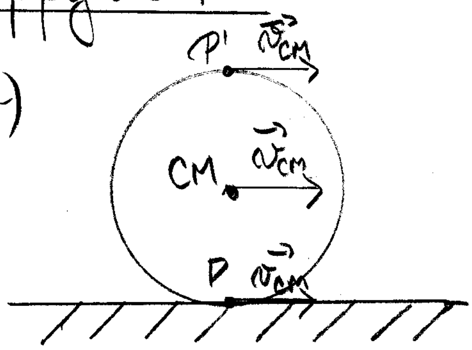
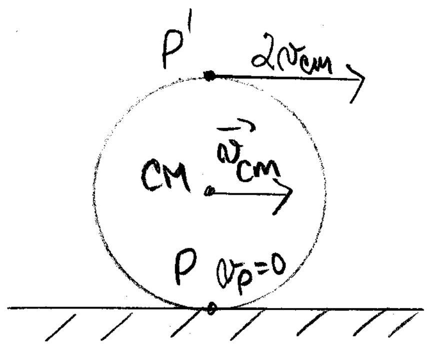
LØSNINGSFORSLAG

EKSAMEN HØST 2003

Oppgave 1

a)





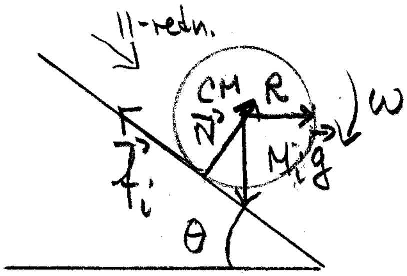
i. For en ren translasjonsbevegelse har vi ingen rotasjon, og alle 3 punktene beveger seg med hastighet $\vec{v}_{CM}$ parallell underlaget.

ii. I en ren rullebevegelse beveger CM seg med hastighet v_{CM}, P' med hastighet

$$v_{P'} = v_{CM} + R\omega = 2v_{CM}$$

$\Leftrightarrow v_{CM} = R\omega$, men $v_P = 0$ da det er en ren rullebevegelse langs underlaget.

b)



Legemene har masse M_i og radius R. Velger positiv retning nedover langs skråplanet ⇒ Pos. rotasjonsretning som angitt.

Translasjonsbevegelse av CM langs skråplanet:

$$\Sigma F_{\parallel} = M_i g \sin\theta - f_i = M_i a_{CM} \quad (1)$$

Rotasjon om CM: $I_i^{CM}\alpha = f_i R \quad (2)$

Rullebetingelsen: $v_{CM} = \omega R \quad ; \quad a_{CM} = R\alpha \quad (3)$

(2) og (3) $\Rightarrow$ $f_i = \dfrac{I_i^{CM}}{R^2} a_{CM}$

Innsatt i (1): $M_i g \sin\theta - \dfrac{I_i^{CM}}{R^2} a_{CM} = M_i a_{CM}$

$$\Rightarrow a_{CM}\left(M_i + \frac{I_i^{CM}}{R^2}\right) = M_i g \sin\theta$$

$$a_{CM} = \frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{I_i^{CM}}{M_i R^2}\right)} \quad (4)$$

Av (4) ser vi at a_{CM} er uavh. av massen. a_{CM} avtar med økende I_i^{CM}. a_{CM} er konstant i bevegelsen.

For kule: $a_{CM} = \frac{5}{7} g\sin\theta$

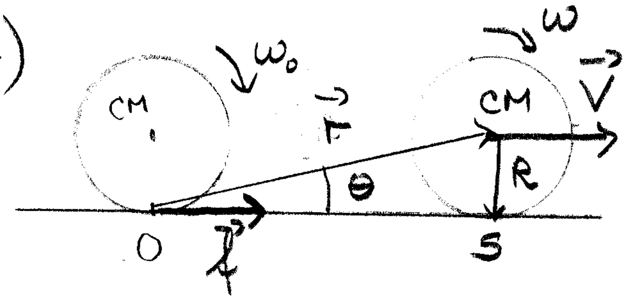
For massiv sylinder: $a_{CM} = \frac{2}{3} g\sin\theta$

For hul sylinder: $a_{CM} = \frac{1}{2} g\sin\theta$

$\Rightarrow$ Kula når bunnen av skråplanet først, mens den hule sylinderen når bunnen sist.

$$\left(I_{kule}^{CM} < I_{massiv\ sylinder}^{CM} < I_{hul\ sylinder}^{CM}\right)$$

c)



Velger O som punktet der sylinderen settes ned på underlaget.

