Løsningsforslag, kontinuasjonseksamen TFY4115, 20.08.10

Oppgave 1

1a. *Et legeme med masse m kastes fra horisontalplanet med en utgangshastighet $\mathbf{v}_0$ som danner vinkelen α med dette planet. Legemet lander på horisontalplanet i avstanden L fra utgangspunktet. Med gitt $v_0 = |\boldsymbol{v}_0|$, bestem den maksimale L og den tilhørende α.*

N2 gir $x(t) = (v_0 \cos\alpha)t$; $z(t) = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$. Legemet vil lande når $z(t) = 0$, som gir $t = 2v_0 \sin\alpha/g$. Derved blir kastlengden $L = v_0 \cos\alpha \cdot 2v_0 \sin\alpha/g = v_0^2 \sin 2\alpha/g$. Med gitt v_0 maksimeres L ved at $\mathrm{d}\sin 2\alpha/\mathrm{d}\alpha = 2\cos 2\alpha = 0$, som gir $\alpha = 45°$. (Dette følger også umiddelbart av at $\sin 2\alpha$ har sin maksimumsverdi, 1, når $2\alpha = 90°$.) Altså: $L_{\text{max}} = v_0^2/g$.

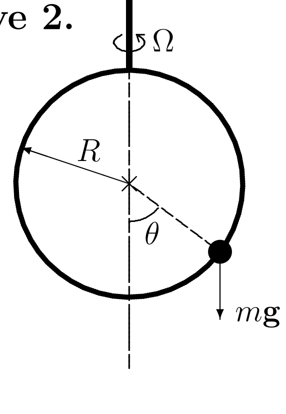
1b. *Vi bruker kastbevegelsen i punkt 1a som en enkel modell for å diskutere idrettsøvelsen "lengdehopp uten tilløp". Hvilken kraftimpuls, $\boldsymbol{I} = \int_{\Delta t} \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t$, må en lengdehopper med masse m prestere i frasparket (i løpet av det korte tidsrommet Δt) for å oppnå lengden L?*

N2 gir $\boldsymbol{I} = \int_{\Delta t} \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t = \int_{\Delta t} m\dot{\boldsymbol{v}}(t)\mathrm{d}t = m\Delta\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v}_0$. For å oppnå hopplengden L må derfor hopperen generere kraftimpulsen $I = mv_0 = m\sqrt{gL}$, med vinkelen $\alpha = 45°$ relativt horisontalplanet. Vel, strengt tatt genererer hopperen kraftimpulsen -$\boldsymbol{I}$, mens N3 sørger for at motkraften fra underlaget (hopperen antas ikke å skli!) gir $+\boldsymbol{I}$.

1c. *Anta at hopperen, iført fullt månelandingsutstyr, klarer å hoppe lengden L_J her på jorda. Hvor langt, L_M, burde han da kunne hoppe på månens overflate? Jordas og månens masser er, henholdsvis, ca. $M_J = 6.0 \cdot 10^{24}$ kg og $M_M = 7.4 \cdot 10^{22}$ kg, og radiene er $R_J = 6\,400$ km og $R_M = 1\,700$ km.*

Newtons gravitasjonslov sier at tiltrekningskraften mellom to masser er gitt som $F = GmM/r^2$. På overflaten av en kuleformet klode med masse M og radius R gir dette akselerasjonen $g = GM/R^2$. Vi trenger ikke verdien av den universelle gravitasjonskonstanten her, siden vi skal sammenligne månens g_M med jordas kjente $g_J = g$. Den maksimale hopplengden (med $\alpha = 45°$) er gitt som $L = v_0^2/g$. Siden hopperens masse (med måneutstyret på) er den samme på månen som på jorda, og siden den kraftimpulsen han kan generere er den samme, må v_0 være den samme. Det innebærer at $L_M = L_J \cdot (g_J/g_M) = L_J \cdot (M_J R_M^2/M_M R_J^2) = L_J \cdot [6.0 \cdot 10^{24} \cdot (1.7 \cdot 10^6)^2/7.4 \cdot 10^{22} \cdot (6.4 \cdot 10^6)^2] = L_J \cdot 5.7$.

