - \frac{(12 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 30 \text{ m}} = 0,755 \approx 0,76$$

Det vil si: 76% av den totale mekaniske energien går tapt.

Rotasjonsmekanikk!

Oppgave 10



Den horisontale sylinderformede staven med akse gjennom massemiddepunktet har treghetsmoment:

$$I_1 = \frac{1}{2}m \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}md^2$$

Den vertikale sylinderformede staven som er festet på undersiden av den horisontale staven har et treghetsmoment (Steiners setning):

$$I_2 = m\left(\frac{L}{2} + \frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}mL^2$$

Treghetsmoment for hele T-nøkkelen blir dermed av størrelsesorden:

$$\begin{aligned} I_{tot} &= I_1 + I_2 = \frac{1}{8}md^2 + \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{2}Ld + \frac{1}{4}d^2\right) \\ \Rightarrow &= \frac{1}{8}md^2 + \frac{1}{4}md^2 + \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 + \frac{1}{2}mLd \\ \Rightarrow &= \frac{3}{8}md^2 + \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{2}mLd \end{aligned}$$

Oppgave 11



$$\begin{aligned}\omega &= 200 \text{ rpm} \\ d &= 0,75 \text{ m} \\ t &= 60 \text{ s}\end{aligned}$$

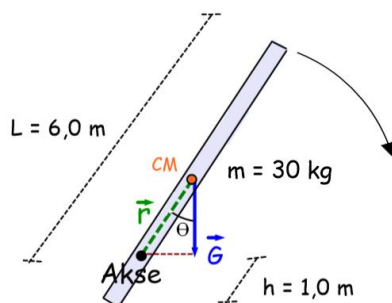
Syklistens lineære hastighet v er:

$$v = \frac{d}{2} \cdot \omega = \frac{d}{2} \cdot \frac{200 \cdot 2\pi}{60 \text{ s}} = \frac{0,75 \text{ m} \cdot 200 \cdot 2\pi}{120 \text{ s}} = 7,85 \text{ m/s}$$

Distansen s sykelisten forflytter seg i løpet av ett minutt blir dermed:

$$s = v \cdot t = 7,85 \text{ m/s} \cdot 60 \text{ s} = 471 \text{ m}$$

Oppgave 12



Kraftmomentet τ er gitt ved:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau(\theta) = r \cdot F \cdot \sin \theta$$

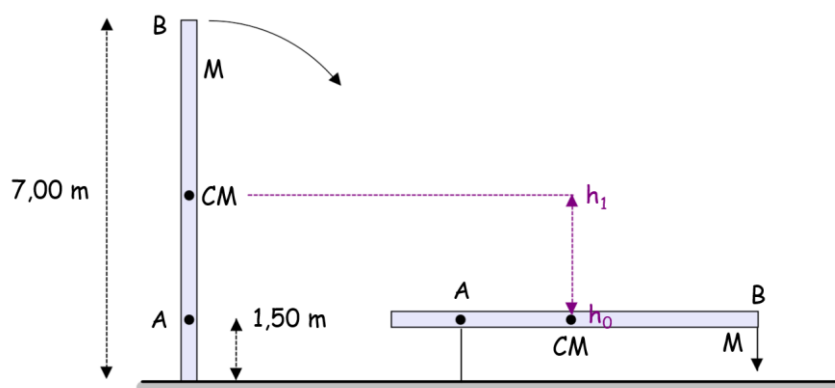
Uttrykket for kraftmomentet over angir at τ er en variabel størrelse med hensyn på vinkelen θ . Det infinitesimale mekaniske arbeidet dW utført over en infinitesimal rotasjon $d\theta$ er dermed gitt ved:

$$dW = \tau(\theta)d\theta$$

Det totale mekaniske arbeidet W etter en rotasjon på 60° blir dermed:

$$\begin{aligned}W &= \int_0^{60^\circ} r \cdot F \cdot \sin \theta \, d\theta = \left(\frac{L}{2} - h\right) \cdot G \int_0^{60^\circ} \sin \theta \, d\theta \\ &= \left(\frac{L}{2} - h\right) G [-\cos \theta]_0^{60^\circ} = \left(\frac{L}{2} - h\right) mg (-\cos 60^\circ + \cos 0^\circ) \\ &= \left(\frac{6,0 \text{ m}}{2} - 1,0 \text{ m}\right) \cdot 30 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (-\cos 60^\circ + 1) = 294 \text{ J}\end{aligned}$$

Oppgave 13



Etttersom stanga har jevn massefordeling, befinner stangas massemidelpunkt seg nøyaktig på midten av stanga. Settes nullhøyden ved bakken er stangas potensielle energi før den faller dermed gitt ved:

$$U_1 = \frac{MgL}{2} = \frac{30\text{ kg} \cdot 9,81\text{ m/s}^2 \cdot 7,00\text{ m}}{2} = 1030\text{ J}$$

