

## Løsningsforslag eksamen TFY4107 sommer 2023

### Oppgave 1:

$$20 \text{ kg/m}^2 = 20 \cdot \frac{1000 \text{ g}}{(100 \text{ cm})^2} = 20 \cdot 10^{-1} \text{ g/cm}^2 = 2,0 \text{ g/cm}^2$$

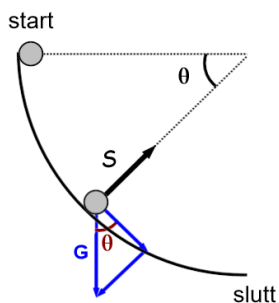
### Oppgave 2: Alternativ D

### Oppgave 3:

$$\sum F = 0 \Rightarrow F \cos 40^\circ - R = 0 \Rightarrow R = 50 \text{ N} \cdot \cos 40^\circ = 38,3 \text{ N}$$

$$R = \mu_k mg \Rightarrow \mu_k = \frac{R}{mg} = \frac{38,3 \text{ N}}{5,0 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 0,78 \approx 0,8$$

### Oppgave 4:

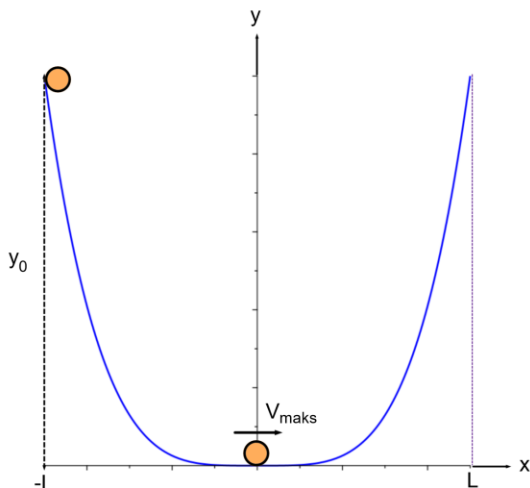


$$\sin \theta = \frac{G}{S} \Rightarrow S = G \cdot \sin \theta$$

↓

$$ma_{\perp} = mg \sin \theta \Rightarrow a_{\perp} = g \sin \theta$$

### Oppgave 5:



Maksimal høyde:  $h_{maks} = y_0$

Bevaring av den totale mekaniske energien

$$mgy_0 = \frac{1}{2}mv_{maks}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Dette gir videre at:

$$mgy_0 = \frac{1}{2}mv_{maks}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \left(\frac{v_{maks}}{r}\right)^2$$

$$\Rightarrow mgy_0 = \frac{1}{2}mv_{maks}^2 + \frac{1}{5}m \cdot v_{maks}^2 = \frac{7}{10}mv_{maks}^2$$

$$\Rightarrow v_{maks} = \sqrt{\frac{10}{7}gy_0} = 0,84 \text{ m/s}$$

### Oppgave 6:

Den maksimale helningsvinkelen finnes ved endepunktene  $x = L$ , eller  $x = -L$ . Det gir at:

$$y' = \frac{4y_0 x^3}{L^4} = \frac{4y_0}{L} = 0,4$$

Fra hintet:

$$y' = \tan \theta = 0.4 \Rightarrow \theta = 22^\circ$$

### Oppgave 7:

Newtons 2.lov gir med  $u < 0$ :

$$u \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow u dm = m dv \Rightarrow \frac{dm}{m} = \frac{1}{u} dv$$

Integrerer opp:

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = \frac{1}{u} \int_{v_0}^v dv \Rightarrow \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = \frac{1}{u}(v - v_0) \Rightarrow m = m_0 e^{-\frac{v-v_0}{|u|}}$$

Rakettens nye hastighet er  $v = 2v_0 \Rightarrow v - v_0 = 1,4 \text{ km/s}$ .

Innsatt innebærer dette at raketts gjenværende masse etter hastighetsøkningen er:

$$m = m_0 \cdot e^{-\frac{1,4 \text{ km/s}}{2,6 \text{ km/s}}} = 0,584 m_0$$

Forbruket av masse:

$$m - m_0 = 0.416 m_0 = 3,21 \cdot 10^5 \text{ kg}$$

Tiden det tar å fordoble raketts hastighet er dermed:

$$\frac{m - m_0}{dm/dt} = 24 \text{ s}$$

### Oppgave 8:

Newtons 2.lov:

$$\begin{aligned} \Sigma F = G - f &= m \frac{dv}{dt} \Rightarrow mg - kv = m \frac{dv}{dt} \\ \Rightarrow \frac{dv}{mg - kv} &= \frac{1}{m} dt \Rightarrow \frac{dv}{mg \left(1 - \frac{kv}{mg}\right)} = \frac{1}{m} dt \Rightarrow \frac{dv}{1 - \frac{kv}{mg}} = g dt \end{aligned}$$

### Oppgave 9:

Støtet er uelastisk  $\Rightarrow$  Kun systemets bevegelsesmengde er bevart.