Idet sylinderen settes ned på underlaget har den et spinn L_0 om O: $\vec{L}_0 = M\vec{r}_i \times \vec{v}_{CM} + \vec{L}_{CM}$

Da $v_{CM} = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{L}_0 = \vec{L}_{CM} = I_{CM}\vec{\omega}_0$

$$L_0 = I_{CM}\,\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega_0$$

I rullebevegelsen langs underlaget er spinnet bevart siden friksjonskraften f, som er den eneste krafta langs underlaget, ikke har noen arm om O.

Spinnet bevart om O:

$$L_0' = L_0$$

$$\vec{L}_0' = M\vec{r} \times \vec{v}_{CM} + I_{CM} \cdot \vec{\omega}$$

$$L_0' = MRV + \frac{1}{2}MR^2\omega = MRV + \frac{1}{2}MRV = \frac{3}{2}MRV \quad \text{da } R = r\sin\theta$$

$$L_0' = \frac{3}{2}MRV = L_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V = \frac{R\omega_0}{3}}}$$

Så lenge sylinderen sklir er friksjonskrafta:

$$f = \mu_k N = \mu_k Mg = Ma \quad \text{(da } f \text{ er eneste kraft} \parallel \text{ underlaget)}$$

$$\Rightarrow a = \frac{f}{M} = \mu_k g$$

Siden akselerasjonen er konstant har vi:

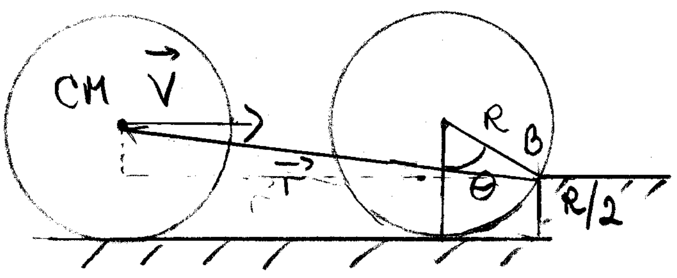
$$V^2 = 2as$$

$$\underline{\underline{s}} = \frac{V^2}{2a} = \frac{\left(\frac{R\omega_0}{3}\right)^2}{2\mu_k g} = \underline{\underline{\frac{1}{18}\frac{R^2\omega_0^2}{\mu_k g}}}$$

Når vi har ren rulling vil kontaktpunktet for sylinderen mot underlaget være i ro. Bevegelse med konst. V.

$\Rightarrow$ <u>Friksjonskrafta vil være null.</u>

d)



Kanten av trinnet øver en kraft på sylinderen i støtet. Denne kraften har ikke noe dreiemoment om punktet B på kanten av trinnet $\Rightarrow$ Dreiemomentet om punktet B er bevart i støtet.

Spinnet til sylinderen relativ B før støtet:

$$\vec{L}_B = M \cdot \vec{r} \times \vec{v}_{CM} + I_{CM} \cdot \omega$$

$$L_B = MVR\cos\theta + \frac{1}{2}MR^2\omega = M \cdot VR\cos\theta + \frac{1}{2}MRV$$

$$\underline{L_B} = MVR\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right) = \underline{MVR} \quad \text{da } \cos\theta = \frac{1}{2}$$

