Institutt for fysikk, NTNU
TFY4115 Fysikk, høsten 2007

Løsningsforslag:
Kontinuasjonseksamen TFY4115, august 2008

I tilknytning til oppgavene finner du her mer utførlige diskusjoner og kommentarer enn det som kreves i en eksamensbesvarelse. Der forventes korte og konsise svar som (forhåpentlig) viser at du har forsått det viktigste. Men de mer utførlige diskusjonene nedenfor vil kanskje være til glede for deg som bruker dette løsningsforslaget i arbeidet med faget i tida fremover.

Oppgave 1

Det korte svaret er, kvalitativt: Temperaturen er et direkte uttrykk for den midlere kinetisk energi til molekylene i lufta.

En mer omfattende versjon: Den makroskopiske tilstandsligningen for n mol ideell gass lyder, $PV = nRT$ (formelsamlingen). Fra et mikroskopisk synspunkt (kinetisk gassteori) er bildet av den ideelle gassen molekyler som bare en relativt sjelden gang støter sammen. Mesteparten av tida beveger de seg uavhengig av hverandre i rettlinjete baner. Trykket mot veggene er et resultat av molekystøt mot veggene, der fortegnet til bevegelsesmengdens komponent vinkelrett mot veggen reverseres i kollisjonen. Dette bildet gir uttrykket $PV = N\frac{2}{3}\overline{K} = N\frac{1}{3}m\overline{v^2}$ (formelsamlingen). Kombineres disse uttrykkene, finner vi at den makroskopiske temperaturen er et direkte uttrykk for molekylenes kinetiske energi:

$$nRT = N\tfrac{1}{3}m\overline{v^2} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}(nR/N)T = \tfrac{1}{2}k_BT = \tfrac{1}{6}m\overline{v^2} = \tfrac{1}{2}m\overline{v_x^2}.$$

Hver frihetsgrad i totalsystemet gir, i middel, et bidrag på $\frac{1}{2}k_BT$ til totalenergien.

Oppgave 2

Solas utstrålte energi pr. flateenhet er gitt av Stefan-Boltzmanns lov (formelsamlingen), når vi regner sola som et "absolutt svart" legeme,

$$j_s = \sigma T_s^4,$$

der T_s er solas overflatetemperatur. Dersom den økes med 1% , vil relativ økning av utstrålt energi bli

$$\frac{\Delta j_s}{j_s} = \frac{\sigma \Delta T^4}{\sigma T^4} = \frac{4T^3\Delta T}{T^4} = 4\frac{\Delta T}{T} = 4\%.$$

Denne relative økningen i utstrålt energi svarer også til den relative økningen av stråling som treffer jorda, siden alle geometriske forhold er uforandret.

En slik økning ville sette i gang en komplisert kjede av koplete, ikkelineære prosesser, som f.eks. involverer endret skydannelse. Konsekvensene er mange, jamfør diskusjonene om drivhuseffekten. Det er derfor meget vanskelig å si hvilken relativ endring i jordas overflatetemperatur en slik endring på sola ville gi.

Oppgave 3

Den *absolutte* fuktigheten (tettheten av vannmolekyler i lufta) er den samme ved det kalde røret som ellers i rommet. Det dannes kondens på røret når den *relative* fuktigheten ved rørets temperatur er 100% . Ligningen som gir T_0 er derfor

$$P_d(T_0) = P_d(18°C) \cdot 0.7 = 15.477 \cdot 0.7\,\text{mmHg} = 10.834\,\text{mmHg}$$

Grovt sett gir derfor de oppgitte tallene $T_0 \approx 12°\,\text{C}$. Er en interessert i større nøyaktighet, gir lineær interpolasjon

$$T_0 = \left(12 + \frac{10.834 - 10.518}{11.231 - 10.518}\right)^\circ \text{C} = 12.44°\,\text{C}.$$

Standardmetoden for å unngå kondens er å innslutte de kalde rørene i høyverdig isolasjon, f.eks. et rør av isopor. Da vil varmeledningen gjennom isoporen være så dårlig at utsiden av isoporen har tilnærmet samme temperatur som rommet rundt.