Oppgave 2.



En motor sørger for at en ring med radius R roterer med konstant vinkelhastighet Ω om en vertikal akse gjennom ringens sentrum. En liten kule med masse m er tredd inn på ringen, og glir på denne med neglisjerbar friksjon. Kula slenges utover av sentrifugalkraften, og holdes tilbake av tyngdekraften.

2a. *Finn et uttrykk for kulas dynamiske likevektsposisjon θ_{eq} som funksjon av Ω (og konstantene i problemet). Hva er den minimale vinkelhastighet, Ω_m, som må til for at likevektsposisjonen ikke er rett under ringens sentrum. Eller: Hva må rotasjonshastigheten være for at $\theta_{\text{eq}} > 0$?*

Nedover langs ringen virker tyngdekraften på kula som $F_g = mg\sin\theta$. Oppover langs ringen har sentrifugalkraften komponenten $F_s = mr\Omega^2\cos\theta = mR\sin\theta\cdot\Omega^2\cos\theta$. Likevektsvinkelen θ_{eq} bestemmes av at disse to kreftene balanserer. Altså:

$$\cos\theta_{\text{eq}} = \frac{g}{R\,\Omega^2}.$$

Siden $\cos\theta \leq 1$, har dette svaret bare mening når $\Omega^2 \geq g/R$. Rotasjonshastigheten må derfor være større enn $\Omega_m = \sqrt{g/R}$ for at $\theta_{\text{eq}} > 0$. For mindre rotasjonshastigheter enn dette, vil $\theta_{\text{eq}} = 0$. For denne vinkelen forsvinner *både* tyngdekraftens komponent langs ringen, og sentrifugalkraften. Begge disse kreftene inneholder faktoren $\sin\theta$, og blir derfor lik null når $\theta = 0$. (Vinkelen $\theta = 0$ er en løsning av likevektsligningen for *alle* Ω. Men dersom $\Omega > \Omega_m = \sqrt{g/R}$, er denne likevektsløsningen *ustabil.*)

2b. *Anta nå at $\Omega < \Omega_m$, slik at $\theta_{\text{eq}} = 0$. Mens ringen roterer med konstant vinkelhastighet, dytter vi kula ørlite ut av sin dynamiske likevektsposisjon $\theta_{\text{eq}} = 0$. Dermed vil kula oscillere på den roterende ringen med vinkelfrekvens ω_0. Bruk uttrykk for kreftene langs ringen til å finne et uttrykk for ω_0 som funksjon av Ω. (For små θ kan vi skrive: $\cos\theta \approx 1$ og $\sin\theta \approx \theta$.) Hva skjer med ω_0 når $\Omega \to \Omega_m^-$?*

Vi antar altså at $\Omega < \sqrt{g/R}$, slik at $\theta_{\text{eq}} = 0$. Nettokraftens komponent langs ringen (regnet positiv i positiv θ-retning) er da

$$F_{\text{netto}} = F_s - F_g = mR\,\Omega^2\cos\theta\sin\theta - mg\sin\theta = -m(g - R\,\Omega^2\cos\theta)\sin\theta \approx -m(g - R\,\Omega^2)\theta,$$

der vi brukte at $\theta \ll 1$, slik at $\cos\theta \approx 1$ og $\sin\theta \approx \theta$. N2 gir da $F_{\text{netto}} = m\dot{v} = mR\ddot{\theta}$, slik at

$$R\ddot{\theta} + (g - R\,\Omega^2)\theta = 0.$$

Dette er en standard svingeligning for udempete svingninger, med egenfrekvens

$$\omega_0 = \sqrt{g/R - \Omega^2} = \sqrt{\Omega_m^2 - \Omega^2} = \Omega\sqrt{(\Omega_m/\Omega)^2 - 1}.$$

Når Ω vokser opp mot Ω_m, vil derfor svingefrekvensen ω_0 synke, og gå mot null når $\Omega \to \Omega_m^-$.

