Kontakt under eksamen:
Dag Werner Breiby
Telefon 7359 3594 / 9845 4213

EKSAMEN TFY4115 FYSIKK
for MTEL og MTTK
5. desember 2008 kl 0900-1300
Bokmål

Hjelpemiddel C:

- Matematisk formelsamling
- Godkjent kalkulator, med tomt minne

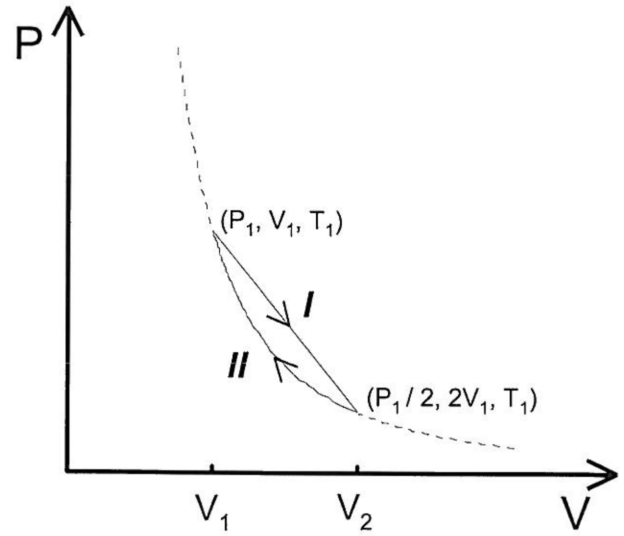
Oppgavesettet består av 3 oppgaver med til sammen 10 deloppgaver. Hver av disse teller 8 % til den endelige karakteren i faget. (De siste 20 % er gitt av midtsemesterprøven). Utlevert er 7 sider, hvorav 1 forside, 4 oppgavesider og 2 sider med formelsamling.

To generelle råd:

- Svar først på de spørsmålene som er de letteste for **deg**!
- Det er alltid bedre å svare **litt** enn ingenting på en besværlig deloppgave, noen poeng ekstra kan komme godt med!

Oppgavesettet er utarbeidet av Dag W. Breiby og sett gjennom av Eivind Hiis Hauge.

Oppgave 1 En ikke spesielt effektiv varmemaskin



En totrinns reversibel prosess for en ideell gass består av *I*: en rett linje fra tilstanden (P_1, V_1, T_1) til tilstanden (½ P_1, $2V_1$, T_1), og *II*: en isoterm kompresjon tilbake til utgangstilstanden, som vist i figuren.

a) Vis at trykket langs den rette linja kan beskrives ved

$$P(V) = -\frac{1}{2}\frac{P_1}{V_1}V + \frac{3}{2}P_1$$

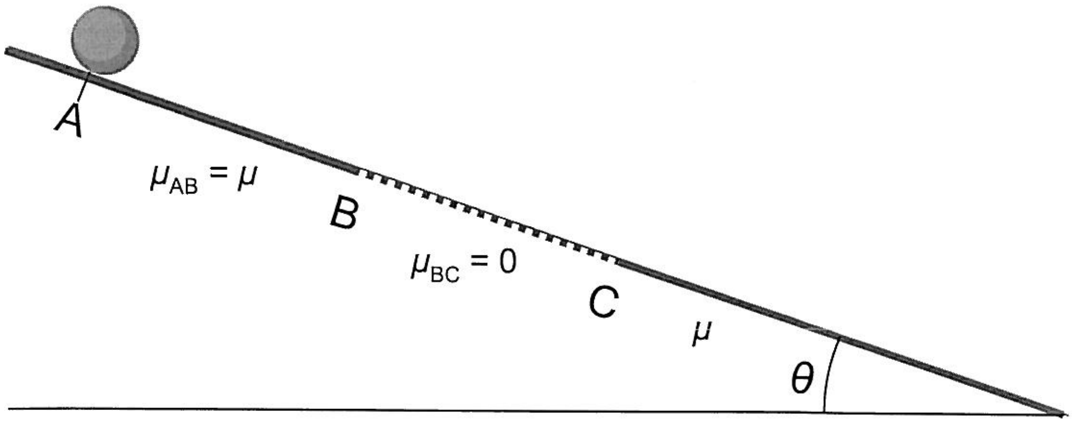
Bruk dette til å vise at den maksimale temperaturen T_{varm} gassen får i løpet av prosessen er $T_{\text{varm}} = 9/8\ T_1$.

b) Finn arbeidet W utført av gassen per syklus. Hvor stor varmemengde Q_{varm} tilføres gassen i prosesstrinn I?

c) Hva er virkningsgraden ε til denne varmekraftmaskinen? Hvis en Carnot-maskin hadde virket mellom de samme ekstremtemperaturene T_{varm} og T_1, hvilken virkningsgrad ε_C ville den ha hatt?

d) Beregn forskjellen i entropi i gassen mellom punktene (P_1, V_1, T_1) og (½ P_1, $2V_1$, T_1). Hva er endringen av entropi i gassen for en *hel* syklus, og hva er endringen av entropi i omgivelsene?