Oppgave 4

For en isoterm, reversibel prosess gir tilstandsligningen $PV = nRT =$ konst. (formelsamlingen). Differensiering gir

$$\Delta P \cdot V + P \cdot \Delta V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \kappa_T = -\frac{\Delta V}{V \Delta P} = \frac{1}{P}.$$

For en adiabatisk, reversibel prosess gjelder tilsvarende, $PV^\gamma =$ konst. (formelsamlingen), der $\gamma = C_P/C_V$. Vi differensierer denne ligningen og finner,

$$\Delta P \cdot V^\gamma + P \cdot \gamma V^{\gamma-1} \Delta V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \kappa_S = -\frac{\Delta V}{V \Delta P} = \frac{1}{\gamma P}.$$

Derved har vi funnet at $\kappa_S/\kappa_T = 1/\gamma = C_V/C_P < 1$. I en rask, adiabatisk prosess er gassen rimeligvis "stivere" (mindre kompressibel) en med en langsom, isoterm prosess.

Oppgave 5

I prinsipp kan en få nyttig arbeid ut av et legeme med forskjellig temperatur fra omgivelsene ved å installere en ideell Carnotmaskin mellom legemet og omgivelsene. I praksis er ikke dette så enkelt bestandig, og en må i alle fall regne med betydelig mindre virkningsgrader enn de den ideelle Carnotmaskinen forespeiler. Likevel: Den *kvalitative* historien Carnot-prosessen forteller er korrekt, selv om tallene denne idealiserte maskinen gir er for optimistiske i praksis.

(i) Med ett tonn vann til rådighet, i utgangspunktet ved temperaturen 31° C, i omgivelser ved 1° C, vil Carnotmaskinen trekke varmen $\mathrm{d}Q(t)$ ut av vannet, omdanne brøkdelen $[T_v(t) - T_0]/T_v(t)$ av varmemengden $\mathrm{d}Q(t)$ til nyttig arbeid, og overlate resten av $\mathrm{d}Q(t)$ til omgivelsene. Det at varmemengde "tappes" fra det varme vannet, vil naturligvis føre til at temperaturen i vannet gradvis synker, ett tonn vanns varmekapasitet er, tross alt, endelig. Prosessen fortsetter helt til vannet har fått omgivelsenes temperatur T_0.

(ii) Så var det tilfellet der vi har ett tonn is ved 0° C i omgivelser ved 30° C. Her vil Carnotmaskinen trekke varmemengden $\mathrm{d}Q(t)$ ut av omgivelser (med "uendelig" varmekapasitet), gjøre om brøkdelen $(T_0 - T_i)/T_0$ til nyttig arbeid, og dumpe resten til isen, som derved begynner å smelte. Siden smeltevarmen er meget stor (omtrent åtte ganger så stor som den varmen som skal til for å varme opp vannet med ti grader), vil Carnotprosessen gå en god stund mellom disse temperaturene før all isen er smeltet og vanntemperaturen kan begynne å stige, for til slutt å ende på omgivelsenes temperatur. Carnotmaskinens virkningsgrad er derfor "stor" ($= 30/303 \approx 0.1$) inntil all isen har smeltet, for så gradvis å bli mindre ettersom vanntemperaturen nærmer seg T_0. Smeltevarmen som styrer første del av prosessen, fører derfor til at en kan få mer nyttig arbeid ut av prosess (ii) enn av prosess (i).

Kvalitativt gjelder ikke dette bare for Carnotprosesser, men også for mer realistiske "maskiner".

Oppgave 6

a. Når de to klossene er isolert fra omgivelsene, vil all varmeutveksling skje klossene imellom. Siden klossene heller ikke gjør arbeid (volumets temperaturavhengighet kan, i god tilnærmelse, neglisjeres for de to metallklossene), gir første hovedsetning (formelsamlingen) for systemet som består av de to klossene samlet,

$$0 = \mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W = \mathrm{d}U + P\mathrm{d}V = \mathrm{d}U \qquad \Rightarrow \qquad U = \text{konst.}$$