Idet den befinner seg i horisontalstillingen, har den en tilsvarende potensiell energi:

$$U_0 = Mgh_0 = 30\text{ kg} \cdot 9,81\text{ m/s}^2 \cdot 1,50\text{ m} = 441,5\text{ J}$$

Stangas treghetsmoment I om aksepunktet A finner ved bruk av Steiners sats:

$$\begin{aligned} I &= M(h_1 - h_0)^2 + \frac{1}{12}ML^2 \\ &= 30\text{ kg} \cdot (3,50\text{ m} - 1,50\text{ m})^2 + \frac{1}{12} \cdot 30\text{ kg} \cdot (7,00\text{ m})^2 = 242,5\text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

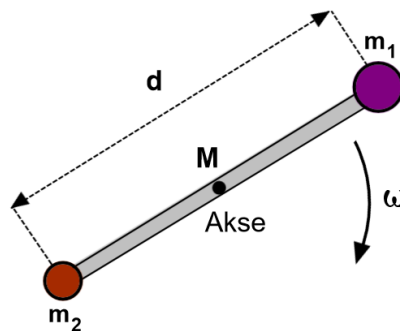
Stangas vinkelhastighet ω finner vi ut fra at den totale mekaniske energien er bevart:

$$\begin{aligned} K_0 &= U_1 - U_0 \Rightarrow I\omega^2 = 2(U_1 - U_0) \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{2(U_1 - U_0)}{I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1030\text{ J} - 441,5\text{ J})}{242,5\text{ kgm}^2}} = 2,20\text{ 1/s} \end{aligned}$$

Den lineære hastigheten som toppen av flaggstanga har idet den ligger horisontalt er dermed:

$$v = (L - h_0) \cdot \omega = 12,1\text{ m/s}$$

Oppgave 14



Stavens dreieimpuls om aksen er gitt ved:

$$L = I\omega$$

Stavens treghetsmoment I finner vi fra Steiners setning der:

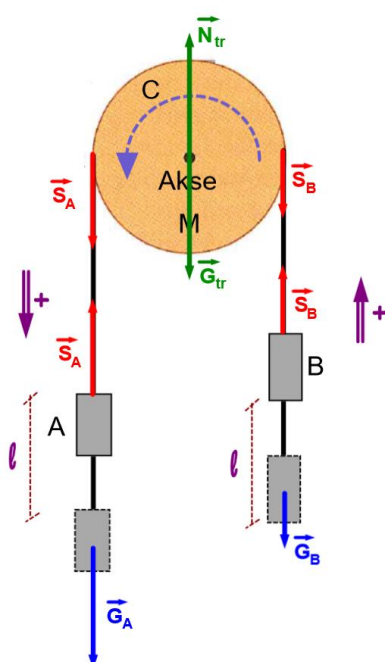
$$I = \frac{1}{12}Md^2 + m_1 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 + m_2 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4} \left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)$$

Dreieimpulsen L blir dermed:

$$L = \frac{d^2}{4} \left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right) \omega$$

$$= \frac{(1,2 \text{ m})^2}{4} \cdot \left(\frac{10 \text{ kg}}{3} + 1,0 \text{ kg} + 2,0 \text{ kg}\right) \cdot 12 \text{ 1/s} = 27,4 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

Oppgave 15



Det mekaniske arbeidet W som de to loddene til sammen utfører på trinsa er gitt ved:

$$W = \tau \cdot \theta = (S_A - S_B)R \cdot \theta$$

$$\Rightarrow (S_A - S_B)R \cdot \frac{l}{R} = (S_A - S_B) \cdot l$$

Snordragene S_A og S_B finner vi ved å anvende Newtons 2.lov basert på kraftdiagrammet i figuren til venstre der

$$S_B - G_B = m_B a \quad (2)$$

$$G_A - S_A = m_A a \quad (3)$$

Fra ligning (2) og (3) finner vi de to snordragene S_A og S_B der:

$$S_B = m_B a + m_B g = \frac{m_A(a + g)}{2}$$

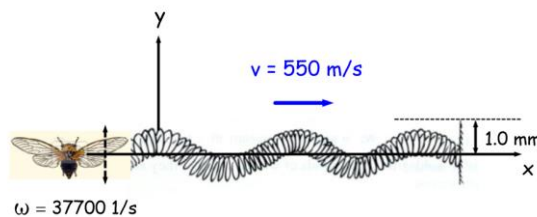
$$S_A = m_A g - m_A a = m_A(g - a)$$

Ved å sette inn disse uttrykkene for S_A og S_B finner vi at det mekaniske arbeidet W på trinsa er:

$$\begin{aligned} W &= \left(m_A(g - a) - \frac{m_A(a + g)}{2} \right) \cdot l \\ &= m_A \left(g - \frac{g}{2} - a - \frac{a}{2} \right) \cdot l = \frac{m_A \cdot l}{2} (g - 3a) \end{aligned}$$

Mekaniske bølger!

