Løsningsforslag eksamen høsten 2022

Oppgave 1 (enheter)

Vet at $1.0\ \mathrm{mm} = 10^{-3}\ \mathrm{m}$ og at $1.0\ \mathrm{h} = 3600\ \mathrm{s}$. Dette gir direkte at:

$$1.0\ \mathrm{mm/h^2} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}{(3600\ \mathrm{s})^2} = 7.7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m/s^2}$$

Oppgave 2 (Vertikalt kast)

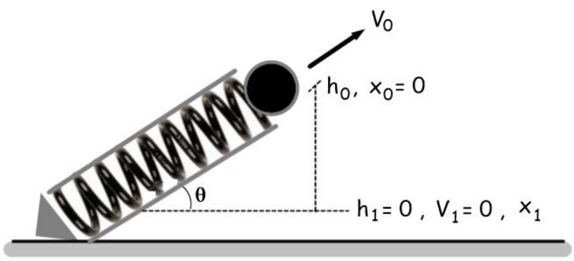
Foreleseren beveger seg strekningen $s = \mathrm{v} \cdot t$ framover mot treffpunktet. Tiden t som egget bruker ned fra din posisjon i vinduet til treffpunktet er tilsvarende:

$$h = \mathrm{v}_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Over det samme tidsrommet beveger foreleseren seg distansen

$$s = \mathrm{v} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1{,}20 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{35{,}0\ \mathrm{m} - 1{,}80\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}} = 3{,}12\ \mathrm{m}$$

Oppgave 3 (Energiloven med tyngdekraft og fjær)



Posisjon (1): sammenklemt.

$$\frac{1}{2} m\mathrm{v}_1^2 + mgh_1 + \frac{1}{2} k l^2 = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_0^2 + mgh_0 + \frac{1}{2} k l_0^2$$

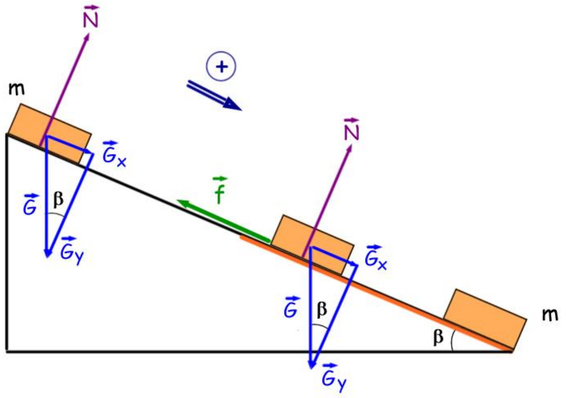
$$\frac{1}{2} k l^2 = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_0^2 + mgh_0$$

$$\frac{1}{2} k l^2 = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_0^2 + mg(l \sin\theta)$$

$$k l^2 = m\mathrm{v}_0^2 + 2mg(l \sin\theta)$$

$$k = \frac{m(\mathrm{v}_0^2 + 2gl \sin\theta)}{l^2}$$

Oppgave 4 (Friksjonskrefter)



Akselerasjonen på den nedre seksjonen med friksjon er gitt ved:

$$G_x - f = ma_{nedre} \quad \Rightarrow \quad mg\sin\beta - \mu_k mg\cos\beta = ma_{nedre}$$

$$\Rightarrow \quad a_{nedre} = g(\sin\beta - \mu_k\cos\beta)$$

Den tilsvarende akselerasjonen på den øvre seksjonen er da med $\mu_k = 0$:

$$a_{øvre} = g\sin\beta$$

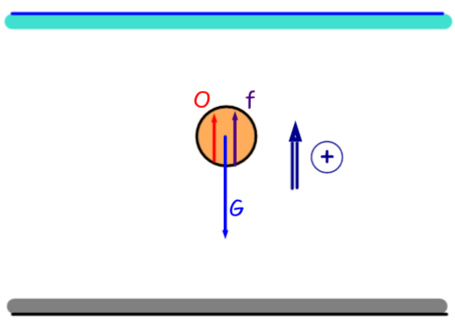
For at klossen akkurat skal stoppe må akselerasjonen på den nedre delen ha samme verdi som akselerasjonen på den øvre delen, men der retningen på den nedre delen er motsatt rettet. Med andre ord:

$$a_{øvre} = -a_{nedre} \quad \Rightarrow \quad g\sin\beta = -g(\sin\beta - \mu_k\cos\beta)$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\beta = \mu_k\cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad \mu_k = 2\tan\beta$$

Oppgave 5 (Stokes lov)



Leirpartiklene vil på grunn av gravitasjonen etter en stund oppnå sin terminalfart v ned gjennom vannet hvor farta er konstant. Ut fra Newtons 1. lov må da kreftene som virker på partiklene oppfylle:

$$F_{friksjon} + F_{oppdrift} - F_{gravitasjon} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 6\pi\mu r \cdot \mathrm{v} + \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot (\rho_{vann} - \rho_{leire})g = 0$$

Med en diameter på $d = 2r$ blir

$$\mathrm{v} = -\frac{4\pi r^3(\rho_{vann} - \rho_{leire})g}{3 \cdot 6\pi\mu r} = \frac{2gr^2}{9\mu}(\rho_{leire} - \rho_{vann}) = \frac{gd^2}{18\mu}(\rho_{leire} - \rho_{vann})$$