Dette innebærer at sluttemperaturen T er bestemt av ligningen

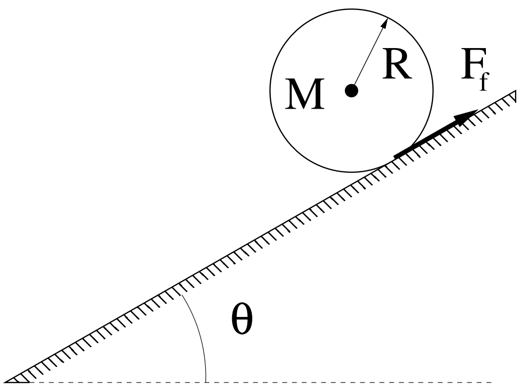
$$C_1(T_1 - T) + C_2(T_2 - T) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{C_1T_1 + C_2T_2}{C_1 + C_2}.$$

b. Når $C_1 = C_2 = C$ gir svaret i pkt.**a** sluttemperaturen $T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$, som åpenbart er riktig. Siden $\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T$ (formelsamlingen) er entropiendringen i temperaturutjevningsprosessen gitt som

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{T_1}^{T} \frac{C\mathrm{d}T}{T} + \int_{T_2}^{T} \frac{C\mathrm{d}T}{T} = C\left(\ln\frac{T}{T_1} + \ln\frac{T}{T_2}\right) \\ &= C\ln\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} = 2C\ln\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right)\right].\end{aligned}$$

Av dette ser vi at for alle $T_1 \neq T_2$ er $\Delta S > 0$. $\Delta S = 0$ bare når $T_1 = T_2$. Dette stemmer med den generelle påstanden at i et lukket system kan entropien ikke avta, og for alle irreversible prosesser i et lukket system vil den øke.

Oppgave 7



a. Friksjonskraften $\boldsymbol{F}_f$ angriper kula i punktet der kula berører skråplanet. Friksjonskraften er parallell med skråplanet og virker oppover langs dette. At den virker oppover og ikke nedover er simpelthen på grunn av at *uten* friksjonskraft ville kula skli nedover, og friksjonskraften forhindrer (eventuelt: prøver å forhindre) dette.

b. Friksjonskraften er allerede nevnt. I tillegg kommer selvsagt tyngdekraften. Tyngden griper tak i kulas tyngdepunkt (massemiddelpunktet) og virker loddrett nedover. Denne kraften kan dekomponeres i komponenten $Mg\sin\theta$ som virker parallelt med skråplanet nedover, og komponenten $Mg\cos\theta$ som virker normalt på skråplanet. Normalkomponenten blir presist kompensert av normalkraften *fra* skråplanet *på* kula (akselerasjonen vinkelrett på planet er null!). Nettokraften nedover langs skråplanet gir, ifølge Newton, akselerasjonen, a (formelsamlingen):

$$Mg\sin\theta - F_f = Ma.$$

c. Kulas rotasjon er bestemt av det som er analogien til Newtons 2. lov for dette tilfellet, $\tau = I\alpha = I\dot{\omega}$ (formelsamlingen). Både for dreiemomentet τ og for treghetsmomentet I er det nødvendig å spesifisere et referansepunkt. I dette tilfellet er det enklest å bruke kulas sentrum som referanse. Da er $\tau = F_f \cdot R$, siden tyngdens arm med denne referansen forsvinner. Tilsvarende er treghetsmomentet om kulas sentrum $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$. [1] Når vi postulerer at kula ruller, har vi sammenhengen $\dot{\omega} = a/R$ slik at Newtons 2. lov for rullebevegelsen får formen

$$F_f \cdot R = I_0 \cdot a/R \qquad \Rightarrow \qquad F_f = \tfrac{2}{5}Ma.$$

d. Brukes ligningen i pkt. **c** til å eliminere friksjonskraften F_f, gir ligningen i pkt. **b**,

$$a = \tfrac{5}{7}g\sin\theta.$$

Av dette følger at friksjonskraften er gitt som

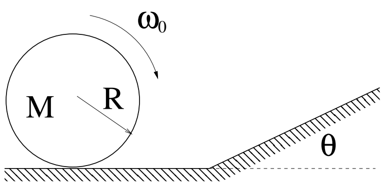
$$F_f = \tfrac{2}{7}Mg\sin\theta.$$

Alt dette var beregnet ut fra *den forutsetning at kula ruller*. Men det er det jo ikke sikkert at den gjør, for friksjonskraftens tallverdi kan ikke være større enn normalkraften multiplisert med den statiske friksjonskoeffisienten μ_s. Med andre ord,

$$F_f = \tfrac{2}{7}Mg\sin\theta \leq \mu_s Mg\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \mu_s \geq \tfrac{2}{7}\tan\theta.$$

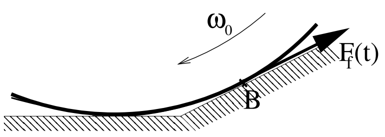
Jo brattere skråplan, jo større må den statiske friksjonskraften være for at kula ikke skal begynne å skli.

