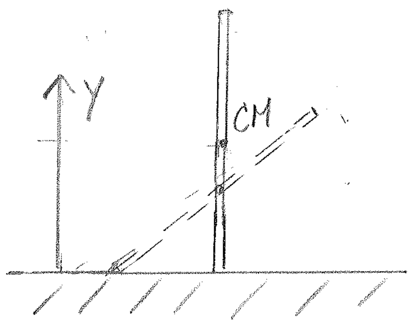
LØSNINGSFORSLAG

EKSAMEN DESEMBER 2004 TFY 4115 FYSIKK

Oppgave 1

a)



Uten friksjon vil massemiddelpunktet falle rett ned: Energibevaring idet flata velges som nullpunkt for potensiell energi.

$$\Delta E_p = \Delta E_k$$

$$Mg\left(\frac{L}{2} - y\right) = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} M L^2 \cdot \left(\frac{v_{CM}}{L/2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad g\left(\frac{L}{2} - y\right) = \frac{1}{2} v_{CM}^2 + \frac{1}{6} v_{CM}^2 = \frac{2}{3} v_{CM}^2$$

Når staven når den horisontale flata er $y = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{v_{CM} = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}}$$

Dersom endepunktet ikke glir vil vi ha en friksjonskraft fra flata på staven. Så lenge staven ikke glir vil ikke friksjonskrafta utføre noe arbeid og vi har også i dette tilfellet energibevarelse. Med samme endring i potensiell energi, vil resulterende kinetiske energi" være den samme $\Rightarrow$ Samme v_{CM} idet staven treffer den horisontale flata.

b) Fra a) har vi:

$$g\left(\frac{L}{2}-y\right)=\frac{2}{3}v_{cm}^2$$

Derivasjon gir:

$$-g\dot{y}=\frac{4}{3}v_{cm}\cdot\dot{v}_{cm}=\frac{4}{3}v_{cm}\cdot a_{cm}$$

⇒ Vertikal akselerasjon blir dermed:

$$\underline{a_{vert}=a_{cm}=-\frac{3}{4}g} \quad \text{q.e.d.}$$

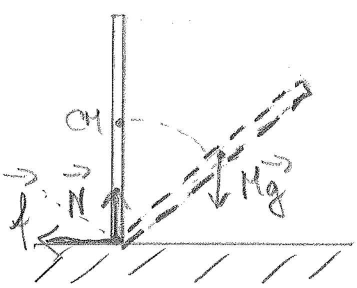
÷ tegnet skyldes at a_{cm} har retning langs negativ y-retn.

c) Resulterende kraft uten friksjon (staven glir):
Ingen friksjonskraft ⇒ Bare normalkraft fra underlaget:

$$\Sigma F = Ma_{vert} = N - Mg = \div\frac{3M}{4}g$$

$$\Rightarrow \underline{N=\frac{1}{4}Mg}$$;: Resulterende kraft, ⊥ på ift. overflata

Resulterende kraft med friksjon



Sentripetalakselerasjon:

$$f = Ma = M\,v_{cm}^2/r$$

$$\underline{f} = M\cdot\frac{3gL}{4\cdot\frac{L}{2}}=\frac{3}{2}Mg \quad \text{(horisontalt)}$$

Vertikalt: $\Sigma F = N - Mg = Ma_{vert}$

$$\Rightarrow N=\frac{1}{4}Mg$$

Resulterende kraft: $F=\sqrt{f^2+N^2}$

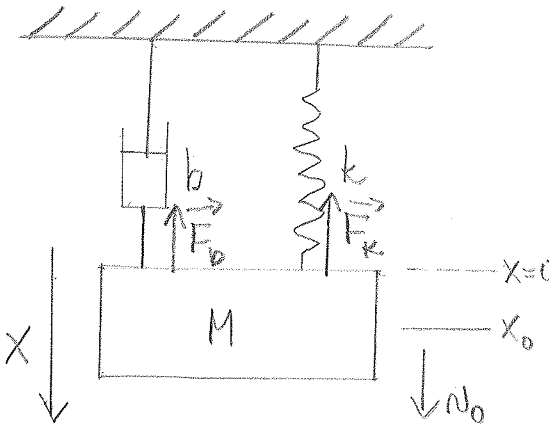
$$\Rightarrow \underline{F}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}Mg\right)^2+\left(\frac{1}{4}Mg\right)^2}=Mg\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{16}}=\underline{\frac{Mg}{4}\sqrt{37}}$$

Retningene til $\vec{f}$ og $\vec{N}$ angitt på figuren over

⇒ F danner vinkelen Θ gitt ved $\tan\Theta=\frac{1/4}{3/2}=\frac{1}{6}$

⇒ $\Theta = 9{,}5°$ med horisontalen.

