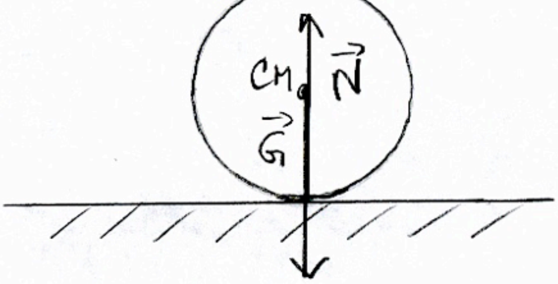
LØSNINGSFORSLAG

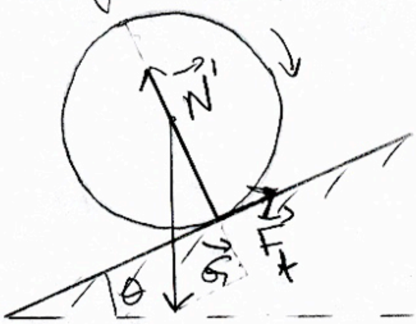
KONT AUG 2004 - TFY 4115 FYSIKK

Oppgave 1



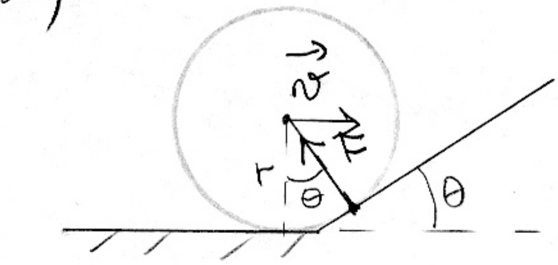
Mens kula ruller på det horisontale underlaget virker tyngdekrafta $\vec{G}$ og normalkrafta fra underlaget på kula $\vec{N}$. Disse to er like store og motsatt retta.

Det virker ingen friksjonskrafta da vi har konstant vinkelhastighet. En friksjonskraft ville ha hatt et dreiemoment om CM og bidratt til å en vinkelhastigheten på kula.



Når kula ruller på skråplanet virker tyngdekrafta $\vec{G}$ som over. Normalkrafta N' er normalt skråplanet og er nå $|N'| = G\cos\theta$ $(|N'| < |N|)$

Det virker nå en friksjonskraft $\vec{F}_f$ oppover langs skråplanet, som forhindrer at kula sklir nedover skråplanet og som gir dreiemoment om CM og reduksjon av vinkelhastigheten til kula.
I størrelse er $|F_f| < G\sin\theta$ da kula etter hvert bremses opp, stopper og ruller ned igjen fra skråplanet.

b) 

②

Kula kolliderer med skråplanet i B. Kraften F i støtøyeblikket har ikke noe dreiemoment om B. Spinnet om B er derfor bevart i støtet. (Rullebetingelsen er oppfylt $v_0 = r\omega_0$; $v_1 = r\omega_1$

Spinnet om B $\vec{L}_B = M\vec{R}\times\vec{V} + \vec{L}_{CM}$

der V er hastigheten til massemiddelpunktet CM og $\vec{R}$ avstand fra CM til punkt B.

$L_{CM} = I_{CM}\cdot\omega_1 = \frac{2}{5}mr^2\omega$

(På det horisontale underlaget:

$$L_{B,0} = m\cdot v_0\cdot r\cos\theta + \frac{2}{5}mr^2\omega_0$$
$$= mr^2\omega_0\cos\theta + \frac{2}{5}mr^2\omega_0$$
$$= mr^2\left(\cos\theta + \frac{2}{5}\right)\omega_0$$

(På skråplanet: $L_{B,1} = mv_1r + \frac{2}{5}mr^2\omega_1 = mr^2\omega_1 + \frac{2}{5}r^2\cdot m\omega_1$

