Institutt for fysikk, NTNU
TFY4115 Fysikk, våren 2007

Løsningsforslag: Kont.eksamen TFY4115, august 2007

I tilknytning til en del av oppgavene finner du nedenfor kommentarer av forskjellig slag. Dette må *ikke* forståes slik at kommentarer av denne typen var forventet i eksamensbesvarelsene! Kommentarene er ment å utfylle løsningsforslagene, forhåpentlig til glede for deg som bruker dem i arbeidet med faget i tiden fremover

Oppgave 1

a. På grunn av jordrotasjonen vil et punkt på breddegraden φ bevege seg i en sirkelbane med radius $r = R\cos\varphi$, der R er jordradien. (Sjekk: Ved nordpolen er $\varphi = 90°$, slik at $r = 0$, ved ekvator er $\varphi = 0$, slik at $r = R$. OK!). Akselerasjonsvektoren (sentripetalakselerasjonen) i en sirkelbevegelse med konstant fart v (som her!) er rettet mot sirkelens sentrum, og har tallverdien $|a| = v^2/r = \omega^2 r$, der $\omega = v/r$ er vinkelhastigheten. Sett fra det roterende systems synspunkt (vårt eget, her vi sitter på jordkarusellen!), opplever vi en sentrifugalkraft rettet motsatt sentripetalkraften, og med tilhørende akselerasjon hvis størrelse er $|a_s| = |a|$. Derved

$$|a_s| = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\varphi,$$

der T er døgnets lengde.

b. Med tall for Trondheims breddegrad $\varphi = 63.5°$, samt $R = 6\,400\,\mathrm{km}$ og $T = 24 \cdot 60 \cdot 60\,\mathrm{s} = 8.64 \cdot 10^4\,\mathrm{s}$:

$$|a_s| = \frac{4\pi^2 \cdot 6.4 \cdot 10^6 \cdot 0.446}{8.64^2 \cdot 10^8}\,\mathrm{m/s^2} = 1.51 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}.$$

Med andre ord, forholdet til tallverdien av tyngdens akselerasjon blir:

$$|a_s|/g = 1.51 \cdot 10^{-2}/9.81 = 1.54 \cdot 10^{-3} = 0.154\%.$$

Kommentar: At sentripetalakselerasjonens tallverdi er neglisjerbar relativt tyngdens akselerasjon, er i tråd med våre daglige erfaringer. (Det ville vært meget pinlig dersom den var *større* enn g: Da ville vi (og atmosfæren) hatt problemer med å henge med på karusellen, spesielt på ekvator!) En annen sak er at vektoren $\boldsymbol{g}$ peker inn mot jordas sentrum, mens vektoren $\boldsymbol{a}_s$ peker vinkelrett ut fra jordaksen. Resultanten er derved vektorsummen av de to.

Oppgave 2

a. Vi regner jorda som en perfekt kule med radius R ved havoverflaten. I noen sammenhenger er dette en tvilsom forenkling, men i vårt tilfelle er den helt OK. Av Newtons gravitasjonslov følger da at

$$F = -G \cdot \frac{Mm}{r^2} = -G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} \cdot m = -g(h) \cdot m.$$

Derved er tyngdens akselerasjon i høyden h over havet

$$g(h) = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} = g(0) \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2}.$$

b. Svingetiden $T(h)$ følger av $g(h)$ som

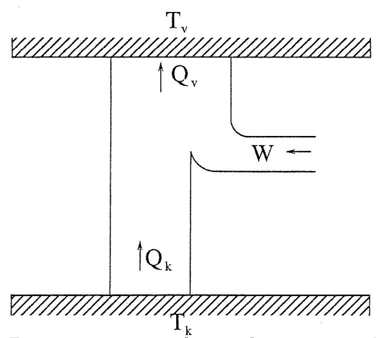
$$T(h) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g(h)}} = T(0) \cdot \sqrt{\frac{g(0)}{g(h)}} = T(0) \cdot \frac{R+h}{R} = T(0) \cdot \left(1 + \frac{h}{R}\right).$$

Forsinkelsen ved h i løpet av et døgn blir $\Delta T = T(h) - T(0)$, der $T(0)$ er døgnets lengde:

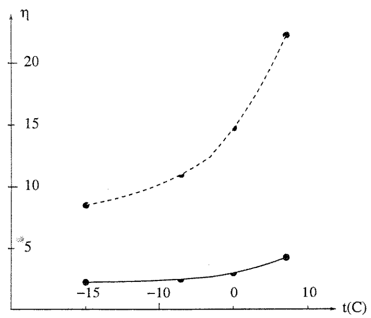
$$\Delta T = T(0) \cdot \frac{h}{R} = 86.4 \cdot 10^4\,\mathrm{s} \cdot \frac{0.2}{6400} = 2.7\,\mathrm{s}.$$

Dette er ingen ubetydelig forsinkelse: I løpet av en måned (30 dager) har klokka sinket ett minutt og 21 sekunder! Her må det nok justeringer til.