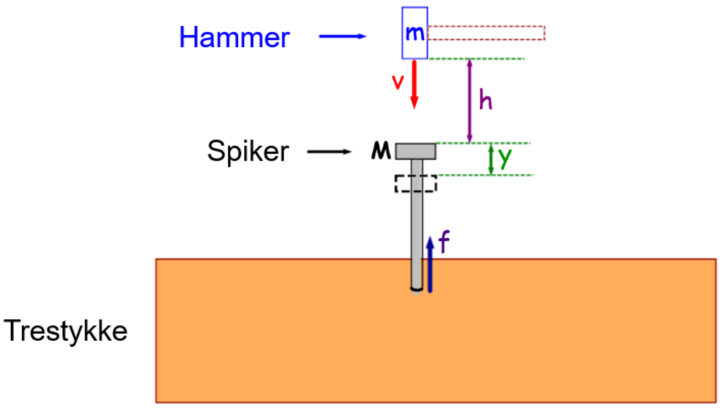
Setter inn kjente verdier:

$$\mathrm{v} = \frac{9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot (5{,}0 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m})^2}{18 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/ms}} \cdot (2650\ \mathrm{kg/m^3} - 1000\ \mathrm{kg/m^3}) = 0{,}22\ \mathrm{m/s}$$

Å synke s = 1,0 m tar dermed:

$$t = \frac{s}{\mathrm{v}} = \frac{1{,}0\ \mathrm{m}}{0{,}22\ \mathrm{m/s}} = 4{,}5\ \mathrm{s}$$

Oppgave 6 (Fullstendig uelastisk støt, mekanisk arbeid, friksjonskrefter)



Under støtprosessen mellom hammeren og spikerhodet er bevegelsesmengden før og etter støtet bevart. Ettersom støtet er fullstendig uelastisk og $m \gg M$ innebærer dette at:

$$m \cdot \mathrm{v}_f = (m + M)\,\mathrm{v}_e \approx m \cdot \mathrm{v}_e \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_f \approx \mathrm{v}_e$$

Friksjonskrafta f som virker fra treverket på spikeren finner vi ved å utnytte at det mekaniske arbeidet W som denne friksjonskrafta utøver har samme absoluttverdi som den totale mekaniske energien som benyttes for å drive spikeren en distanse y ned i treverket:

$$W = f \cdot y = E_{tot} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + mgy$$

Vi har her for enkelhetsskyld satt at $\mathrm{v}_f \approx \mathrm{v}_e = \mathrm{v}$. Ut fra denne sammenhengen får vi direkte at:

$$f = \frac{m}{2y}\mathrm{v}^2 + mg$$

Hammerhodets fart v før støtet finner vi ved å bruke bevaring av den totale mekaniske energien for en fallbevegelse i tyngdefeltet:

$$\mathrm{v}^2 = 2gh$$

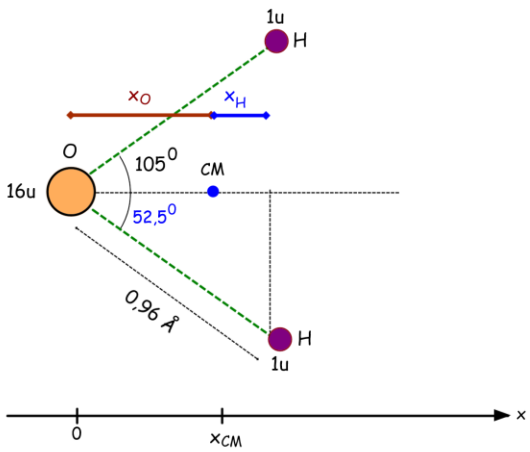
Settes dette inn ender vi opp med:

$$f = \frac{m}{2y} \cdot 2gh + mg = mg\left(1 + \frac{h}{y}\right)$$

Med $y = 0{,}015\ \mathrm{m}$ og $h = 1{,}83\ \mathrm{m}$ gir dette en friksjonskraft av størrelsesorden:

$$f = mg\left(1 + \frac{h}{y}\right) = 0{,}70\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot \left(1 + \frac{1{,}83\ \mathrm{m}}{0{,}015\ \mathrm{m}}\right) = 845\ \mathrm{N}$$

Oppgave 7 (Massemiddelpunkt, diskret massefordeling)



Vi summerer kraftmomentene fra hvert enkelt av de tre atomene omkring molekylets massemiddelpunkt x_{CM}. Vi plasserer x-aksen slik at oksygenatomet har x-koordinat $x = 0$. Krafta som virker på dette atomet, har dermed ei arm $x_O = x_{CM}$. Krafta som virker på hvert enkelt hydrogenatom, har ei tilsvarende arm lik x_H (se figuren over). Ettersom kraftmomentet på oksygenatomet gir en rotasjon mot klokka samt at kraftmomentet på hvert av de to hydrogenatomene gir en rotasjon med klokka kan vi sette opp at:

$$m_O x_{CM} = 2m_H x_H$$

$$\Rightarrow \qquad m_O x_{CM} = 2m_H(0{,}96\ \text{Å} \cdot \cos(52{,}5^0) - x_{CM})$$

$$\Rightarrow \qquad (m_O + 2m_H)\, x_{CM} = 1{,}17\ \text{Å}\, m_H$$

$$\Rightarrow \qquad x_{CM} = \frac{1{,}17\ \text{Å}\, m_H}{m_O + 2m_H} = \frac{1{,}17\ \text{Å} \cdot 1u}{16u + 2u} = 0{,}065\ \text{Å}$$

Oppgave 8

Det totale antall dusjer du gjennomfører i løpet av hele desember måned er

$$31 \text{ dager} \cdot 2 \text{ dusjer/dag} = 62 \text{ dusjer}$$

Hver enkelt dusj krever et energiforbruk på 3.0 kWh /dusj. Dusjingen krever dermed totalt sett et energiforbruk på

$$62 \text{ dusjer} \cdot 3.0 \text{ kWh/dusj} = 186 \text{ kWh}$$

Med en pris på $3{,}5 \text{ kr/dusj}$ gir dette en kostnad på:

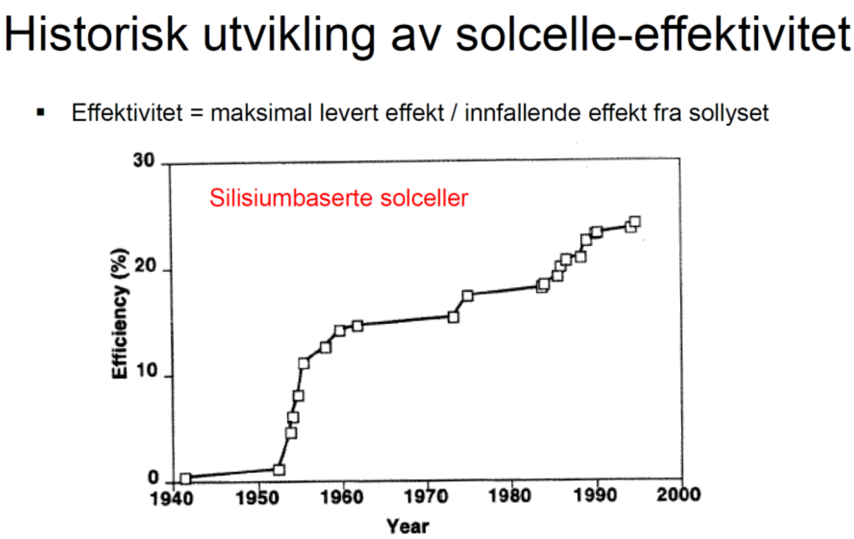
$$186 \text{ kWh} \cdot 3{,}5 \text{ kr/kWh} = 651 \text{ kr}$$

(Med litt termodynamikk finner du ut at hver enkelt dusj tar ca. 8 minutter)

Oppgave 9

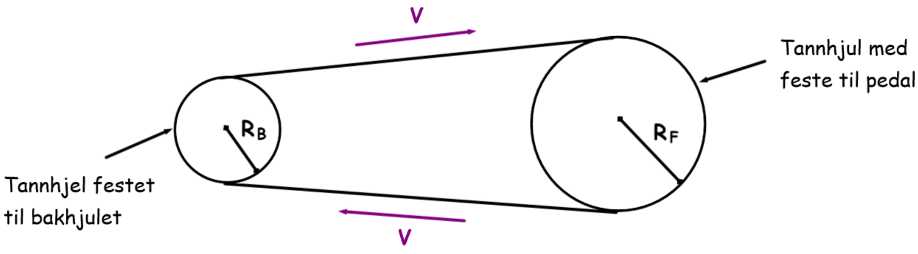
Blått hydrogen krever fangst og lagring av CO_2.

Oppgave 10



Rotasjonsmekanikk

Oppgave 11 (Sammenheng mellom lineær hastighet og rotasjonshastighet)



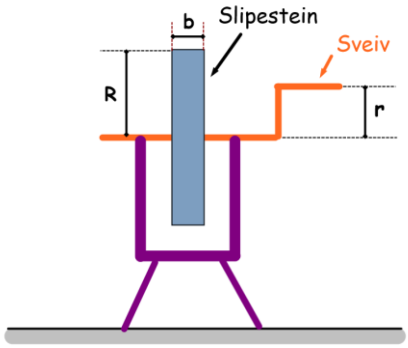
Vinkelakselerasjonene α_B og α_F til henholdsvis det bakre og fremre tannhjulet idet den lineære farta v til kjedet øker finner vi ved å innse at v alltid har samme verdi over begge tannhjulene. Det vil si:

$$\mathrm{v} = R_B\omega_B = R_F\omega_F \quad \Rightarrow \quad \omega_B = \frac{R_F}{R_B}\cdot\omega_F \quad \Rightarrow \quad \omega_B > \omega_F$$

Av definisjonen for vinkelakselerasjonen α følger at:

$$\alpha_B = \frac{d\omega_B}{dt} = \frac{R_F}{R_B}\cdot\frac{d\omega_F}{dt} = \frac{R_F}{R_B}\cdot\alpha_F \quad \Rightarrow \quad \alpha_B > \alpha_F$$

Oppgave 12 (Dreiemoment og vinkel-akselerasjon)



Kraftmomentet på slipesteinen finner vi ved å benytte rotasjonsdynamikken grunnlov:

$$\tau = F\cdot r = I\cdot\alpha$$

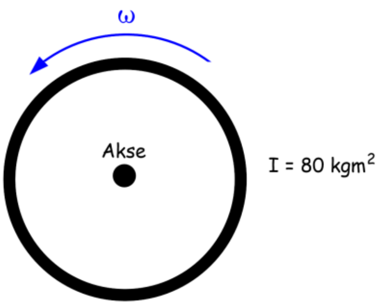
Slipesteinens vinkeakselerasjon α er ut fra dette gitt ved:

$$\alpha = \frac{F\cdot r}{I} = \frac{F\cdot r}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2F\cdot r}{\rho\cdot\pi R^2\cdot b\cdot R^2} = \frac{2F\cdot r}{\pi b\rho R^4}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \frac{2 \cdot 200\ \mathrm{N} \cdot 0{,}20\ \mathrm{m}}{\pi \cdot 0{,}15\ \mathrm{m} \cdot 2500\ \mathrm{kg/m^3} \cdot (0{,}25\ \mathrm{m})^4} = 17{,}4\ 1/\mathrm{s}^2$$