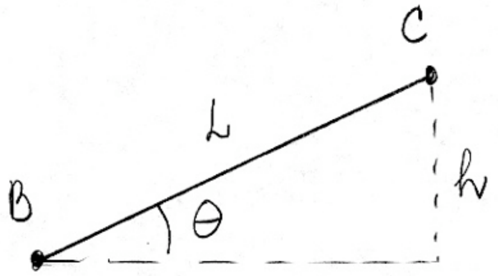
$$L_{B,1} = \frac{7}{5}mr^2\omega_1$$

Konservering av spinn gir: $L_{B,0} = L_{B,1}$

$$mr^2\left(\cos\theta + \frac{2}{5}\right)\omega_0 = \frac{7}{5}mr^2\omega_1$$

$$\underline{\underline{\omega_1 = \frac{5}{7}\left(\cos\theta + \frac{2}{5}\right)\omega_0}}$$ q.e.d.

c) For bevegelsen langs skråplanet er energien bevart siden kula ikke sklir. Startposisjon B og stopposisjon C



Definerer nullpkt. for pot. energi i B:

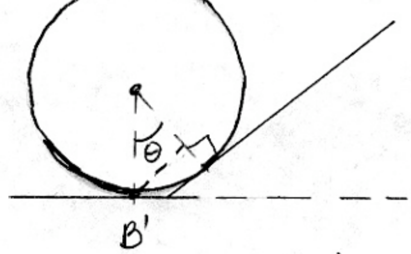
$$E_B = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_1^2$$

$$E_C = mgh = mg\frac{L}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow E_B = E_C = \frac{1}{2}mr^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\omega_1^2 = mg\frac{L}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \frac{7}{10g}\cdot r^2\omega_1^2 \sin\theta}}$$

d)



Når kula treffer det horisontale underlaget igjen. Umiddelbart før støtet har vi $v_1 = m\omega_1$. I støtet er spinnet om B' bevart

$$L_{B'} = mv_1 r\cos\theta + I_{CM}\omega_1 = mv_2 r + I_{CM}\omega_2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega_2}} = \frac{5}{7}\left(\cos\theta + \frac{2}{5}\right)\omega_1 = \underline{\underline{\frac{25}{49}\left(\cos\theta + \frac{2}{5}\right)^2\omega_0}}$$

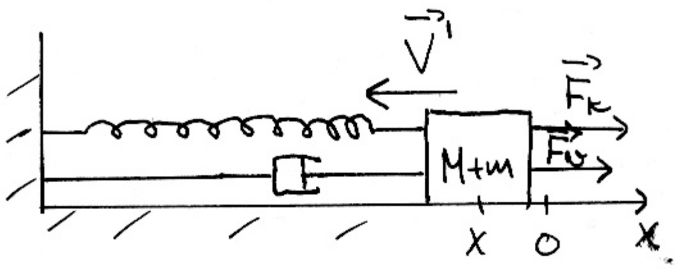
Oppgave 2

a) i. Bevaring av bevegelsesmengde før og etter støtet:

$$mv_0 + M\cdot 0 = (m+M)V$$

$$\underline{\underline{V = \frac{mv}{(m+M)}}}$$

ii



Fra figuren:
Newtons 2. lov
$\Sigma F = F_k + F_v = (M+m)a$

$\Rightarrow (M+m)\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$

$\Rightarrow$ Diff. likn. $\underline{\underline{(M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0}}$

iii. Løsning av diff. likn. $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \delta)$

Fra diff. likn. $\gamma = \frac{b}{2(M+m)}$ (sammenlikn. $m \rightarrow M+m$)

$$\underline{V} = \frac{10\cdot 10^{-3}\,kg \cdot 400\,m/s}{(1,00 + 10,0\cdot 10^{-3})\,kg} = \underline{3,96\,m/s}$$

Startbetingelser:

I $\quad x(t=0) = 0 = A\cos\delta \Rightarrow \cos\delta = 0 \Rightarrow \delta = \pm \pi/2$

II $\quad \dot{x}(t) = -\omega' A e^{-\gamma t}\sin(\omega' t + \delta) - \gamma A e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \delta)$