$$Mv_{M,f} = mv_{m,e} + Mv_{M,e} \Rightarrow v_{M,e} = v_{M,f} - \frac{m}{M}v_{m,e}$$

### Oppgave 10:

Elastisk støt: Både bevegelsesmengden og den totale kinetiske energien er bevart.

$$mv_{m,f} = mv_{m,e} + 2mv_{M,e} \quad (1)$$

$$mv_{m,f}^2 = mv_{m,e}^2 + 2mv_{M,e}^2 \quad (2)$$

Fra (1) er:

$$v_{m,e} = v_{m,f} - 2v_{M,e}$$

Innsatt i (2) gir dette:

$$v_{m,f}^2 = v_{m,f}^2 - 4v_{m,f}v_{M,e} + 6v_{M,e}^2$$

↓

$$v_{M,e}(6v_{M,e} - 4v_{m,f}) = 0$$

↓

$$v_{M,e} = \frac{2}{3}v_{m,f}$$

### Oppgave 11:

Hjulets vinkelforflytning:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 11 \text{ rad}$$

### Oppgave 12:

Sylinderens totale kinetiske energi:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}mr^2\right) \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2$$

### Oppgave 13:

Den statiske friksjonskrafta  $f$  som virker på hver enkelt sylinder er:

$$\tau = f \cdot r = I\alpha = I \frac{a}{r} \Rightarrow f = I \frac{a}{r^2}$$

Newtons 2.lov gir videre at:

$$\begin{aligned} G_x - f &= ma \Rightarrow mg \sin \alpha - I \frac{a}{r^2} = ma \Rightarrow g \sin \alpha - \frac{1}{2} a = a \\ \Rightarrow \frac{3}{2} a &= g \sin \alpha \Rightarrow a = \frac{2}{3} g \sin \alpha \end{aligned}$$

Akselerasjonen som massemidelpunktet til de to sylinderne erfarer, er uavhengig av både massen  $m$  og radien  $r$ . De to sylinderne kommer dermed samtidig ned til bunnen av skråplanet.

### Oppgave 14:

Trehetsmomentet til legemet:

$$I = cmr^2$$

Forholdet mellom den translatoriske kinetiske energien og den tilsvarende rotasjonsenergien:

$$\frac{K_{rot}}{K_{tr}} = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{I\omega^2}{mv^2} = \frac{(cmr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2})}{mv^2} = \frac{cmv^2}{mv^2} = c$$

**Oppgave 15:**

Det totale treghetsmomentet til det sammensatte legemet:

$$\begin{aligned} I_{tot} &= I_{pl} + 2I_{st} = \frac{1}{12}M(a^2 + L^2) + 2\left(\frac{1}{12}m \cdot 4L^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{12}Ma^2 + \frac{1}{12}ML^2 + \frac{2}{3}mL^2 + \frac{1}{2}ma^2 \\ &= \left(\frac{1}{12}M + \frac{1}{2}m\right)a^2 + \left(\frac{1}{12}M + \frac{2}{3}m\right)L^2 \end{aligned}$$

**Oppgave 16:**

Masse-elementet  $dm$  for en liten halvsirkulær arealdel inne i legemet:

$$dm = \sigma dA = \sigma \pi r dr$$

Massetettheten  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

Innsatt i uttrykket for  $dm$ :

$$dm = \frac{2M}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \cdot \pi r dr = \frac{2M}{(r_2^2 - r_1^2)} \cdot r dr$$

Legemets treghetsmoment:

$$\begin{aligned} I &= \int_{r_1}^{r_2} r^2 dm = \int_{r_1}^{r_2} \frac{2M}{(r_2^2 - r_1^2)} \cdot r dr = \frac{2M}{(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr \\ &= \frac{2M}{(r_2^2 - r_1^2)} \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_{r_1}^{r_2} = 0,013 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

**Oppgave 17:**

Massemidelpunktets akselerasjon  $a$ :

$$a = r\alpha = 3,50 \text{ m/s}^2$$

Det mekaniske arbeidet  $W$ :

$$W = \tau \cdot \theta = I\alpha \cdot \theta = I \cdot \frac{a}{r} \cdot \frac{s}{r} = I \cdot \frac{as}{r^2} = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{as}{r^2} = \frac{2}{5}m \cdot as = 0,042 \text{ J}$$

**Oppgave 18**

Den totale dreieimpulsen:

$$I = I_{trans} + I_{rot} = rmv + I\omega = rmv + \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{v}{r} = \frac{7}{5}rmv = 4,78 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2/\text{s}$$

### Oppgave 19

Det totale dreiemomentet:

$$\sum \tau = I\alpha = \frac{dL_A}{dt} = \frac{d}{dt}(8mrv) = 8mr \frac{dv}{dt} = 8mra$$

Samtidig er:

$$\sum \tau = (G_{2m} - G_m) \cdot r = (2mg - mg)r = mgr$$

Sammenligner:

$$8mra = mgr \Rightarrow 8a = g \Rightarrow a = \frac{g}{8}$$

Punktmassenes hastighet etter  $t = 0,50$  s er dermed:

$$v(0,50) = v_0 + at = at = \frac{1}{8}gt = 0,63 \text{ m/s}$$

### Oppgave 20:

Bølgens forplantningshastighet:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{k} = 1,85 \text{ m/s}$$

### Oppgave 21:

Pendelens periode er:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{3mg \left(\frac{L}{2}\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Perioden er uavhengig av massen  $m$ . Samtidig varierer  $T \sim \sqrt{L}$ .