2c. *Kulas oscillasjonsbevegelse kan beskrives i et roterende koordinatsystem med origo i θ_{eq}. Men i et roterende koordinatsystem, her med vinkelhastighet $\boldsymbol{\Omega}$, vil kula utsettes for Corioliskraften $2m\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega}$, der $\boldsymbol{u}$ er kulas hastighet relativt dette roterende systemet. Hvilken effekt har Corioliskraften på kulas oscillasjonsbevegelse?*

Corioliskraften er $\boldsymbol{F}_C = 2m\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\Omega}$. Den står derfor vinkelrett på planet som dannes av $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{\Omega}$. Men siden hastigheten $\boldsymbol{u}$ i det roterende koordinatsystemet er rettet tangensielt til ringen, vil Corioliskraften være vinkelrett på ringen. Derved får den ingen innflytelse på oscillasjonene langs ringen. (I alle fall ikke så lenge friksjonen kan neglisjeres.)

2d. *Hva blir oscillasjonsfrekvensen ω_0 dersom $\Omega > \Omega_m$, slik at $\theta_{\text{eq}} > 0$? Bruk at for små avvik, ε, fra θ_{eq}, kan vi skrive*

$$\cos(\theta_{\text{eq}} + \varepsilon) \approx \cos\theta_{\text{eq}} - \varepsilon\,\sin\theta_{\text{eq}} \quad ; \quad \sin(\theta_{\text{eq}} + \varepsilon) \approx \sin\theta_{\text{eq}} + \varepsilon\,\cos\theta_{\text{eq}}.$$

Hva skjer når $\Omega \to \Omega_m^+$? Kommentarer?

Når $\Omega > \Omega_m$, vil svingningen (med *liten* amplitude per antakelse) foregå rundt likevektsvinkelen gitt av $\cos\theta_{\text{eq}} = g/(R\,\Omega^2)$. Vi ser nok en gang på nettokraften, men denne gangen må vi sette $\theta = \theta_{\text{eq}} + \varepsilon$, der ε er et lite vinkelavvik:

$$\begin{aligned} F_{\text{netto}} &= -m(g - R\,\Omega^2\cos\theta)\sin\theta = -m[g - R\,\Omega^2\cos(\theta_{\text{eq}} + \varepsilon)]\sin(\theta_{\text{eq}} + \varepsilon) \\ &\approx -m[g - R\,\Omega^2(\cos\theta_{\text{eq}} - \varepsilon\,\sin\theta_{\text{eq}})](\sin\theta_{\text{eq}} + \varepsilon\,\cos\theta_{\text{eq}}). \end{aligned}$$

Hakeparentesen er lik

$$[...] = [g - R\,\Omega^2\{g/(R\,\Omega^2) - \varepsilon\,\sin\theta_{\text{eq}}\}] = R\,\Omega^2\,\varepsilon\sin\theta_{\text{eq}}.$$

Siden hakeparentesen allerede er av orden ε, er det tilstrekkelig å bruke det ledende leddet i $\sin\theta$, droppe ε-leddet her og skrive $\sin\theta_{\text{eq}}$. Dermed finner vi til ledende orden i små ε

$$F_{\text{netto}} = -(mR\,\Omega^2\sin^2\theta_{\text{eq}})\,\varepsilon = mR\ddot{\varepsilon},$$

som gir svingeligningen

$$\ddot{\varepsilon} + (\Omega^2\sin^2\theta_{\text{eq}})\,\varepsilon = 0.$$

Dermed er svingefrekvensen om likevektsvinkelen θ_{eq} gitt som

$$\omega_0 = \Omega\sin\theta_{\text{eq}} = \Omega\sqrt{1 - \cos^2\theta_{\text{eq}}} = \Omega\sqrt{1 - (g/R\,\Omega^2)^2} = \Omega\sqrt{1 - (\Omega_m/\Omega)^4}.$$

Også når $\Omega \to \Omega_m^+$, vil $\omega_0 \to 0$. Men *måten* ω_0 går mot null på, er forskjellig, avhengig av om $\Omega \to \Omega_m$ nedenfra eller ovenfra.