$\dot{x}(t=0) = -V = -\omega' A \sin\delta$ da $\cos\delta = 0$

Da $A > 0$ og $\omega' > 0$ må $\sin\delta > 0 \Rightarrow \sin\delta = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{\delta = \pi/2}}$

$$\underline{\underline{\omega_0}} = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{200\,N/m}{1,010\,kg}} = \underline{\underline{14,1\,s^{-1}}}$$

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{b}{2(M+m)} = \frac{14,2\,Ns/m}{2(1,010\,kg)} = \underline{\underline{7,03\,s^{-1}}}$$

$$\underline{\underline{\omega'}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{14,1^2 - 7,03^2}\,s^{-1} = \underline{\underline{12,2\,s^{-1}}}$$

Fra II : $\dot{x}(t=0) = -V = -\omega' A$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \frac{V}{\omega'} = \frac{3,96\,m/s}{12,2\,s^{-1}} = \underline{\underline{0,325\,m}}$$

b) i. Max utslag blir 1. negative max (ɔ: min)

Max/min for:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\omega' A e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \delta) - A\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \delta) = 0$$

Da $A \neq 0$ og $e^{-\gamma t} \neq 0$

$$\Rightarrow -\gamma \cos(\omega' t_1 + \delta) - \omega' \sin(\omega' t_1 + \delta) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\omega' t_1 + \delta) = -\gamma/\omega' = -\frac{7{,}03}{12{,}2} = -0{,}576$$

$$\Rightarrow \omega' t_1 + \delta = 150° + n \cdot 180°$$

Første verdi $(n=0)$: $\omega' \cancel{t_1} + \delta = 150° \Rightarrow \omega' t_1 = 60° = \pi/3$

$$\Rightarrow x(t_1) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega' t_1 + \delta) < 0 \quad \text{ɔ: 1. minimum.}$$

Maksimalt utslag fra likevektposisjonen; x_{min}:

$$x_{min} = A e^{-\gamma t_1} \cos(\omega' t_1 + \delta)$$

$$\underline{x_{min}} = A e^{-\frac{\gamma}{\omega'}(t_1 \omega')} \cos(150°) = \underline{\underline{-0{,}154\,m}}$$

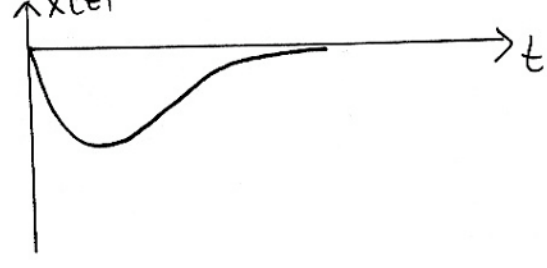
ii. $$\frac{x_{max}(t)}{x_{max}(t + T/2)} = \left| \frac{A e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \delta)}{A e^{-\gamma(t+T/2)} \cos[\omega'(t + T/2) + \delta]} \right|$$

$$T/2 = \frac{2\pi}{\omega'} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{\omega'} \Rightarrow \cos[\omega'(t+T/2)+\delta] = \cos(\omega' t + \pi + \delta) = -\cos(\omega t + \delta)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{x_{max}(t)}{x_{max}(t + T/2)}}} = e^{\gamma \pi/\omega'} = e^{7{,}03 \cdot \frac{\pi}{12{,}2}} = \underline{\underline{6{,}11}}$$

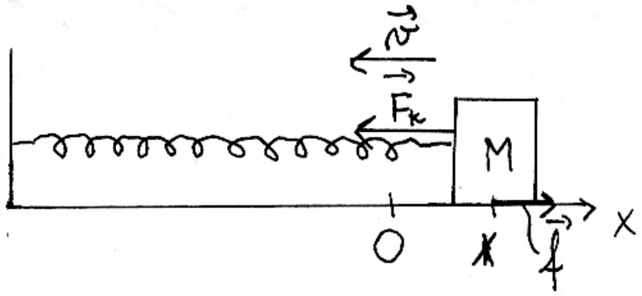
iii. Kritisk dempning : $\gamma = \omega_0 = \dfrac{b_{krit}}{2(M+m)}$

$$\underline{b_{krit}} = 2\omega_0 (M+m) = \underline{\underline{28{,}5 \, \frac{Ns}{m}}}$$