Etter kollisjonen roterer sylinderen om punktet B med spinn:

$$L_B' = I_B\,\omega' = \underbrace{(I_{CM} + MR^2)}_{\text{parallellakseteoremet}}\omega' = \frac{3}{2}MR^2\omega'$$

Bevaring av spinn før og etter støtet gir:

$$L_B' = L_B = \frac{3}{2}MR^2\omega' = MRV$$

$$\underline{\omega' = \frac{2}{3}\frac{V}{R}}$$

Hastigheten til CM etter kollisjonen med kanten er da:

$$\underline{\underline{V' = R\omega' = \frac{2}{3}V}}$$

Etter kollisjonen er energien bevart. Energien som kreves for akkurat å komme opp på kanten er

$$\frac{1}{2}I_B\,\omega'^2 = Mgh = Mg\frac{R}{2}$$

$\Rightarrow$ For at sylinderen skal vippe helt opp over kanten må rotasjonsenergien $\geq$ pot. energi.

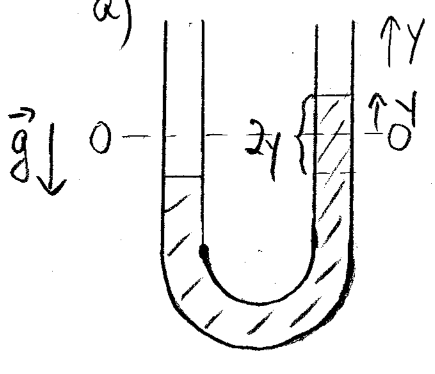
$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\left(\frac{2}{3}\frac{V}{R}\right)^2 \geq Mg\frac{R}{2}$$

$$V^2 \geq \frac{3}{2}gR$$

$$\underline{\underline{V \geq \sqrt{\frac{3}{2}gR}}}$$

Oppgave 2

a)



Krafta som trekker væska inn mot likevektsposisjonen er til en hver tid:

$$\underline{\underline{F_g = -2Ay \cdot \rho \cdot g}}$$

når forskyvningen ut fra likevektsposisjonen er y som vist i figuren.

Newtons 2. lov.
$$\sum F_y = F_g + F_d = ma = m\ddot{y}$$

Her er $m = \rho \cdot A \cdot L$

$$\Rightarrow -2Ay \cdot \rho \cdot g - \alpha \cdot L \cdot \dot{y} = \rho AL \cdot \ddot{y}$$

Dette gir:
$$\underline{\underline{\ddot{y} + \frac{\alpha}{\rho \cdot A}\dot{y} + \frac{2g}{L}y = \ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0 y = 0}}$$
q.e.d.

med
$$\underline{\underline{\gamma = \frac{\alpha}{2\rho A}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}}}$$

b)

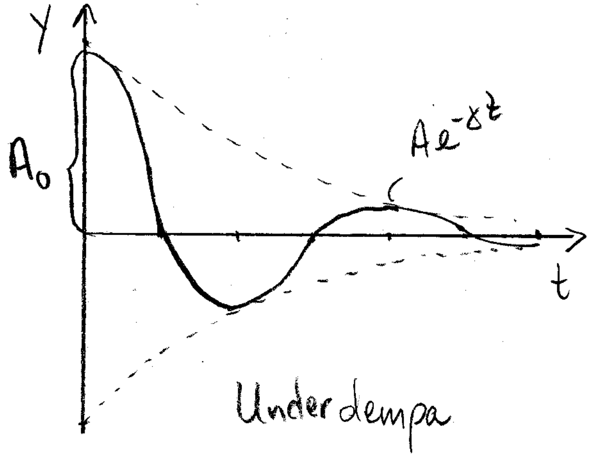
Underdempa: $y(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta)$ der $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
for $\gamma < \omega_0$