Kommentar: Når $\Omega < \Omega_m$, er $\theta = 0$ et stabilt likevektspunkt. Ved $\Omega = \Omega_m$ mister dette punktet stabiliteten. For $\Omega > \Omega_m$ er punktet $\theta = 0$ et *ustabilt* likevektspunkt, mens $\theta = \theta_{\text{eq}}$ er det stabile likevektspunktet. Akkurat ved $\Omega = \Omega_0$ får svingeligningen en annen form. Der er $F_{\text{netto}} \approx -\frac{1}{2}mR\Omega^2\theta^3$, svingeligningen er ikke lenger linær, og svingningene er ikke lenger harmoniske. (En så omfattende kommentar er ikke forventet i besvarelsen!)

Oppgave 3

En bils totale masse, inklusive hjul og fører, er M. På et gitt tidspunkt beveger bilen seg rett fremover på en horisontal vei med en hastighet V. Friksjonskraften (i alt vesentlig på grunn av luftmotstanden) mot bevegelsen er F_{luft}. Ved dette tidspunktet leverer bilens motor et dreiemoment τ til hvert av de to drivhjulene, med radius R.

3a. *Når vi neglisjerer hjulenes masse relativt bilens totale masse M, hva blir uttrykket for bilens akselerasjon $\dot{V}$ som følge av dreiemomentet motoren leverer?*

Dreiemomentet fra motoren på drivhjulet balanseres (når vi ser bort fra hjulets treghetsmoment) av dreiemomentet fra friksjonskraften fra veibanen, F_v, slik at $F_v = \tau/R$. Hvert av de to drivhjulene bidrar med en slik kraft, og derved gir N2:

$$F_{\text{netto}} = 2F_v - F_{\text{luft}} = M\dot{V} \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = (2\tau/R - F_{\text{luft}})/M$$

3b. *Dersom vi nå tar hensyn til at hvert av de fire hjulene har masse m og treghetsmoment $I_0 = \sigma mR^2$ (der σ er et tall i overkant av en halv), hvordan modifiseres uttrykket for bilens* *akselerasjon?*

Når vi nå skal ta hensyn til hjulenes treghetsmoment, kommer alle fire hjul med i regningen (de får alle samme vinkelakselerasjon så lenge dekkene ikke sklir mot underlaget). Med rullebetingelsen trengs da et dreiemoment $\tau_{\text{hjul}} = 4I_0\dot{\omega} = 4I_0\dot{V}/R$ for å gi hjulene den nødvendige vinkelakselerasjonen. Dette kommer til fradrag fra dreiemomentet som gir bilen lineær akselerasjon:

$$F_{\text{netto}} = (2\tau - 4I_0\dot{V}/R)/R - F_{\text{luft}} = M\dot{V} \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = \frac{2\tau/R - F_{\text{luft}}}{M + 4I_0/R^2} = \frac{2\tau/R - F_{\text{luft}}}{M + 4\sigma m}.$$

Korreksjonen fra hjulene er ikke allverden: Med for eksempel $M = 1\,500\,\text{kg}$, $m = 15\,\text{kg}$ og $\sigma = 0.6$ blir korreksjonen på rundt 2.5% .

En alternativ utledning er via kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}(MV^2 + 4I_0\omega^2) = \frac{1}{2}(M + 4\sigma m)V^2$. Endringen per tidsenhet av K er gitt av nettokraften F_{netto} på bilen som $\mathrm{d}K/\mathrm{d}t = (M + 4\sigma m)V\dot{V} = F_{\text{netto}}V = (2\tau/R - F_{\text{luft}})V$. Dette gir samme svar som det vi fant ovenfor.