Svingeforløp: Utslag til min og tilbake mot likevektsposisjonen uten å passere denne.

c)



i. $\Sigma F = -kx_1 + f = M\ddot{x}$ for avtagende x (se figuren over)

$\Sigma F = -kx - f = M\ddot{x}$ for økende x

⇒ Diff. liken. $\underline{\underline{M\ddot{x} + kx = \pm f = \pm \mu N = \pm \mu Mg}}$

Løsning: $x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + K \quad 0 \le t \le T/2$ (avtag. x)

$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta_2) - K \quad \frac{T}{2} \le t \le T$ (økende x)

Diff. liken. er ikkehomogen

Homogen liken.: $M\ddot{x} + kx = 0$ som for enkel harm. osc.

med løsning av type $A\cos(\omega t + \delta)$

som oppfyller diff. liken. dersom $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

OBS! Endres ikke ved friksjon

Spesiell løsning av diff. liken. $x_{spes} = \frac{f}{k} = K$ (konst)

som oppfyller diff. liken. (innsetting) og som gir: $\underline{\underline{K = \frac{\mu Mg}{k}}}$

d) i. Startbetingelser

I $\quad x_1(t=0) = A_1 \cos\delta_1 + K = A_0$

II $\quad v(t) = \dot{x} = -\omega A_1 \sin(\omega t + \delta_1)$

$\dot{x}(t=0) = 0 = -\omega A_1 \sin\delta_1 \Rightarrow \sin\delta_1 = 0$

I ⇒ $A_1 + K = A_0$

⇒ $\underline{\underline{A_1 = A_0 - K}}$

Betingelser ved $T/2$

$$x_1 = x_2 \quad \text{(Kontinuerlig bevegelse)}$$
$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \quad \text{(Kontinuerlig hastighet og } v=0 \text{ i max.pkt.)}$$

III $x_1(T/2) = A_1 \cos(\omega T/2) + K = A_1 \cos\pi + K = -A_1 + K$

IV $x_2(T/2) = A_2 \cos(\omega T/2 + \delta_2) - K$

V $\dot{x}_2(T/2) = -\omega A_2 \sin(\pi + \delta_2) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\delta_2 = 0}}$

III og IV gir $A_2 \cos\pi - K = -A_2 - K = -A_1 - K$

$$\underline{\underline{A_2 = A_1 - 2K}}$$

$\Rightarrow$ For $0 \le t \le T$ er løsningen av diff. likn.:

$$x_1 = (A_0 - K)\cos(\omega t) + K \qquad 0 \le t \le T/2$$
$$x_2 = (A_0 - 3K)\cos(\omega t) - K \qquad T/2 \le t \le T$$

ii. Energi ved $t=0$: $E_{p0} = \frac{1}{2}kA^2$

Ved $t=T$ er $x_2 = A_0 - 4K$

$\Rightarrow$ Energi ved $t=T$: $E_{pT} = \frac{1}{2}k(A_0 - 4K)^2$

Energitap ved friksjon:

$$\underline{\underline{W}} = \Delta E_p = -4KkA_0 + 8kK^2 = \underline{\underline{-f(4A_0 - 8K)}}$$

Friksjonsarbeidet:

$$W = -f\Delta x = -f(A_0 + A_1 - K) - f(A_1 - K + A_1 - 3K)$$
$$= -f(4A_0 - 8K)$$

Friksjonsarbeidet i løpet av første svingeperiode er lik energitapet i samme periode (som forventa).