Oppgave 3



a. Effektfaktoren for varmepumper defineres rimeligvis som forholdet mellom gevinsten, i form av varmemengden $|Q_v|$ levert til stua ved temperaturen T_v, og kostnaden, i form av det elektriske arbeidet W som går med i prosessen. Altså, $\eta = |Q_v|/W = |Q_v|/(|Q_v| - |Q_k|)$. At $W = |Q_v| - |Q_k|$, der $|Q_k|$ er varmemengden trukket ut av lavtemperaturreservoaret, er en direkte følge av varmelærens første hovedsetning (eller: energibevarelse). Dersom prosessen kunne kjøres reversibelt, ville vi i dette tilfellet ha en Carnot-prosess (kjørt baklengs). For denne idealiserte prosessen er effektfaktoren $\eta_C = T_v/(T_v - T_k)$.



b. Effektfaktoren i den kommersielle varmepumpen er skissert heltrukket i figuren til venstre, mens det tilsvarende Carnotresultatet er stiplet. (Husk at det er absolutt-temperaturer som inngår i Carnot-formelen, *ikke* Celsius-temperaturer!) Figuren viser at temperaturavhengigheten til den kommersielt tilgjengelige pumpen er noenlunde tilsvarende den idealiserte Carnot-prosessens avhengighet av utetemperaturen $T_k = 273 + t$.

Men absoluttverdien er adskillig mindre i virkeligheten enn for den idealiserte prosessen, med en faktor 4-5. Forholdet η_C/η er størst for høye utetemperaturer. Alt dette har sin bakgrunn i at i en virkelig varmepumpe er prosessene irreversible: Vår tålmodighet er begrenset, prosessene kan ikke gå uendlig langsomt, energi tapes andre steder enn som varme inn i stua, vifter trekker energi, etcetc. Når utetemperaturen nærmer seg innetemperaturen, vil Carnot-faktoren gå mot uendelig, mens en kommersiell varmepumpes effektfaktor alltid vil være begrenset. Derfor vil η_C/η øke når T_k øker.

Oppgave 4

a. Totalstrømmen av strålingsenergi ut fra sola er $J = \sigma T_s^4 \cdot 4\pi R_s^2$. Denne strålingen sendes kulesymmetrisk (like mye i alle retninger) ut i verdensrommet. Strålingsenergien blir ikke absorbert i vakuum, og energibevarelse gir da at i avstanden A fra solas sentrum, er energistrømtettheten $j = J/(4\pi A^2)$. Når A velges som jorda avstand fra sola blir derved strålingstettheten her

$$j = \sigma T_s^4 \left(\frac{R_s}{A}\right)^2 = 1.4\,\mathrm{kW/m^2}$$

med de oppgitte tallverdier.

> Kommentarer: (i) Om en her regner avstanden fra solas overflate i stedet for avstanden fra solas sentrum, gjør det ikke mye forskjell, siden $A \gg R_s$. Men kulesymmetriargumentet tilsier at A må korrekt oppfattes som avstanden fra solas sentrum til jorda. (ii) Tallverdien $1.4\,\mathrm{kW/m^2}$ er litt i overkant av verdier en vanligvis finner. Det kan tyde på at soltemperaturen brukt, $T_s = 5800\,\mathrm{K}$ er litt i overkant. Potensen 4 forsterker små feil i temperaturen.

b. Dersom vi nå regner jorda som et absolutt svart legeme med konstant temperatur T_j over det hele, blir utstrålingen $J_{\mathrm{ut}} = \sigma T_j^4 \cdot 4\pi R_j^2$. Dersom vi videre antar energibalanse, blir resultatet

$$J_{\mathrm{inn}} = \sigma T_s^4 \cdot \left(\frac{R_s}{A}\right)^2 \cdot \pi R_j^2 = J_{\mathrm{ut}} = \sigma T_j^4 \cdot 4\pi R_j^2.$$

Av dette kan vi slutte at vår enkle modell gir

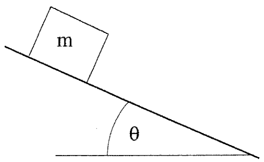
$$T_j = T_s \sqrt{\frac{R_s}{2A}} = 280\,\mathrm{K}.$$

Dette tilsvarer en (gjennomsnittlig) jordoverflatetemperatur på 7° C.