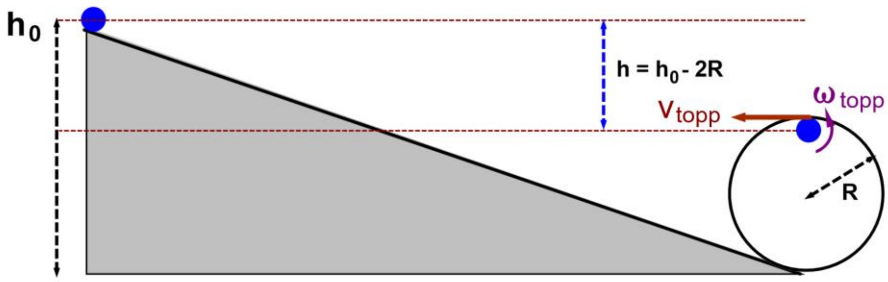
Oppgave 13 (Kinetisk rotasjonsenergi)



Hjulet gjennomfører kun en rotasjonsbevegelse. Hjulets totale kinetiske energi er dermed gitt ved:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 80\ \mathrm{kg\ m^2} \cdot \left(600 \cdot \frac{2\pi}{60}\ 1/\mathrm{s}\right)^2 = 1{,}58 \cdot 10^5\ \mathrm{J}$$

Oppgave 14 (Energibevaring med rullende kule)



Bruker loven om bevaring av den totale mekanisk energien, kombinert med at $\mathrm{v} = r\omega$ siden kula ruller rent, til å finne banehastigheten v i på toppen av loopen:

$$\frac{1}{2} m\mathrm{v}_0^2 + \frac{1}{2} I\omega_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_{topp}^2 + \frac{1}{2} I\omega_{topp}^2 + mgh_{topp}$$

$$\Downarrow$$

$$mgh_0 = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_{topp}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} mr^2 \cdot \left(\frac{\mathrm{v}_{topp}}{r}\right)^2 + mg \cdot 2R$$

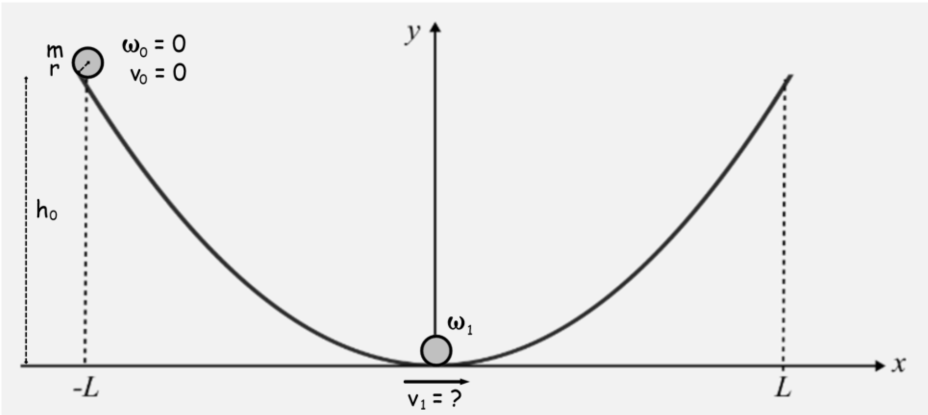
$$\Downarrow$$

$$g(h_0 - 2R) = \mathrm{v}_{topp}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{16}\right) = \frac{11}{16}\ \mathrm{v}_{topp}^2$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{v}_{topp} = \sqrt{\frac{16}{11}\ g(h_0 - 2R)}$$

Oppgave 15 (rullende legeme (labb))



Bevaring av den totale mekaniske energien gir at:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2 + mgh_0 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + mgh_1 + \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

Med $\mathrm{v}_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ og $h_1 = 0$ forenkles denne ligningen ned til:

$$mgh_0 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

Treghetsmomentet til den massive kula er videre gitt ved:

$$I = \frac{2}{5}mr^2$$

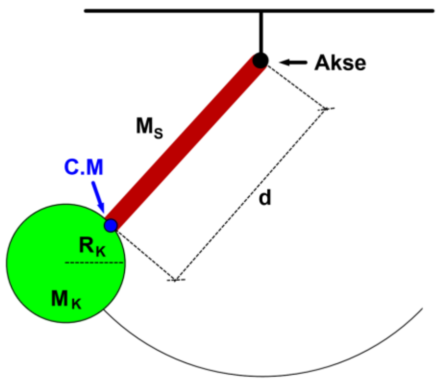
Brukes i tillegg rullebetingelsen $\mathrm{v} = r\omega$, kan denne siste ligningen omskrives til kun å inneholde banefarta v_1:

$$gh_0 = \frac{1}{2}\mathrm{v}_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}r^2\cdot\left(\frac{\mathrm{v}_1}{r}\right)^2 = \frac{7}{10}\,\mathrm{v}_1^2$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{v}_1 = \sqrt{\frac{10}{7}gh_0} = \sqrt{\frac{10}{7}g\cdot\frac{y_0(-L)^2}{L^2}} = \sqrt{\frac{10}{7}gy_0}$$

Oppgave 16 (Treghetsmoment)



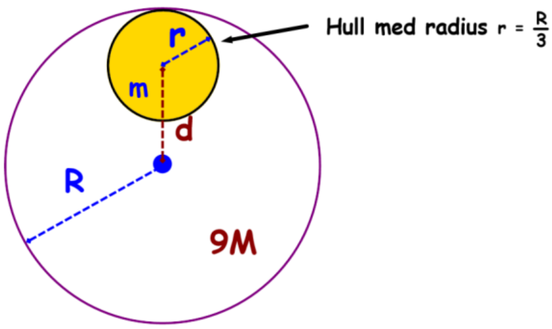
Den stive pendelen består av to massive gjenstander, henholdsvis en massiv stav med masse $M_S = 2{,}00$ kg og lengde $d = 0{,}700$ m samt ei massiv kule med radius $R_K = 0{,}100$ m og masse $M_K = 7{,}00$ kg. Siden kula har en utstrekning R_K og samtidig roterer om samme akse som staven må vi benytte parallell-akse setningen på kula. Dermed er treghets-momentet I til det stive legemet av størrelsesorden:

$$I = I_S + I_{kulesenter} + I_{kule} = \frac{1}{3}M_S d^2 + M_K(d + R_K)^2 + \frac{2}{5}M_K R_K^2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2{,}0 \text{ kg} \cdot (0{,}70 \text{ m})^2 + 7.0 \text{ kg} \cdot (0{,}70 \text{ m} + 0{,}10 \text{ m})^2 + \frac{2}{5} \cdot 7.0 \text{ kg} \cdot (0{,}10 \text{ m})^2$$

$$= 4{,}83 \text{ kgm}^2$$

Oppgave 17 (Treghetsmoment)