Oppgave 3

a) i Trinn 1→2 er en isokor prosess:

Tilstandslikningen $pV = nRT$. Her n og V konstant.

$$\Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad \Rightarrow \underline{\underline{p_2 = p_1 \left(T_2/T_1 \right)}}$$

Trinn 2→3 adiabatisk prosess

Har $pV^{\gamma} = \text{konst.}$ og $p^{1-\gamma} T^{\gamma} = \text{konst.}$

$$\Rightarrow p_2^{1-\gamma} T_2^{\gamma} = p_3^{1-\gamma} T_3^{\gamma} \equiv p_1^{1-\gamma} T_3^{\gamma}$$

$$\Rightarrow T_3^{\gamma} = T_2^{\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\gamma} = T_2^{\gamma} \left(T_2/T_1 \right)^{1-\gamma}$$

$$T_3^{\gamma} = T_2 \cdot T_1^{\gamma-1} \quad \Rightarrow T_3 = T_2^{\frac{1}{\gamma}} \cdot T_1^{(\gamma-1)/\gamma}$$

$$\underline{\underline{T_3 = T_1 \left(T_2/T_1 \right)^{1/\gamma}}}$$

ii. Trinn 1→2 : Varme tilført ved konst. volum

$$Q_{12} = n C_V (T_2 - T_1)$$

$$Q_{12} = 2{,}00\,\text{mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{molK}} (750-300)\text{K} = 18707\,\text{J}$$

$$\underline{\underline{Q_{12} = 18{,}7\,\text{kJ}}}$$

Temperaturen øker uten arbeid utført: Varme tilført gassen.

Trinn 2→3 adiabatisk prosess:

Ingen varmeutveksling med omgivelsene

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q_{23} = 0}}$$

Trinn 3 → 1 : Varme avgitt ved konstant trykk

$$Q_{31} = nc_p'(T_1 - T_3) = n\gamma c_V'\left[T_1 - T_1(T_2/T_1)^{1/\gamma}\right]$$

$$Q_{31} = n\gamma c_V' T_1\left[1 - (T_2/T_1)^{1/\gamma}\right]$$

$$c_p' = c_V' + R = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R \; ; \quad \gamma = \frac{c_p'}{c_V'} = \frac{7}{5} = 1{,}40$$

$$Q_{31} = 2{,}00\,\text{mol} \cdot 1{,}40 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}314\,\frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 300\,\text{K}\left[1 - \left(\frac{750}{300}\right)^{1/1.4}\right] = -16135\,\text{J}$$

$\underline{\underline{Q_{31} = -16{,}1\,\text{kJ}}}$: Avgitt fra gassen

b) 1. lov for prosessen : $Q = \Delta U + W$

Syklisk prosess : $\Delta U = 0$

$\Rightarrow W_{net} = Q_{net}$

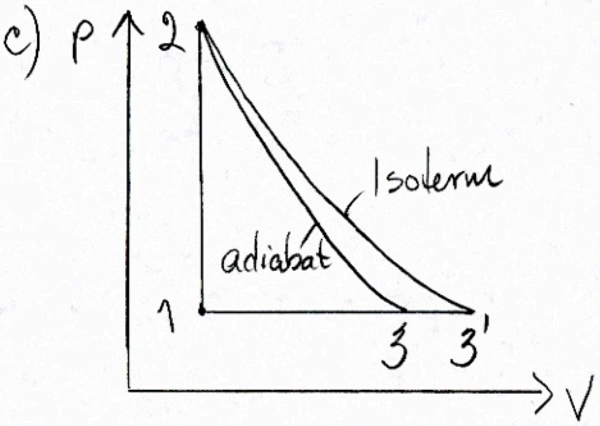
$$\underline{\underline{W_{net}}} = Q_{12} + Q_{31} = \underline{\underline{2{,}57\,\text{kJ}}}$$

Virkningsgraden for prosessen :

$$\varepsilon = \frac{W_{net}}{Q_{tilført}} = \frac{W_{net}}{Q_{12}} = \frac{2572\,\text{J}}{18707\,\text{J}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon = 0.137}}$$

c)



Isoterm : $pV = \text{konst.}$

$\Rightarrow p \propto \frac{1}{V}$

Adiabat : $pV^\gamma = \text{konst}$

$p \propto \frac{1}{V^\gamma}$

Da $\gamma > 1$ vil isotermen falle langsommere enn adiabaten fra tilstand 2.