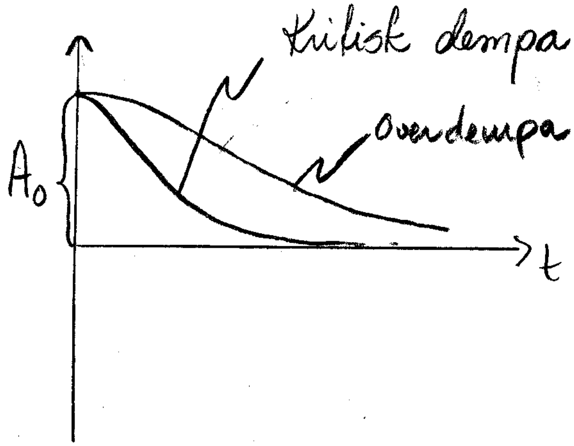
Kritisk dempa: $y(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$ for $\gamma = \omega_0$

Overdempa: $y(t) = Ae^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$ for $\gamma > \omega_0$

Kritisk lengde:
$$\gamma^2 = \omega_0^2$$
$$\frac{\alpha^2}{4\rho^2 A^2} = \frac{2g}{L_c}$$
$$\underline{L_c = \frac{8\rho^2 A^2 g}{\alpha^2}}$$

$L < L_c$ gir underdemping ; $L > L_c$ gir overdemping





Innsatt tallverdier:

$$\underline{\underline{L_c}} = \frac{8\cdot(3{,}0\cdot 10^{-5})^2\cdot(1{,}00\cdot 10^3)^2\cdot 9{,}8}{(6{,}1\cdot 10^{-2})^2}\,\text{m} = \underline{\underline{19\,\text{m}}}$$

Underdempning: $y(t) = A' e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta)$

Startbetingelsene: $y(t=0) = A_0$ I

$v(t=0) = 0$ II

I: $y(t=0) = A'\cos\delta = A_0 \Rightarrow A' = A_0/\cos\delta$

II: $v(t) = -\gamma A' e^{-\gamma t}\cos(\omega t+\delta) - \omega A' e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \delta)$

$$v(t=0) = -\gamma A'\cos\delta - \omega A'\sin\delta = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\tan\delta = -\frac{\gamma}{\omega}} = \underline{\underline{-\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}}}$$

$$\underline{\underline{A' = A_0\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}}}$$ (+ verdi da $A_0 > 0$)

c) Maks utslag finnes ved derivasjon.
Dette gir maks ved en tid t_0 og videre ved t_0+T, t_0+2T osv. der T = perioden til svingningen.

Forholdet mellom to maksimale utslag:

$$P = \frac{y(t_0+T)}{y(t_0)} = \frac{Ae^{-\gamma(t_0+T)}\cos[\omega(t_0+T)+\delta]}{Ae^{-\gamma t_0}\cos[\omega t_0+\delta]}$$

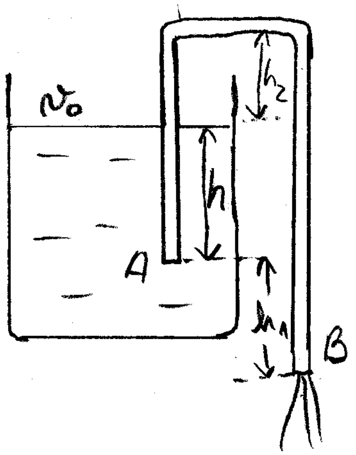
Da $\omega T = 2\pi$ får vi:

$$\underline{\underline{P = e^{-\gamma T}}} = e^{-\gamma 2\pi/\omega} = \underline{\underline{e^{-2\pi\gamma/\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}}}$$

Med de oppgitte tallverdiene:

$$\underline{\underline{P = 0.23}}$$

d)



Vi ser på en strømningslinje fra overflata til B ved tiden t og kaller høyden over A ved dette tidspunktet for $h = h(t)$ $(h(t=0) = h_0)$

Velger punkt B som referansepunkt for høyden i strømningen:

Bernoullis likning gir da:

$$P_0 + \rho g(h+h_1) + \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 = P_B + \tfrac{1}{2}\rho v_B^2$$

$$P_B = P_0 \quad \text{og} \quad v_0 \simeq 0 \text{ da } A_1 \gg A_2$$

⇒ Strømningshastigheten ved B:

$$v_B = \sqrt{2g(h+h_1)}$$

Hastigheten i B har sin maksimale verdi når $t=0$ og $h=h_0$:

$$v_{B,max} = \sqrt{2g(h_0+h_1)}$$

Hastigheten har sin minste verdi idet vastenivået i tanken når punktet $A \Rightarrow h=0$

$$v_{B,min} = \sqrt{2gh_1}$$

Vaskestrømmen ut av tanken gitt ved:

$$I_V = A_2 \cdot v_B = \div A_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad \text{da } dh/dt<0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \div \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g(h+h_1)}$$

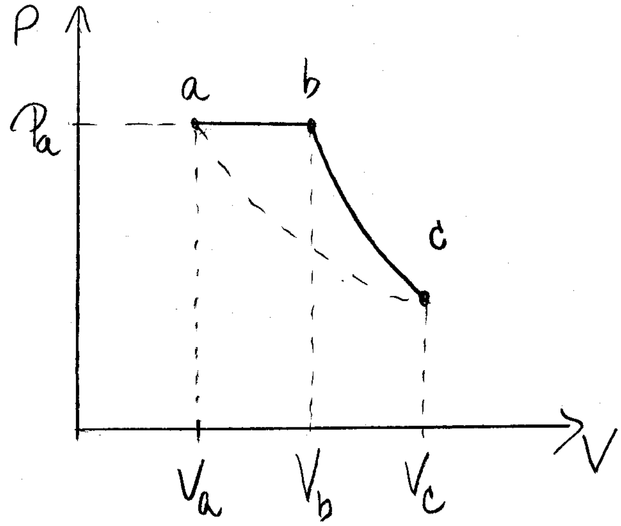
$$\frac{dh}{\sqrt{2g(h+h_1)}} = -\frac{A_2}{A_1}\,dt$$

$$\int_{h_0}^{0} \frac{dh}{\sqrt{2g(h+h_1)}} = -\frac{A_2}{A_1}\int_0^{t_0} dt$$

$$2\cdot\frac{1}{2g}\left[\sqrt{2g(h+h_1)}\right]_{h_0}^{0} = -\frac{A_2}{A_1}t_0$$

$$t_0 = \frac{A_1}{A_2 g}\left[\sqrt{2g(h_0+h_1)} - \sqrt{2gh_1}\right]$$

Oppgave 3



a) Tilstandslikningen:

$$PV = 2RT \quad \text{da } n = 2$$

$$\underline{\underline{V_b = 2V_a}} \; ; \; \underline{\underline{P_b = P_a}}$$

$$P_b V_b = 2RT_b \Rightarrow \underline{\underline{T_b = 2T_a}}$$

$$\underline{\underline{T_c = T_a}}$$

Adiabatisk prosess mellom b og c:

$$T_c V_c^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1}$$

$$V_c^{\gamma-1} = \frac{T_b}{T_c} V_b^{\gamma-1} = \frac{2T_a}{T_a}(2V_a)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V_c}} = 2V_a \, 2^{\frac{1}{\gamma-1}} = 2V_a \cdot 2^{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{V_a \cdot 4\sqrt{2}}}$$

$$P_c V_c = 2RT_c \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_c}} = \frac{2RT_a}{4\sqrt{2}\,V_a} = \underline{\underline{\frac{P_a}{4\sqrt{2}}}}$$

Endring i indre energi:

$$\Delta U_{a-b} = c_V' \cdot n \Delta T_{ab} \qquad c_V' = \frac{3}{2}R \text{ for } \gamma = \frac{5}{3}$$

$$\underline{\underline{\Delta U_{a-b}}} = \frac{3}{2}R \cdot 2(T_b - T_a) = \underline{\underline{3RT_a}}$$

$$\underline{\underline{\Delta U_{b-c}}} = c_V' \cdot n \Delta T_{bc} = -\Delta U_{ab} = \underline{\underline{-3RT_a}}$$