Treghetsmomentet I_s for ei solid skive uten dette hullet er:

$$I_s = \frac{1}{2}(9M)R^2 = \frac{9}{2}MR^2$$

Vi kan videre modellere et treghetsmoment I_h for hullet ved å se på hullet som ei solid skive som er skåret ut fra den større solide skiva. Massen m til dette utskårede stykket finner vi ved å ta utgangspunkt i at massetettheten σ er den samme for begge skivene. Det vil si:

$$\frac{9M}{\pi R^2} = \frac{m}{\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2} = \frac{9m}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad m = M$$

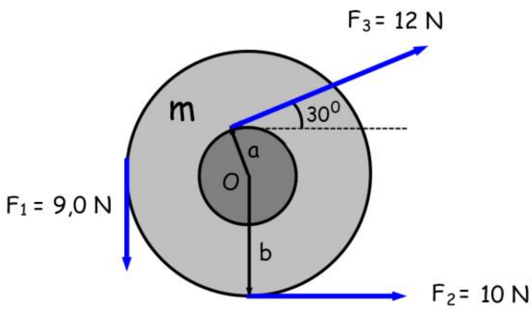
Treghetsmomentet for dette massestykket finner vi ved å anvende Steiners sats:

$$I_h = md^2 + \frac{1}{2}mr^2 = M\left(\frac{2}{3}R\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{R}{3}\right)^2 = MR^2\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{18}\right) = \frac{1}{2}MR^2$$

Treghetsmomentet til skiva med hullet er dermed:

$$I_{tot} = I_s - I_h = \frac{9}{2}MR^2 - \frac{1}{2}MR^2 = \frac{8}{2}MR^2 = 4MR^2$$

Oppgave 18 (Mekanisk rotasjonsarbeid)



Det totale dreiemomentet på hjulet er (velger positiv retning mot klokka):

$$\sum\tau = F_1 \cdot b + F_2 \cdot b - F_3 \cdot a$$
$$= 9{,}0\ \mathrm{N} \cdot 0{,}25\ \mathrm{m} + 10\ \mathrm{N} \cdot 0{,}25\ \mathrm{m} - 12\ \mathrm{N} \cdot 0{,}10\ \mathrm{m} = 3{,}55\ \mathrm{Nm}$$

Det mekaniske arbeidet W som dette totale kraftmomentet har utøvd på skiva etter at den har rotert én hel runde er videre

$$W = \sum\tau \cdot \theta = 3{,}55\ \mathrm{Nm} \cdot 2\pi = 22{,}3\ \mathrm{J}$$

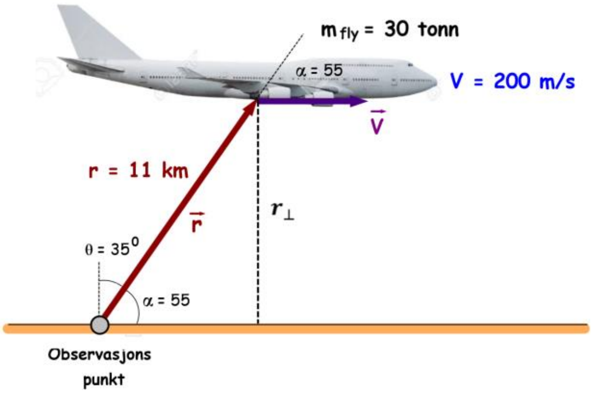
Ettersom treghetsmomentet I til den massive skiva er gitt ved

$$I = \frac{1}{2}mb^2$$

og skiva starter med null rotasjonsfart, $\omega_0 = 0$, er skivas rotasjonsfart ω når den har fullført én hel runde:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}I\omega^2 \ \Rightarrow \ \omega = \sqrt{\frac{2W}{I}} = \sqrt{\frac{4W}{mb^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 22{,}3\ \mathrm{J}}{0{,}75\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}25\ \mathrm{m})^2}} = 43{,}6\ \mathrm{rad/s}$$

Oppgave 19 (Dreieimpuls (bane))



Flyets dreieimpuls L i forhold til observasjonspunktet er gitt ved:

$$L = mv\, r \sin\angle(\vec{r}, \vec{p}) = mv\, r_{\perp}$$

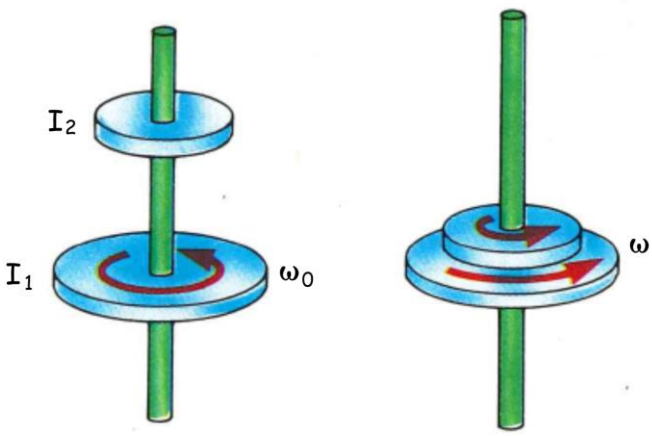
Her er arma

$$r_{\perp} = r \cdot \sin\alpha = 11000 \text{ m} \cdot \sin 55^0 = 9011 \text{ m}$$