> Kommentarer: (i) Svaret er i alle fall av riktig størrelsesorden, og det er i seg selv interessant og en bekreftelse på at modellen har fått med seg det aller grøvste. (ii) Men for å komme videre i forståelsen av jordas energibalanse må vi selvsagt ta med (a) atmosfærens refleksjon (adskillige % !) av innkommende solenergi. (b) atmosfærens refleksjon av energi utstrålt fra jorda (drivhuseffekten) (c) temperaturfordelingen over jordoverflaten og dens tidsavhengighet dag/natt og sommer/vinter (d) jordvarmen, dvs. varmestrømmen ut fra jordas indre.
>
> Kort sagt: Her er det mye å fintenke på!

c. Når vi regner jorda i tillegg til sola som absolutt svarte legemer, er det rimelig å oppfatte strålingen inn og ut, hver for seg, som termodynamiske likevektssystemer. Entropistrømmen inn følger derfor av energistrømmen som $J^S_{\mathrm{inn}} = J_{\mathrm{inn}}/T_s$. Dette er en direkte konsekvens av Clausius' entropidefinisjon $dS = dQ/T$. Tilsvarende kan entropistrømmen ut (bare grovt sett i dette tilfellet!) skrives som $J^S_{\mathrm{ut}} = J_{\mathrm{ut}}/T_j$. Siden solas overflatetemperatur er rundt regnet 20 ganger høyere enn jordas overflatetemperatur, representerer strålingsutvekslingen med sola og verdensrommet en gigantisk entropisøppelkasse. Dette gir blant annet livet en sjanse: Når for eksempel levende vesener vokser, innebærer det at det lokalt skapes mer orden, lokalt går entropien ned. Men da må entropien i omgivelsene vokse, og hadde denne entropiveksten vært fanget i lokale omgivelser, ville alle livsprosesser raskt stoppet opp. Men jorda er heldigvis ikke et lukket system, og med utstrålingen til verdensrommet kan jorda stadig vekk kvitte seg med store mengder entropi. Livet har derfor fortsatt sjansen!

Oppgave 5



a. Kraften parallelt skråplanet er

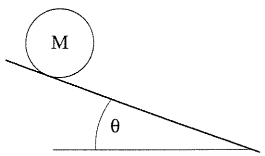
$$mg\sin\theta - \mu \cdot mg\cos\theta$$

og Newtons 2.lov gir da akselerasjonen langs skråplanet som

$$a = g(\sin\theta - \mu \cdot \cos\theta).$$

Siden den statiske og kinetiske friksjonekoeffisienten i dette tilfellet begge kan settes lik μ, vil den minimale hellingsvinkel som må til for at klossen skal skli være gitt av $a = 0$, eller

$$\theta_{\min} = \tan^{-1}\mu.$$



b. Den ukjente friksjonskraften f på det rullende legemet angriper i legemets kontaktpunkt med skråplanet, og er rettet oppover langs skråplanet. Newtons 2.lov for translasjon langs skråplanet gir derfor

$$Mg\sin\theta - f = Ma.$$

Dreiemomentet relativt omdreiningsaksen til det rullende legemet er fR, der R er det rullende legemets radius. Tyngdekraften angriper i massemiddelpunktet som befinner seg på omdreinigsaksen og gir derfor ikke noe dreiemoment om denne. Derved blir Newtons 2.lov for rotasjon i dette tilfellet

$$fR = I_0\dot{\omega} = I_0 \cdot (a/R),$$

der rullebetingelsen $v = R\omega$ er brukt i siste ligning.

c. Newtons 2.lov for rotasjon ($\tau = I\dot{\omega}$) skriver vi nå som

$$f = \frac{I_0}{R^2}a = \frac{\beta MR^2}{R^2}a = \beta Ma.$$

Dette brukes så til å eliminere f i Newtons 2. lov for translasjon:

$$Mg\sin\theta - \beta Ma = Ma.$$

Derved følger sluttresultatet for de to ukjente a og f som

$$a = g \cdot \frac{\sin\theta}{1+\beta} \quad ; \quad f = \frac{\beta}{1+\beta} \cdot Mg\sin\theta.$$