Oppgave 2 Ei kule som både ruller og sklir



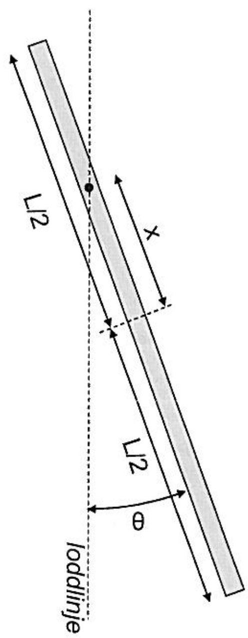
Ei kompakt kule med masse m og radius r settes på et skråplan med helningsvinkel θ ved punktet merket A. Kula har i utgangspunktet A translasjonshastighet $v_A = 0$ m/s og rotasjonshastighet $\omega_A = 0$ rad/s, dvs. kula er i ro. Mellom punktene A og B, en distanse s, er friksjonskoeffisienten mellom kula og underlaget μ, som er tilstrekkelig stor til at kula ruller uten å skli.

a) Hva er kulas akselerasjon a mellom A og B?

b) Hva er kulas translasjonshastighet v_B og vinkelhastighet ω_B ved punktet B? Hva er kulas translasjonsenergi K og rotasjonsenergi K_{rot} i punktet B? Er den totale mekaniske energien kula hadde i A bevart?

c) Mellom B og C er friksjonen 0, $\mu_{BC} = 0$. Finn kulas translasjonshastighet v_C og vinkelhastighet ω_C ved punktet C. Avstandene AB = BC = s. Beskriv kort og kvalitativt kulas videre bevegelse etter punktet C, hvor friksjonen igjen er lik $\mu = \mu_{AB}$. (Neglisjer forskjellen på statisk og kinetisk friksjon, $\mu = \mu_z = \mu_k$).

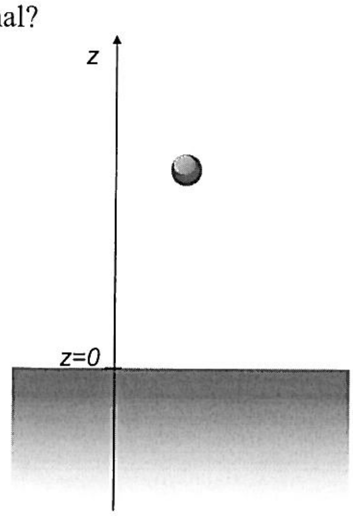
Oppgave 3 består av 3 uavhengige deloppgaver!



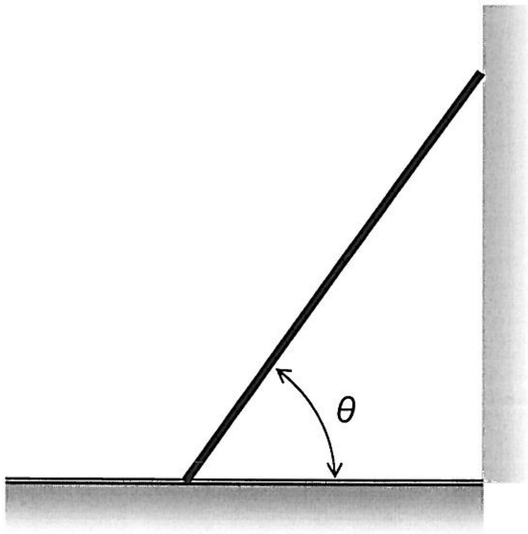
a) **En pendel** består av en homogen tynn stav med lengde L. Den kan svinge fritt om en akse en avstand $x \in (0, L/2)$ fra bjelkens massepunkt. Vis at for små vinkelutslag θ blir pendelens periode

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{1}{12}\frac{L^2}{x} + x}$$

For hvilken x er T minimal?