Flyets dreieimpuls er dermed:

$$L = 30000 \text{ kg} \cdot 200 \text{ m/s} \cdot 9010 \text{ m} = 5{,}41 \cdot 10^{10} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Oppgave 20 (Dreieimpulsbevarelse)



Dreieimpulsbevarelse gir direkte at:

$$L_{før} = L_{etter}$$

$$\Downarrow$$

$$I_1\omega_0 = (I_1 + I_2)\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_0$$

Den totale kinetiske energien før de to skivene kommer i kontakt med hverandre er:

$$K_f = \frac{1}{2} I_1 \omega_0^2$$

Den totale kinetiske energien når de to skivene roterer med samme vinkelfart ω er tilsvarende gitt ved:

$$K_e = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\left(\frac{I_1}{I_1 + I_2}\right)^2 \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \quad K_e = \left(\frac{I_1}{I_1 + I_2}\right) \cdot \frac{1}{2} I_1 \omega_0^2 = \left(\frac{I_1}{I_1 + I_2}\right) K_f$$

Svingninger

Oppgave 21

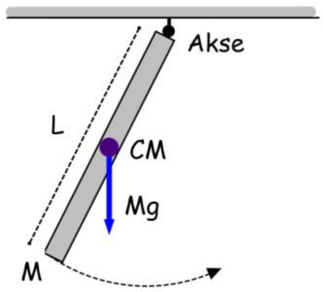
Bølgas bølgetall er $k = 2{,}11\ \mathrm{rad/m}$ og bølgas fasehastighet er $\mathrm{v} = 1.72\ \mathrm{m/s}$. Dermed er bølgas vinkelfrekvens:

$$\omega = \mathrm{v} \cdot k = 1{,}72\ \mathrm{m/s} \cdot 2{,}11\ 1/\mathrm{m} = 3{,}63\ 1/\mathrm{s}$$

Bølgas periode T blir dermed:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3{,}63\ 1/\mathrm{s}} = 1{,}73\ \mathrm{s}$$

Oppgave 22



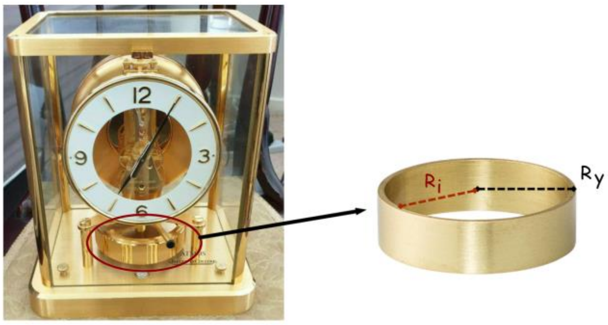
Ettersom staven har jevn massefordeling befinner stavens massemiddelpunkt (CM) seg midt på staven. Med andre ord: Aksen befinner seg en avstand $L/2$ fra stavens CM. Stavens treghetsmoment er dermed fra tabell:

$$I_{stav} = \frac{1}{3} M L^2$$

Pendelens periode er videre gitt ved:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{stav}}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} M L^2}{Mg\frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Oppgave 23



For å finne sylinderens torsjonskonstant κ benytter vi formelen for torsjonspendelens periode T gitt ved:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

Sylinderens treghetsmoment I er:

$$I = \frac{1}{2}M\left(R_y^2 + R_i^2\right)$$

Med $R_i = R_y - 0{,}50\ \mathrm{cm} = 4{,}0\ \mathrm{cm} - 0{,}50\ \mathrm{cm} = 3{,}5\ \mathrm{cm}$ får vi at:

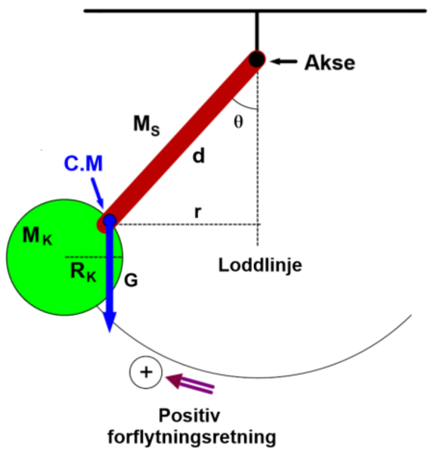
$$I = \frac{1}{2} \cdot 0{,}020\ \mathrm{kg} \cdot ((0{,}040\ \mathrm{m})^2 + (0{,}035\ \mathrm{m})^2) = 2{,}825 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kgm^2}$$

Pendelens torsjonskonstant κ blir dermed:

$$\kappa = \frac{4\pi^2 \cdot 2{,}825 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg\ m^2}}{(0{,}85\ \mathrm{s})^2} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Nm}$$

Oppgave 24

Differensialligningen som beskriver pendelens svingebevegelse, finner vi ved å ta utgangspunkt i at tyngdekrafta G virker i pendelens tyngdepunkt (C.M).