Oppgave 2



a) Newtons 2. lov:

$$\sum F = Ma = -kx - b\dot{x}$$

$$\Rightarrow M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Med $\gamma = b/2M$ og $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

i. Startbetingelser : $x(t=0) = x_0$

$v(t=0) = v_0$

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \delta)$$

$$x(t=0) = \underline{A_0 \cos\delta = x_0} \quad (1) \quad \text{Ene likning}$$

$$v(t) = -\omega' A_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega' t + \delta) - \gamma A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \delta)$$

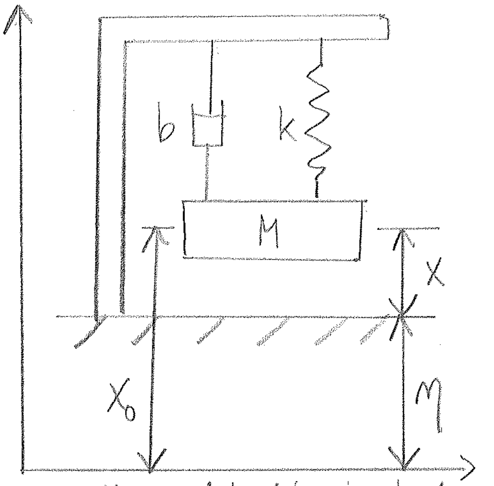
$$v(t=0) = \underline{v_0 = -A_0\omega'\sin\delta - \gamma A_0\cos\delta} \quad (2) \text{ Andre likn.}$$

ii. Likn (2)/likn (1) gir:

$$\frac{v_0}{x_0} = \frac{-A_0[\omega'\sin\delta + \gamma\cos\delta]}{A_0\cos\delta} = -\omega'\tan\delta - \gamma$$

$$\Rightarrow \underline{\tan\delta = -\frac{1}{\omega'}\left[\frac{v_0}{x_0} + \gamma\right]} \quad \text{q.e.d.}$$

b)



Treghetsreferansesystem

i. $X_0 = \eta + x$ (3)

$\ddot{X}_0 = \ddot{\eta} + \ddot{x}$ (4)

Fjærkraft : $F_k = -kx$

Dempekraft : $F_b = -b\dot{x}$

Fjærkrafta og dempekrafta avhenger kun av avstanden mellom jorda (opphenget) og massen M, gitt av x.

Newtons 2. lov i det absolutte koordinatsystemet:

$$\sum F = F_k + F_b = Ma = -kx - b\dot{x} = M\ddot{X}_0$$

Innsetting av (4) gir : $M(\ddot{\eta} + \ddot{x}) + b\dot{x} + kx = 0$

Med $\gamma = b/2M$ og $\omega_0^2 = k/M$ får vi da :

$$\underline{\underline{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{\eta}}}$$ q.e.d

ii. Med $-\ddot{\eta} = C\cos(\omega t)$ er den stasjonære løsningen for denne tvungne svingningen :

$$\underline{\underline{x(t) = A(\omega)\cos(\omega t - \delta)}}$$

For en ytre kraft $F(t) = F_0 \cos \omega t$ har vi:

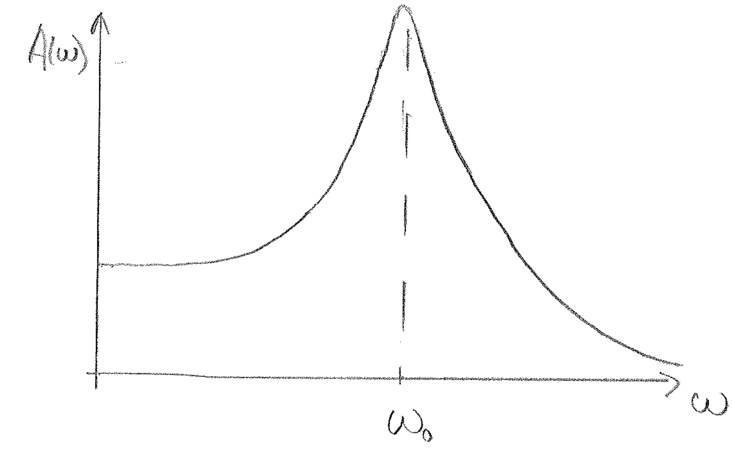
$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{M^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

Her er C en akselerasjon ⊃: F_0/M

$$\Rightarrow \underline{\underline{A(\omega) = \frac{C}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}}}$$

$$\underline{\tan\delta} = \frac{b\omega}{M(\omega_0^2 - \omega^2)} = \underline{\underline{\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}}$$

iii.