b) **En dykkende ball!** En ball med masse $m = 0.20$ kg og radius $r = 0.15$ m har høyden z i forhold til ei vannflate. Tettheten til vann er 1000 kg / m^3, og tyngdens akselerasjon er 9.81 m/s^2. La nullpunktet for ballens potensielle energi U være vannflata, altså U(z = 0) = 0. Plott ballens *potensielle energi* som funksjon av høyden z i intervallet z = -2m (dvs. under vann) til z = 10 m. (Neglisjer komplikasjoner med delvis neddykket ball, dvs. for $-r < z < r$). **NB**: Oppgaven spør *ikke* om ballens kinetiske energi!



c) **En bjelke** er lent opp mot en glatt vegg (ingen friksjon mellom bjelke og vegg), med den ene enden hvilende mot gulvet, se figur. Det er en vinkel θ mellom bjelken og gulvet. Vis at friksjonskoeffisienten mellom bjelken og gulvet må være minimum $1/(2\tan\theta)$ for at bjelken ikke skal skli.

Formelsamling

Vektorstørrelser er i **uthevet** skrift.

Fysiske konstanter:

Ett mol: $M(^{12}C) = 12$ g 1u = $1.660538 \cdot 10^{-27}$ kg $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}

$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K $R = N_A k_B = 8.31$ J mol^{-1} K^{-1} $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C^2/Nm^2 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2 $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg

$c = 2.999724 \cdot 10^8$ m/s $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Js 0°C = 273 K $g = 9.8$ m/s^2

Mekanikk:

$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r},t)$, der $\mathbf{p}(\mathbf{r},t) = m\mathbf{v} = m\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$; $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$;

Konstant a: $v = v_0 + at$; $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$; $2as = v^2 - v_0^2$

$\mathrm{d}W = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$; $K = \frac{1}{2} mv^2$; $U(\mathbf{r})$ = potensiell en. (tyngde: mgh; fjær: $\frac{1}{2} kx^2$)

$\mathbf{F} = -\nabla U$; $F_x = -\frac{\partial}{\partial x} U(x,y,z)$; $E = \frac{1}{2} mv^2 + U(\mathbf{r})$ + friksjonsarbeid = konstant.

Tørr friksjon: $|F_f| = \mu_s \cdot F_\perp$ eller $|F_f| = \mu_k \cdot F_\perp$; Viskøs frksjon: $\mathbf{F}_f = -k_f v$

Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}$, der $\mathbf{r}_0$ er valgt referansepunkt; $\mathrm{d}W = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$

Statisk likevekt: $\Sigma_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, $\Sigma_i \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0}$

Massemiddelpunkt (tyngdepunkt): $\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_i$; $M = \sum_i m_i$

Elastisk støt: $\Sigma_i \boldsymbol{p}_i$ = konstant; $\Sigma_i E_i$ = konstant. Uelastisk støt: $\Sigma_i \boldsymbol{p}_i$ = konstant.

Vinkelhastighet: $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{z}}$; $|\boldsymbol{\omega}| = \omega = \mathrm{d}\theta / \mathrm{d}t$; Vinkelakselerasjon: $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} / \mathrm{d}t$; $\alpha = \mathrm{d}\omega / \mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\theta / \mathrm{d}t^2$.

Sirkelbevegelse: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$; $v = r\omega$; Sentripetalakselerasjon $a_r = -v\omega = -v^2 / r = -r\omega^2$

Baneaks.: $a_\theta = \mathrm{d}v / \mathrm{d}t = r\, \mathrm{d}\omega / \mathrm{d}t = r\alpha$; Rotasjonsenergi: $K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$, der I er treghetsmomentet.

$I \equiv \sum_i m_i r_{\perp i}^2 \rightarrow \int_V dV \rho r_\perp^2$, der $r_{\perp i}$ er avstanden fra m_i til rotasjonsaksen. Med aksen gjennom massemiddelpunktet: $I \rightarrow I_0$.