Dreiemomentet τ til pendelen er gitt ved rotasjonsmekanikkens grunnlov der:

$$\tau = -G \cdot r = I\alpha = I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Minustegnet angir her at tyngdekrafta G virker motsatt av pendelens bevegelses-retning/forflytningsretning, mens r angir arma fra tyngdepunktet bort til loddlinja. Enkel trekantbetrakning viser at $r = d \cdot \sin\theta \approx d \cdot \theta$ for små utslag θ. Samtidig er pendelens totale masse $m = M_K + M_S$. Innsatt i ligningen over gir dette differensialligningen

$$-mg \cdot d\sin\theta \approx -(M_K + M_S)gd \cdot \theta = I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{(M_K + M_S)gd}{I}\right)\theta$$

Oppgave 25

Formelen for en dempet svingning er gitt ved:

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t - \phi)$$

Utslaget for denne dempede svingningen ved et gitt tidspunkt t er gitt ved eksponential-leddet

$$e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Enheten til dempningskonstanten b finner vi ved at eksponenten i uttrykket for utslaget skal være dimensjonsløst. Det vil si:

$$\left[\frac{b}{2m}t\right] = 1 \quad \Rightarrow \quad [b] = \left[\frac{m}{t}\right] = \text{kg/s}$$

Oppgave 26

Bølgefunksjonen for den dempede svingningen er generelt gitt ved:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \delta)$$

der amplituden

$$A(t) = \theta_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Konstanten θ_0 er utslaget idet man starter opp pendelen $\Rightarrow \theta_0 = \theta(t = 0)$. Det vi skal finne ut er hvor lang tid t det tar før denne vinkelamplituden er redusert ned til en femtedel. Det vil si:

$$A(t) = \frac{\theta_0}{5} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 e^{-\frac{b}{2m}t} = \frac{\theta_0}{5} \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{b}{2m}t} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{b}{2m}t = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{2m}{b} \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{2 \cdot 40\ \text{kg}}{6.0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/s}} \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= 21459\ \text{s} = 5{,}96\ \text{timer}$$

Oppgave 27

Bølgas bølgetall er

$$k = \frac{\omega}{\mathrm{v}} = \frac{2\pi f}{\mathrm{v}} = \frac{2\pi \cdot 500\ 1/\mathrm{s}}{196\ \mathrm{m/s}} = 16\ 1/\mathrm{m}$$

Samtidig er bølgas vinkelfrekvens

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 500\ 1/\mathrm{s} = 1000\pi\ 1/\mathrm{s}$$

Bølgas bølgefunksjon er derfor gitt ved:

$$y(x,t) = (0{,}20\ \mathrm{cm})\sin(16x - 1000\pi t)$$

Oppgave 28

Strekk-krafta på fjæra finner vi ved å anvende sammenhengen

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad F = \mathrm{v}^2\mu$$

Bølgas fasehastighet er

$$\mathrm{v} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}90\ \mathrm{m} \cdot \frac{31\ \mathrm{rad/s}}{2\pi} = 4{,}44\ \mathrm{m/s}$$

Ettersom massetettheten er oppgitt til å være $\mu = 0{,}40\ \mathrm{kg/m}$ gir dette en strekk-kraft av størrelsesorden:

$$F = (4{,}44\ \mathrm{m/s})^2 \cdot 0{,}40\ \mathrm{kg/m} = 7{,}9\ \mathrm{N}$$

Oppgave 29

Effekten som maskina må yte, er gitt ved:

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2 \cdot \mathrm{v}$$

Med

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60\ \mathrm{rad/s} = 120\ \pi\ 1/\mathrm{s} = 377\ 1/\mathrm{s}$$

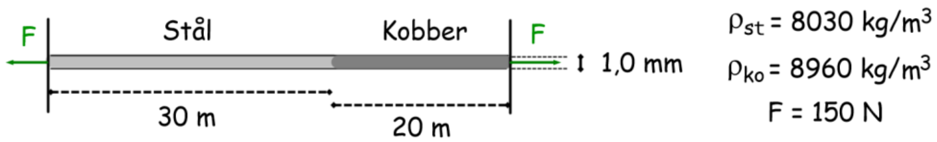
og

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{80\ \mathrm{N}}{5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg/m}}} = 40\ \mathrm{m/s}$$

ender vi opp med at maskina må levere:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg/m} \cdot (377\ 1/\mathrm{s})^2 \cdot (0{,}060\ \mathrm{m})^2 \cdot 40\ \mathrm{m/s} = 511{,}6\ \mathrm{W} = 512\ \mathrm{W}$$

Oppgave 30



Fasehastigheten v_{st} langs stålstrengen er:

$$v_{st} = \sqrt{\frac{F}{\mu_{st}}} = \sqrt{\frac{F}{\rho_{st} \cdot \pi r^2}} = \sqrt{\frac{150\ \text{N}}{8030\ \text{kg/m}^3 \cdot \pi \cdot (5{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{m})^2}} = 154{,}2\ \text{m/s}$$

Tilsvarende er fasehastigheten gjennom kobberstrengen:

$$v_{ko} = \sqrt{\frac{F}{\mu_{ko}}} = \sqrt{\frac{F}{\rho_{ko} \cdot \pi r^2}} = \sqrt{\frac{150\ \text{N}}{8960\ \text{kg/m}^3 \cdot \pi \cdot (5{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{m})^2}} = 146{,}0\ \text{m/s}$$

Ettersom fasehastigheten er konstant langs hver av de to strengene vil den totale tiden som den transversale bølga bruker på å forplante seg gjennom begge strengene være:

$$t = t_{st} + t_{ko} = \frac{s_{st}}{v_{st}} + \frac{s_{ko}}{v_{ko}} = \frac{30\ \text{m}}{154{,}2\ \text{m/s}} + \frac{20\ \text{m}}{146{,}0\ \text{m/s}} = 0{,}33\ \text{s}$$