Oppgave 8



a. Som figuren viser, vil kulas hastighet dekomponeres i en komponent parallell med skråplanet, $v_0\cos\theta$, og en komponent vinkelrett på, $v_0\sin\theta$. Siden kulas støt mot skråplanet antas å være fullstendig uelastisk, vil hastighetskomponenten vinkelrett på, absorberes av skråplanet. Eller: Bevegelsesmengden $Mv_0\sin\theta$ absorberes av skråplanet. Dette innebærer selvsagt at den massen skråplanet er en del av, er tilstrekkelig stor til at skråplant *kan* absorbere en slik bevegelsesmengde uten å bli satt i merkbar bevegelse.

[1] Alternativt kunne vi valgt berøringspunktet som referanse. Da ville vi hatt $\tau = MgR\sin\theta$ og $I = I_0 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$, (ifølge Steiners sats). Sluttsvarene blir de samme.



b. Idet støtet starter i berøringspunktet B, er hastigheten til kulas tyngdepunkt langs skråplanet $v_0 \cos\theta$. Men overflaten roterer relativt tyngdepunktet, og i berøringspunktet er denne relativhastigheten rettet parallelt *nedover* skråplanet, med størrelsen $R\omega_0 = v_0$. Hastigheten til kulas overflate relativt skråplanet er derfor, idet støtet starter,

$$\Delta v = v_0 \cos\theta - v_0 = -v_0(1 - \cos\theta),$$

hvilket skulle vises. Merk at $\Delta v < 0$.

c. Dersom kula skal komme ut av støtet i rullemodus, må denne relativhastigheten, i løpet av det korte øyeblikket støtet varer, reduseres til null. Siden støtet starter med at kuleoverflaten har en endelig hastighet relativt (det skrå) underlaget, vil *den kinetiske* friksjonen trå til og forsøke redusere relativhastigheten så langt som mulig. En kan jo lure på om friksjonen får gjort stort, siden støtprosessen varer så kort tid. Da gjelder det å huske på at når en endelig bevegelsesmengde $Mv_0 \sin\theta$ er absorbert i støtet, tilsvarer dette en endelig støtimpuls, som vi forenklet kan skrive som $F_\perp \Delta t$, der Δt er støtets varighet. Jo kortere tid støtet varer, jo større kraft $F_\perp$ trykker kula mot skråplanet den korte tiden. Men en normalkraft oversettes via, i dette tilfellet den *kinetiske* friskjonskoeffisienten μ_k, til en parallell friksjonskraft F_f som motvirker relativbevegelsen. Siden $\Delta v < 0$, vil også i dette tilfellet F_f være rettet oppover langs skråplanet. Friksjonskraftens impuls parallelt skråplanet, $F_f \Delta t$, kan derfor få verdier opp til maksimalt $\mu_k F_\perp \Delta t = \mu_k M v_0 \sin\theta$. Dersom μ_k er stor nok, vil med andre ord relativhastigheten reduseres til null i løpet av støtet, og kula kommer ut av støtet i rullemodus.

Når en fullfører beregningene som det her bare er henvist til, viser det seg at for at kula skal komme ut av støtet i rullemodus, må den *kinetiske* friksjonskoeffisienten oppfylle betingelsen

$$\mu_k \geq \tfrac{2}{7} \tan \tfrac{1}{2}\theta.$$

Skal, i tillegg, kula *fortsette* å rulle, forutsetter det, som vi viste i forrige oppgave, at den *statiske* friksjonskoeffisienten oppfyller betingelsen

$$\mu_s \geq \tfrac{2}{7} \tan\theta.$$

I tillegg til en gjennomgang av beregningen som gir minimumsverdien for μ_k, kan mye mer sies om dette problemet. Den nysgjerrige leser henvises til en lengre artikkel på nettadressen http://home.phys.ntnu.no/rulleproblem.