Kommentarer: (i) f er proporsjonal med massen M, som derfor inngår i svaret. Formuleringen i oppgaveteksten er uheldig på dette punkt, den kan gi inntrykk av at M ikke skal inngå. (ii) Her har vi løst oppgaven ved å se på rotasjon rundt rotasjonsaksen. Dette gir to ligninger, en for translasjon og en for rotasjon, med to ukjente, f og a. Alternativt kunne vi, i et gitt øyeblikk, fokusere på rotasjonen om *kontaktpunktet med skråplanet*. Om *dette* punktet bidrar ikke f med dreiemoment. Det gjør derimot tyngden, som gir dreiemomentet $MgR\sin\theta$. Treghetsmomentet om samme punkt er, ifølge Steiners sats, $I = I_0 + MR^2$. Derved gir Newtons 2.lov for rotasjon om kontaktpunktet, når rullebetingelsen brukes,

$$MgR\sin\theta = (I_0 + MR^2) \cdot \frac{a}{R} \quad \Rightarrow \quad a = g \cdot \frac{\sin\theta}{1+\beta},$$

som før. Valg av (øyeblikkelig) omdreiningsakse er vårt, fysikken er likevel den samme, og det blir (naturligvis!) svaret også.

d. For at legemet skal rulle uten å skli, må friksjonskraftens dreiemoment være stort nok til å "overvinne" treghetsmomentet. For gitt radius (og masse, men alle krefter er proporsjonale med massen, som derfor kan forkortes ut av resonnementet), er treghetsmomentet bestemt av β. Jo større β, jo større I_0, jo vanskeligere er det å få det til å rulle, og jo lettere vil derfor legemet ha for å skli (samtidig som det også ruller en smule). Så langt kvalitativ argumetasjon.
Dernest kvantitative overlegninger: Betingelsen for at legemet ikke sklir er at $f < \mu N$. Det vil si at betingelsen er

$$f = \frac{\beta}{1+\beta} \cdot Mg\sin\theta < \mu \cdot Mg\cos\theta$$

Ren rulling forutsetter derfor at

$$\tan\theta < \mu \cdot \frac{1+\beta}{\beta} = \mu \cdot (1 + \beta^{-1}).$$

Dette er i tråd med de kvalitative overlegningene: Jo større β, jo tidligere vil legemet begynne å skli, når θ økes. Først sklir sylinderskallet, deretter den homogene sylinderen, og til slutt kula.

e. Når klossen har beveget seg strekningen L nedover skråplanet, har den mistet den potensielle energien $mgh = mgL\sin\theta$. En del av denne potensielle energien er tapt til varmeenergi på grunn av det arbeid friksjonskraften gjør. Dette arbeidet er $W_f = F_f \cdot L = \mu \cdot mg\cos\theta \cdot L$. Gjenværende energi etter at klossen har beveget seg strekningen L, har da form av kinetisk energi. Energibevarelse gir derfor for den totale bevegelsesenergien ved L

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = mgL\sin\theta - \mu mg\cos\theta,$$

og hastigheten ved L er derfor

$$v = \sqrt{2gL(\sin\theta - \mu\cdot\cos\theta)}.$$

Når legemet ruller, vil ingen energi gå tapt til friksjonsarbeid, men til gjengjeld vil ikke all kinetisk energi være translasjonsenergi, men en del av den vil være rotasjonsenergi.

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_0\cdot\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}Mv^2\cdot(1+\beta)$$

Energibevarelse gir i dette tilfellet for hastigheten ved L

$$v = \sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{1+\beta}}$$

Kommentar: Vi kan sammenligne hastigheten v_s til klossen som sklir, og mister bevegelsesenergi til friksjon, og hastigheten v_r til legemet som ruller og "mister" translasjonshastighet til rotasjonsenergi. Gir dette en mulighet for at klossen som sklir, for visse verdier av parametrene μ og β kommer raskere ned til L enn legemets som ruller? La oss se:

$$v_s^2 = 2gL\sin\theta\left(1 - \frac{\mu}{\tan\theta}\right) \quad ; \quad v_r^2 = \frac{2gL\sin\theta}{1+\beta}$$

Men rullebetingelsen sier at $\tan\theta < \mu(1+\beta)/\beta$. Dersom denne betingelsen innføres i uttrykket for v_s^2, ser vi at $v_s < v_r$ bestandig, *forutsatt* at rullebetingelsen er oppfylt, det vil si at vi har ren rulling. Det er, tross alt, alltid mer lønnsomt å rulle enn å skli!