Massiv kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$; Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$; Kompakt sylinder / skive: $I_0 = \frac{1}{2} MR^2$;

Lang, tynn stav: $I_0 = \frac{1}{12} ML^2$; Parallellakseteoremet (Steiners sats): $I = I_0 + Mb^2$

Banespinn: $\mathbf{L}_{bane} = M(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{V}$, der $\mathbf{r}_0$ er felles referansepunkt for $\mathbf{L}$ og $\boldsymbol{\tau}$, og tyngdepunktsbevegelsen er gitt av $\mathbf{R}$ og $\mathbf{V} = \mathrm{d}\mathbf{R} / \mathrm{d}t$. Egenspinn: $\mathbf{L}_{egen} = I_0 \cdot \boldsymbol{\omega}$

For (sylinder)symmetriske faste legemer: $\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_{bane} + \mathbf{L}_{egen}$; $\boldsymbol{\tau}_{tot} = \mathrm{d}\mathbf{L}_{tot} / \mathrm{d}t$

Hydrostatisk trykk: $P(h) = P_0 + \rho gh$; Bernoulli, langs strømlinje: $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh$ = konst.

Svingninger:

Udempet svingning: $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$; $\omega_0=\sqrt{k/m}$; $T=2\pi/\omega_0$; $f_0=1/T=\omega_0/2\pi$

Pendel: $\ddot{\theta}+\omega_0^2\sin\theta=0$; Fysisk pendel: $\omega_0=\sqrt{gmd/I}$; Matematisk pendel: $\omega_0=\sqrt{g/l}$

Dempet svingning: $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0$; $\gamma=b/2m$

Elektrisk analogi, LRC serie svingekrets: $\omega_0=1/\sqrt{LC}$; $\gamma=R/2L$

$\gamma<\omega_0$ Underkritisk dempet: $x(t)=A\,e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t-\delta)$; $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$

$\gamma>\omega_0$ Overkritisk dempet: $x(t)=A^+e^{-\alpha(+)t}+A^-e^{-\alpha(-)t}$; $\alpha^{(\pm)}=\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$

Tvungne svingninger: $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=f_0\cos\omega t$, med partikulær løsning når $t>>\gamma^{-1}$:

$$x(t)=x_0\cos(\omega_d t-\delta);\quad x_0(\omega)=f_0\left[\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}\right]^{-1};\quad \tan\delta=2\gamma\omega/(\omega_0^2-\omega^2)$$

Termisk fysikk:

n = antall mol; $N=nN_A$ = antall molekyler; f = antall frihetsgrader; $\alpha=l^{-1}dl/dT$

$\Delta Q=\Delta U+\Delta W$; $C=\dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$ (Varmekapasiteten kan være gitt pr. masseenhet eller pr. mol)

$PV=nRT=Nk_BT$; $PV=N\frac{2}{3}\langle K\rangle$; $\langle K\rangle=\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle=\frac{3}{2}m\langle v_x^2\rangle$; $\Delta W=P\Delta V$; $W=\int_1^2 PdV$

Størrelser pr mol: $C_V=\frac{1}{2}fR$; $C_P=\frac{1}{2}(f+2)R=C_V+R$; $dU=C_V\cdot dT$

For ideell gass: $\gamma=C_P/C_V=(f+2)/f$. Adiabat: $PV^\gamma=konst.$; $TV^{\gamma-1}=konst.$

Virkningsgrader for varmekraftmaskiner: $\varepsilon=W/Q_v$; Carnot: $\varepsilon=1-T_k/T_v$: Otto: $\varepsilon=1-1/r^{\gamma-1}$

Kjøleskap: $\eta_K=\left|\dfrac{Q_k}{W}\right|\ \underrightarrow{Carnot}\ \dfrac{T_k}{T_v-T_k}$; Varmepumpe: $\eta_{VP}=\left|\dfrac{Q_v}{W}\right|\ \underrightarrow{Carnot}\ \dfrac{T_v}{T_v-T_k}$

Clausius: $\sum\dfrac{\Delta Q}{T}\le 0$; $\oint\dfrac{dQ}{T}\le 0$; Entropi: $dS=\dfrac{dQ_{rev}}{T}$; $\Delta S_{12}=\int_1^2\dfrac{dQ_{rev}}{T}$

Entropiendring 1→ 2 i en ideell gass: $\Delta S_{12}=nC_V\ln(T_2/T_1)+nR\ln(V_2/V_1)$

Varmeledning: $j_x=-\kappa\dfrac{\partial T}{\partial x}$; $\mathbf{j}=-\kappa\nabla T$; $\dfrac{\partial T}{\partial t}=D_T\nabla^2T$, $D_T=\kappa/(c\rho)$; $c\rho$ = varmekap. pr volum.

Stråling: $j_s=\dfrac{c}{4}u(T)$; $u(T)=\int_0^\infty\eta(f,T)\,df$; $\eta(f,T)=\dfrac{8\pi hf^3}{c^3}\dfrac{1}{\exp(hf/k_BT)-1}$