Da temperaturen i a og c er den samme har vi ingen endring i indre energi idet vi går fra a til c siden $U = U(T)$.

b) Tilført varme:

Prosess-trinnet b-c adiabatisk $\Rightarrow Q_{bc} = 0$

Prosessen fra a til b er ved konstant trykk:

$$Q_{ab} = c_p' \cdot n \Delta T = (c_v' + R) n \Delta T$$

$$\underline{\underline{Q_{ac}}} = \underline{Q_{ab}} = \frac{5}{2} R \cdot 2 (T_b - T_a) = \underline{\underline{5 RT_a}}$$

Arbeid utført av gassen:

$$\underline{W_{ab}} = \int_{V_a}^{V_b} P_a \, dV = P_a (V_b - V_a) = P_a V_a = \underline{2RT_a}$$

$$\underline{W_{bc}} = -\Delta U_{bc} = \underline{3RT_a}$$

$$\underline{\underline{W_{abc}}} = W_{ab} + W_{bc} = \underline{\underline{5RT_a}}$$

(Konsistent med $\Delta U_{abc} = 0$)

c) Virkningsgraden $\quad \varepsilon = \dfrac{W_{netto}}{Q_{tilført}}$

Tilført varme: $\underline{Q_{abc} = 5RT_a}$

Arbeid utført på gassen i prosessen c-a:

$$W_{ca} = \int_{V_c}^{V_a} P dV = \int_{V_c}^{V_a} 2RT_a \frac{dV}{V} = 2RT_a \ln(V_a/V_c)$$

$$W_{ca} = 2RT_a \ln \frac{V_a}{V_a \cdot 2^{5/2}} = -2RT \cdot \frac{5}{2} \ln 2$$

Netto arbeid pr syklus:

$$\underline{W_{syklus}} = 5RT_a - 5RT_a \ln 2 = \underline{5RT_a(1 - \ln 2)}$$

$\Rightarrow$ Virkningsgraden: $\varepsilon = \dfrac{5RT_a(1-\ln 2)}{5RT_a}$

$$\underline{\underline{\varepsilon = 0{,}31}}$$

Virkningsgrad for Carnotprosess som opererer mellom de samme temperaturene:

$$\underline{\underline{\varepsilon_{Carnot}}} = 1 - \frac{T_a}{T_b} = 1 - \frac{T_a}{2T_a} = \underline{\underline{0{,}50}}$$

d) Endring i entropi gitt ved:

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$$

For prosessen a – b, isobar:

$$\Delta S_{ab} = \int_{T_a}^{T_b} \frac{dQ}{T} = \int_{T_a}^{T_b} \frac{c_p' \, n \, dT}{T} = c_p' \, n \ln \frac{T_b}{T_a}$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{ab}}} = \frac{5}{2}R \cdot 2 \ln \frac{2T_a}{T_a} = \underline{\underline{5R \ln 2}}$$

For den adiabatiske prosessen b – c : $dQ_{rev} = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta S_{bc} = 0}}$$

For den isoterme prosessen:

$$\Delta S_{ca} = \int_{V_c}^{V_a} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_a} \int_{V_c}^{V_a} P dV \quad \text{da } dQ = dW$$

for en isoterm prosess

$$\Delta S_{ca} = \frac{1}{T_a} \cdot W_{ca} = \frac{1}{T_a}(-5RT_a \ln 2)$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{ca} = -5R \ln 2}}$$

Når vi gjennomløper den reversible syklusen er

$\Delta S_{syklus} = 0$

En tilstandsvariabel er kun avhengig av det punktet vi ser på i PV diagrammet og er uavh. av hvilken prosess som gav denne tilstanden. Når vi gjennomløper en vilkårlig syklus og ender opp i starttilstanden vil en tilstandsvariabel igjen ha samme verdi som i starttilstanden. Entropien har denne egenskapen og er derfor en tilstandsfunksjon.