### Oppgave 22:

Fra forrige oppgave :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Snorlengden  $L$  forkortes for å oppnå samme periode  $T$ . Det innebærer at gravitasjonsakselerasjonen på planeten må reduseres i forhold til gravitasjonsakselerasjonen på jorda.

### Oppgave 23:

Svingefrekvensen til en torsjonspendel:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Treghetsmomentet til torsjonspendelen:

$$I = \kappa \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \kappa \left(\frac{\left(\frac{270 \text{ s}}{50 \text{ svingninger}}\right)}{2\pi}\right)^2 = 0,41 \text{ kgm}^2$$

**Oppgave 24:**

De to fjærene utøver like stor kraft og i samme retning under svingebevegelsen. Newtons 2.lov:

$$2F = -2kx = ma = m \frac{dx^2}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{m}x = 0$$

Systemets frekvens  $f$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

**Oppgave 25:**

Svingningens amplitude som funksjon av tida:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Her er  $A_0$  amplituden ved tiden  $t = 0$ . Dempingsfaktoren  $b$  finnes ved å sette:

$$\begin{aligned} A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} = \frac{1}{2}A_0 &\Rightarrow e^{(-\frac{b}{2m})t} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow -\frac{b}{2m}t = \ln \frac{1}{2} &\Rightarrow b = -\frac{2m}{t} \ln \frac{1}{2} = 2,3 \text{ g/s} \end{aligned}$$

**Oppgave 26:**

Den harmoniske vinkelfrekvensen  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Den tilsvarende vinkelfrekvensen  $\mu$  for den dempede svingningen:

$$\mu = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Forholdet:

$$\frac{\mu}{\omega_0} = \sqrt{\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right) \cdot \frac{m}{k}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4mk}} = 0,8$$

**Oppgave 27:**

Amplitudeligningen for den dempede svingningen når  $A_0 = 7,0$  ved tiden  $t = 0$ :

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} = 7,0 e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Direkte avlesning fra grafen tilsier at

$$A(t = 4,0 \text{ s}) = 3,0 \Rightarrow 7,0 e^{-\frac{4b}{2m}} = 3,0 \Rightarrow -\frac{2b}{m} = \ln \frac{3,0}{7,0} \Rightarrow m = 30,4 \text{ kg}$$

Innsatt gir dette svingeligningen:

$$A(t) = 7,0 e^{-0,212 t}$$

**Oppgave 28:**

Tonens bølgetall når første overtone innebærer at  $\lambda = L = 1,50$  m:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 4,19 \text{ 1/m}$$

Tonens vinkelfrekvens:

$$\omega = v \cdot k = 1437 \text{ m/s}$$

Tonens frekvens:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 229 \text{ Hz}$$

**Oppgave 29:**

Bølgas forplantningshastighet:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{mF}{L}} = 50,7 \text{ m/s}$$

**Oppgave 30:**

Effekten bølgegeneratoren må levere:

$$P = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 v = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{L} \cdot A^2 \cdot (2\pi f)^2 \cdot v = 165 \text{ W}$$

**Oppgave 31:**

Grunntonen tilsvarer at en stående bølge har bølgelengde  $\lambda = 2L$  der  $L$  er lengden av strengen.

Bølgelengden:

$$\lambda = 2L = 1400 \text{ mm}$$

Strekk-krafta  $F$ :

$$F = \mu v^2 = \mu(\lambda f)^2 = 134 \text{ N}$$

**Oppgave 32:**

Lydbølgens hastighet gjennom vannet:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = 1483 \text{ m/s}$$

Intensiteten:

$$I = \frac{1}{2} \rho s_m^2 \omega^2 v = \frac{1}{2} \rho s_m^2 (2\pi f)^2 v = 1,45 \text{ W/m}^2$$

**Oppgave 33:**

Intensiteten i enheter av  $\text{W/m}^2$ :

$$I = \frac{(\Delta P)^2}{2\rho v} = 5,04 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$$

I enheter av dB tilsvarer dette:

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \log\left(\frac{5,04 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2}\right) = 87 \text{ dB}$$

**Oppgave 34:**

Første dopplereffekt: Frekvensen til bølga måken blir truffet med:

$$f' = f_0 \frac{v_l + v_m}{v_l - v_m} = 100 \text{ kHz} \cdot \frac{343 \text{ m/s} + 15 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 15 \text{ m/s}} = 109 \text{ kHz}$$

Andre dopplereffekt: Frekvensen flaggermusa mottar i retur fra måken:

$$f'' = f' \frac{v_l + v_{fl}}{v_l - v_{fl}} = 109 \text{ kHz} \cdot \frac{343 \text{ m/s} + 10 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}} = 116 \text{ kHz}$$