Oppgave 17



Bølgas vinkelfrekvens ω er gitt ved:

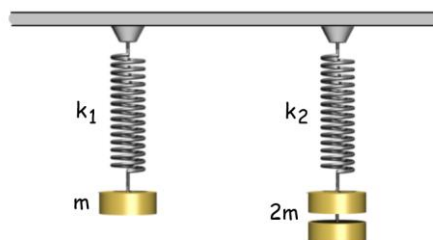
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{v}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 550 \text{ m/s}}{3,77 \cdot 10^4 \text{ 1/s}} = 0,0917 \text{ m} \approx 9,2 \text{ cm}$$

Oppgave 18

Den totale energien som sikaden produserer for å gjennomføre 1000 hele svingninger er

$$E_{tot} = 1000 \cdot \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 25 \text{ N/m} \cdot (1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

Oppgave 19



Frekvensen til en harmonisk svingning er generelt gitt ved:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Har oppgitt at lodd-fjær systemet til venstre har en frekvens f_1 som er 5 ganger høyere enn den tilsvarende frekvensen f_2 for systemet til høyre. Det vil si:

$$\begin{aligned} f_1 = 5f_2 &\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 5 \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \\ &\Rightarrow \frac{k_1}{m_1} = 25 \cdot \frac{k_2}{m_2} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = 25 \cdot \frac{m_1}{m_2} \end{aligned}$$

Med $m_2 = 2m_1$ blir dermed forholdet mellom fjærstivhetene av størrelsesorden:

$$\frac{k_1}{k_2} = 25 \cdot \frac{m_1}{2m_1} = 12.5$$

Oppgave 20

Når to identiske bølger med motsatt fartsretning møtes, vil det oppstå stående bølger. Resultantbølgen er gitt ved

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

der bølgetallet $k = 2\pi/\lambda$ er identisk med bølgetallet k for de to individuelle bølgene som produserer den stående bølga. Ettersom k ikke endrer seg vil heller ikke bølgelengden λ endre seg. Med andre ord: Det resulterende bølgemønsteret er en stående bølge med bølgelengde lik λ .

Oppgave 21



Grunnfrekvensen til strengen er gitt som:

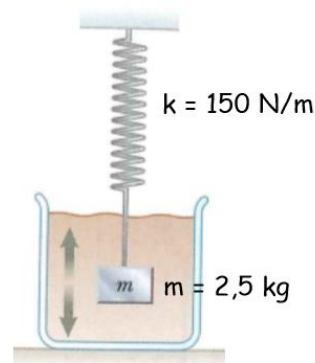
$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

der L er strengens lengde, F er krafta som spenner opp strengen i festepunktene og $\mu = m/L$ er strengens lineære massetetthet. Strenges snorstramming F er ut fra denne sammenhengen

$$(2fL)^2 = \frac{F}{\mu} \Rightarrow F = \frac{m}{L} \cdot 4L^2 f^2 = 4mLf^2$$

$$\Rightarrow F = 4 \cdot 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 0,70 \text{ m} \cdot 92,5 \text{ Hz} = 1,10 \cdot 10^2 \text{ N}$$

Oppgave 22



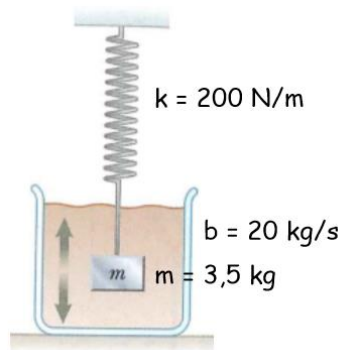
Loddet utfører dempede svingninger så lenge betingelsen:

$$b^2 < 4mk \Rightarrow b < \sqrt{4mk}$$

er oppfylt. Her er b væskas dempningskoeffisient, m er loddets masse og k er fjæras stivhet. Med andre ord: Dempede svingninger oppstår når:

$$b < \sqrt{4 \cdot 2,5 \text{ kg} \cdot 150 \text{ N/m}} = 38,7 \text{ kg/s}$$

Oppgave 23



Svingefunksjonen er oppgitt til å være på formen:

$$y(t) = A(t) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}t + \phi\right) = A(t) \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

der $A(t)$ angir amplituden som funksjon av tiden t . Ut fra dette uttrykket kan vi hente ut svingefrekvensen som er gitt ved

$$\omega = \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Med de oppgitte verdiene for dempningskoeffisienten b , loddets masse m og fjærstivheten k blir

$$b^2 - 4mk < 0$$

noe som medfører at ω blir en kompleks størrelse. Svingefrekvensen er av denne grunn gitt som en kvasifrekvens ω_D der:

$$\omega_D = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3,5 \text{ kg} \cdot 200 \text{ N/m} - (20 \text{ kg/s})^2}}{2 \cdot 3,5 \text{ kg}} = 7,0 \text{ 1/s}$$