Kvalitativt bilde av $A(\omega)$.

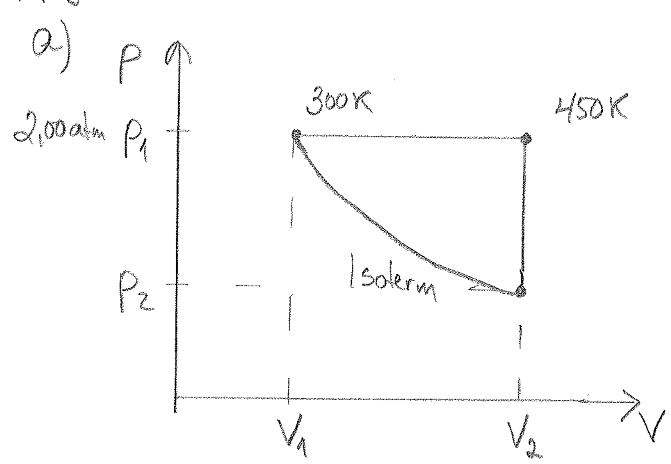
c) $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $\gamma = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{\pi}{QT_0}$

$$A(\omega) = \frac{C}{\sqrt{\left[\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\pi}{QT_0}\right)^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}}$$

$$\underline{A(\omega)} = \frac{10\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}}{(2\pi)^2\sqrt{\left[\left(\frac{1}{5{,}0}\right)^2 - \left(\frac{1}{20}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{1}{2{,}0\cdot 5{,}0}\right)^2\left(\frac{1}{20}\right)^2}\ \mathrm{s^{-2}}} = \underline{6{,}7\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$

Oppgave 3

a)



$C_V = 41{,}6\ \mathrm{J/K}$

$C_p = C_V + nR$

$C_p = 41{,}6\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} + 2{,}00\,\mathrm{mol}\cdot 8{,}31\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\cdot K}}$

$C_p = 58{,}2\ \mathrm{J/K}$

Adiabatkonstanten

$\underline{\gamma} = \frac{C_p}{C_V} = \frac{58{,}2}{41{,}6} = \underline{1{,}40}$

Molar varmekapasitet ved konstant volum

$$c_V = \frac{C_V}{n} = 20{,}8\,\frac{J}{mol\cdot K} = \frac{dU}{dT} = \frac{f}{2}\cdot R \qquad f = \text{antall frihetsgrader}$$

$$\Rightarrow \underline{f = 5}$$

⇒ Gassen har 5 frihetsgrader (2-atomig gass) som er 3 translasjonsfrihetsgrader og 2 rotasjonsfrihetsgrader.

b)

$$\underline{V_1} = \frac{nRT_1}{p_1} = \frac{2{,}00\,mol\cdot 8{,}3145\,\frac{J}{mol\cdot K}\cdot 300K}{2{,}02\cdot 10^5\,Pa} = \underline{0{,}0247\,m^3}$$

$$\underline{V_2} = \frac{nRT_2}{p_1} = \frac{2{,}00\,mol\cdot 8{,}3145\,\frac{J}{mol\cdot K}\cdot 450K}{2{,}02\cdot 10^5\,Pa} = \underline{0{,}0370\,m^3}$$

Arbeid i den isobar prosessen a → b:

$$W_{ab} = \int_{V_1}^{V_2} p_1\,dV = p_1(V_2 - V_1) = 2{,}02\cdot 10^5\,Pa\,(0{,}0370 - 0{,}0247)\,m^3$$

$$\underline{W_{ab} = 2{,}485\,kJ}$$

Arbeid i den isokor prosessen, b → c,: $\Delta V = 0$

$$\Rightarrow \underline{W_{bc} = 0}$$

Arbeid i den isoterme prosessen:

$$W_{ca} = \int_{V_2}^{V_1} p\,dV = \int_{V_2}^{V_1} \frac{nRT_1}{V}\,dV = nRT_1 \ln\left(V_1/V_2\right)$$

$$\Rightarrow \underline{W_{ca}} = 2{,}00\,mol\cdot 8{,}3145\,\frac{J}{mol\cdot K}\cdot 300K \ln\left(\frac{0{,}0247}{0{,}0370}\right) = \underline{-2{,}016\,kJ}$$

Netto arbeid pr. syklus:

$$\underline{W_{netto}} = W_{ab} + W_{ca} = (2{,}485 - 2{,}016)\,kJ = \underline{0{,}469\,kJ}$$