Tilstand 3' har samme trykk som 3, mens $V_{3'} > V_3$ $\Rightarrow$ Prosess med isotermt trinn 1 - 2 - 3' - 1 har større areal en prosessen med et adiabatisk trinn, 1 - 2 - 3 - 1, se figur.

$\Rightarrow$ $\underline{W_{net,\,isoterm} > W_{net,\,adiabat}}$

d)

Trinn $1 \to 2$: Som tidligere : $W_{12} = 0$

$$\underline{Q_{12} = \Delta U = n c_V' (T_2 - T_1)} \quad \text{(tilført)}$$

Trinn $2 \to 3'$ $\Delta U = 0$

$$Q_{23'} = W_{23'} = \int_{V_2}^{V_3'} p\,dV = nRT_2 \ln(V_3'/V_1)$$

Isoterm $T_2 = T_3'$ $\Rightarrow$ $p_2 V_2 = p_3' V_3' = p_2 V_1 = p_1 V_3'$

$$\Rightarrow V_3' = V_1 (p_2/p_1) = V_1 (T_2/T_1)$$

$$\underline{Q_{23'} = nRT_2 \ln(T_2/T_1)} \quad \text{(tilført)}$$

Trinn $3' \to 1$: $\Delta Q = n c_V' (T_1 - T_3') = -W_{3'1} + n c_p' (T_1 - T_3)$

$$W_{3'1} = n (c_p' - c_V')(T_1 - T_3) = n(c_p' - c_V')(T_1 - T_2)$$

$\Rightarrow W_{net,\,isoterm} = n(c_p' - c_V')(T_1 - T_2) + nRT_2 \ln(T_2/T_1)$

$W_{net,\,isoterm} = 2{,}00\,\text{mol} \cdot 8{,}314 \frac{J}{\text{mol}\,K} \left[\left(\frac{7}{2} - \frac{5}{2}\right)(300 - 750)\,K + 750\,K \ln\left(\frac{750}{300}\right) \right]$

$W_{net,\,isoterm} = 3944\,J \simeq 3{,}94\,kJ$

$Q_{tilført} = Q_{12} + Q_{23'} = 18707\,J + 2{,}0 \cdot 8{,}314 \frac{J}{\text{mol}\cdot K} \cdot 750\,K \ln\left(\frac{750}{300}\right)$
$= 30134\,J$

Virkningsgrad: $\underline{\underline{\varepsilon_{isoterm}}} = \dfrac{W_{net,\,isoterm}}{Q_{tilført}} = \underline{\underline{0{,}131}}$

Maksimal virkningsgrad: $\varepsilon_{Carnot} = 1 - \dfrac{T_c}{T_h} = 1 - \dfrac{300K}{750K}$

$\underline{\underline{\varepsilon_{Carnot} = 0{,}600}}$

Differansen $W_{net,\,isoterm} - W_{net,\,adiabatisk} = (3944 - 2572)J$
$= 1372J$

Tilsvarer en økning i netto utført arbeid med 53%. Men isotermen $2 \to 3'$ medfører også en økning i tilført varme, $Q_{23'} > 0$, på 61%, slik at $\varepsilon_{isoterm} \lesssim \varepsilon_{adiabatisk}$. Begge disse er ca 22% av ε_{Carnot}. Den 3-trinns prosessen har lav virkningsgrad, relativt lite påvirket av om trinnet $2 \to 3$ / $2 \to 3'$ er en adiabatisk eller isoterm ekspansjon.