Oppgave 31

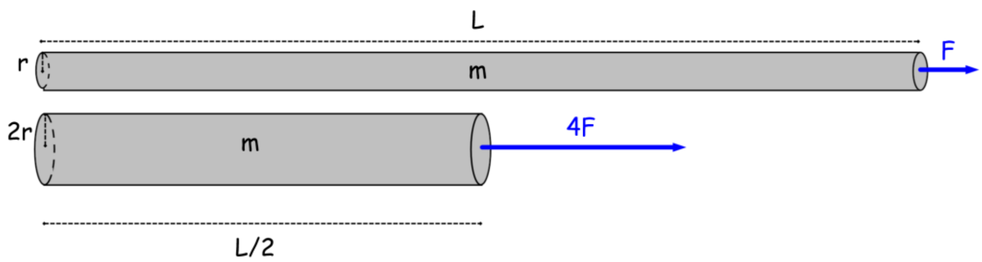
Bølgefunksjonen til den stående bølga er gitt ved:

$$y(x,t) = (0{,}30)\sin(0{,}25x)\cos(120\pi\, t)$$

Det sentrale her er at både den stående bølga og de to enkeltbølgene som danner denne stående bølge har samme bølgelengde λ. Ifølge bølgefunksjonen over er bølgetallet til de to enkeltbølgene gitt ved $k = 0{,}25\ 1/\text{m}$. Med andre ord:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.25\ 1/\text{m}} = 25\ \text{m}$$

Oppgave 32



Den fundamentale frekvensen til den stående bølga relatert til den lange strengen med lengde L og radius r i figuren over er gitt ved ($n = 1$):

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = 400\ \text{Hz}$$

For den kortere strengen er lengden $L' = L/2$. Strekkrafta $F' = 4F$. Den lineære massetettheten μ for denne nye og kortere strengen finner vi ved å utnytte at $\mu = \rho \cdot A$ der ρ er materialets volumetriske massetetthet og A er strengens snittareal. Poenget er at samme masse nå befinner seg innenfor et endret volum som videre gir en endret lineær massetetthet μ. Ved å ta forholdet μ'/μ finner vi at:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\rho A'}{\rho A} = \frac{A'}{A} = \frac{\pi(2r)^2}{\pi r^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad \mu' = 4\mu$$

Innsatt gir dette at:

$$f_1' = \frac{1}{2L'}\sqrt{\frac{F'}{\mu'}} = \frac{1}{2\left(\frac{L}{2}\right)}\sqrt{\frac{4F}{4\mu}} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = 2f_1 = 2 \cdot 400\ \mathrm{Hz} = 800\ \mathrm{Hz}$$

Oppgave 33

Bølgas trykkamplitude er gitt ved

$$\Delta P_m = \rho \mathrm{v} \omega s_m$$

Lufttettheten og lydhastigheten i luft er henholdsvis $\rho = 1.20\ \mathrm{kg/m^3}$, $\mathrm{v} = 343\ \mathrm{m/s}$. Videre er bølgas svingefrekvens

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{Hz}\ = 20000\pi\ 1/\mathrm{s}$$

Forflytningsamplituden s_m i forplantningsretningen blir dermed:

$$s_m = \frac{\Delta P_m}{\rho \mathrm{v} \omega} = \frac{4.0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N/m^2}}{1.20\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 343\ \mathrm{m/s} \cdot 20000\,\pi} = 1{,}5 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Oppgave 34

Lydbølgens intensitet før økningen av amplituden er gitt ved:

$$I_f = \frac{\Delta P_{mf}^2}{2\rho \mathrm{v}}$$

Dette tilsvarer en desibel-verdi på:

$$\beta_f = 10\log\left(\frac{I_f}{I_0}\right)$$

Den tilsvarende intensiteten etter økningen av amplituden er gitt ved:

$$I_e = \frac{\Delta P_{me}^2}{2\rho \mathrm{v}} = \frac{\left(1{,}5 \cdot \Delta P_{mf}\right)^2}{2\rho \mathrm{v}} = 1{,}5^2 \cdot \frac{\Delta P_{mf}^2}{2\rho \mathrm{v}} = 1{,}5^2 \cdot I_f$$

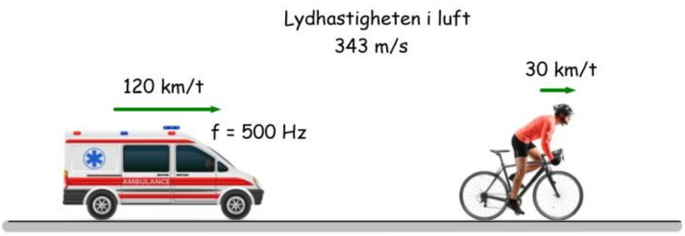
Dette tilsvarer en desibel-verdi på:

$$\beta_e = 10\log\left(\frac{I_e}{I_0}\right) = 10\log\left(\frac{1{,}5^2 \cdot I_f}{I_0}\right) = 10\log(1{,}5^2) + 10\log\left(\frac{I_f}{I_0}\right) = 20\log(1{,}5) + \beta_f$$

Økningen i desibel-nivået er ut fra dette:

$$\Delta\beta = \beta_e - \beta_f = 20\log(1{,}5) \approx \ 3{,}52 \text{ dB}$$

Oppgave 35



Den relative hastighetsforskjellen mellom sykebilen og sykelisten er:

$$\mathrm{v}_o = \ \mathrm{v}_{bil} - \mathrm{v}_{sykl} = 120 \text{ km/t} - 30 \text{ km/t} = 90 \text{ km/t}$$

Dette tilsvarer en hastighet $\mathrm{v}_o = 25 \text{ m/s}$. Ettersom sykebilen nærmer seg sykelisten så vil frekvensen sykelisten hører være gitt ved:

$$f' = f\left(1 + \frac{\mathrm{v}_o}{\mathrm{v}}\right) = 500 \text{ Hz} \cdot \left(1 + \frac{25 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}}\right) = 536 \text{ Hz}$$