Virkningsgraden : $\varepsilon = \dfrac{W_{netto}}{Q_{tilført}}$

Varme tilført i prosess a→b og avgitt i b→c og c→a

Varme tilført i den isobare prosessen a→b :

$$\underline{Q_{ab}} = C_p \Delta T = 58{,}2 \frac{J}{K} \cdot (450-300)K = \underline{8{,}730 \, kJ}$$

⇒ Virkningsgraden : $\underline{\varepsilon} = \dfrac{0{,}469}{8{,}730} = \underline{\underline{0{,}0537}}$

(Ikke særlig brukbart for anvendelsen)

c) Entropiendring i den isobare prosessen a→b:

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} = \frac{C_p \, dT}{T}$$

$$\Delta S_{ab} = \int_{T_1}^{T_2} C_p \frac{1}{T} dT = C_p \ln(T_2/T_1) = 58{,}2 \frac{J}{K} \cdot \ln\left(\frac{450}{300}\right)$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{ab} = 23{,}6 \, J/K}}$$

Entropiendring i den isokore prosessen b→c :

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} = \frac{C_v \, dT}{T}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta S_{bc}}} = C_v \ln(T_1/T_2) = 41{,}6 \frac{J}{K} \ln\left(\frac{300}{450}\right) = \underline{\underline{\div 16{,}9 \frac{J}{K}}}$$

Endring i entropi i den isoterme prosessen a→b :

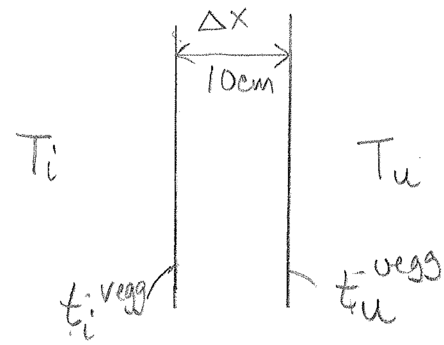
$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} = \frac{p\,dV}{T} = \frac{nRT}{T \cdot V} dV$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta S_{ca}}} = nR \ln(V_1/V_2) = 2{,}00 \cdot 8{,}314 \frac{J}{K} \ln\left(\frac{0{,}0247}{0{,}0370}\right) = \underline{\underline{-6{,}7 \frac{J}{K}}}$$

$$\underline{\Delta S_{syklus} = \Delta S_{ab} + \Delta S_{bc} + \Delta S_{ca} = \underline{0}}$$

Kommentar: Fordi entropien er en tilstandsfunksjon forventes samme verdi etter en syklus ⇒ $\Delta S_{syklus} = 0$ som vi finner ved beregning.

Oppgave 4



a)

$$I = \frac{A\,(T_i - T_u)}{\frac{1}{h_u} + \frac{\Delta X}{k} + \frac{1}{h_i}}$$

$$I = \frac{150\,\mathrm{m}^2\,[20-(-20)]\,\mathrm{K}}{\left(\frac{1}{20} + \frac{0{,}10}{0{,}040} + \frac{1}{5{,}0}\right)\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{K}}{\mathrm{W}}}$$

$$\underline{\underline{I = 2{,}18\,\mathrm{kW} \simeq 2{,}2\,\mathrm{kW}}}$$

Temperaturfall inneluft til innervegg:

$$I = \frac{A\,\Delta T_1}{\frac{1}{h_i}} \Rightarrow \Delta T_1 = \frac{1}{h_i}\,\frac{|I|}{A} = \frac{\mathrm{m}^2\mathrm{K}}{5{,}0\,\mathrm{W}} \cdot \frac{2{,}18\,\mathrm{kW}}{150\,\mathrm{m}^2}$$

$$\Rightarrow \Delta T_1 = 2{,}9\,\mathrm{K}$$

$\Rightarrow$ Temperaturen på innerveggen $\underline{\underline{t_i^{vegg}}} = (20{,}0 - 2{,}9)^\circ\mathrm{C} = \underline{\underline{17{,}1^\circ\mathrm{C}}}$

Temperaturfall utevegg til uteluft:

$$\Delta T_2 = \frac{1}{h_u} \cdot \frac{|I|}{A} = \frac{\mathrm{m}^2\mathrm{K}}{20\,\mathrm{W}} \cdot \frac{2{,}18\,\mathrm{kW}}{150\,\mathrm{m}^2} = 0{,}73\,\mathrm{K}$$

$\Rightarrow$ Temperaturen på ytterveggen: $\underline{\underline{t_u^{vegg}}} = (0{,}7 - 20{,}0)^\circ\mathrm{C} = \underline{\underline{-19{,}3^\circ\mathrm{C}}}$