Et annet og mer komplisert alternativ er å se på alle kreftene som virker på de to drivhjulene, og på de to andre hjulene. Resultatet av denne argumentasjonen er, som det skal, samme uttrykk for akselerasjonen.

Oppgave 4

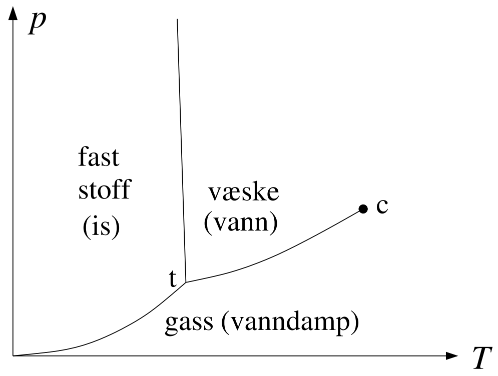
En varm sommerdag fylles den nedgravde lagertanken på en bensinstasjon med bensin fra en tankbil, Bensinen holder $27\,^\circ C$, og tankbilen måler antall liter solgt til stasjonen ved fylling av lagertanken. Temperaturen nede i bakken, der lagertanken befinner seg, er $9\,^\circ C$. Etter et døgn eller to har også den påfylte bensinen denne temperaturen. Når bileieren så fyller fra bensinpumpa, måles antall liter nedkjølt bensin. Bensinprisen er 13 kroner per liter, og den termiske utvidelseskoeffisienten til bensin er $\beta = 0.95 \cdot 10^{-3}\,\text{K}^{-1}$. (Per definisjon er $\Delta V/V = \beta\Delta T$.)

4a. *Hvor mange øre per liter bensin taper stasjonseieren på temperaturdifferansen mellom kjøpt og solgt bensin?*

Relativ volumendring er gitt av den termiske utvidelseskoeffisienten som $\Delta V/V = \beta\Delta T$. Her er temperaturdifferansen $18\,\text{K}$, slik at $\Delta V/V = 0.95 \cdot 10^{-3} \cdot 18 = 1.7 \cdot 10^{-2}$. Resultatet blir at med en literpris på 13 kroner, vil stasjonseieren tape $13 \cdot 1.7 \cdot 10^{-2}$ kroner $= 22$ øre per liter. Ikke helt greit for eieren når fortjenestemarginene er trange!

Oppgave 5

5a. *Skisser fasediagrammet i (p, T)-planet for* H_2O. *(Vi ser bort fra de spesielle strukturvariantene av is ved ekstreme trykk.) Angi hvor gass-, væske- og faststoff-fasen befinner seg i diagrammet. Hvor er trippelpunktet og det kritiske punkt, og hva er spesielt med dem?*



Figuren er en enkel skisse av fasediagrammet for H_2O, når vi bare tar hensyn til den vanlige is-fasen (øvrige faste faser opptrer først ved trykk fra rundt 1000 atmosfærer). Langs koeksistenslinjene kan to forskjellige faser være i likevekt med hverandre. Ved trippelpunktet, merket t, kan alle tre fasene eksistere i likevekt med hverandre. Koeksistenslinjen mellom vann og vanndamp ender i det kritiske punkt, merket c i figuren. For høyere temperaturer er det ingen forskjell på vann og vanndamp, de danner én isotrop fase. Koeksistenslinjen mellom is og vann har $\mathrm{d}p/\mathrm{d}T < 0$, mens for de aller fleste stoffer er helningen positiv. Den uvanlige oppførselen skyldes at ved koeksistens har is mindre tetthet enn vann.

5b. *Ved trippelpunktet er smeltevarmen for is $L_s = 333\,\mathrm{kJ/kg}$ og fordampningsvarmen for vann $L_f = 2\,501\,\mathrm{kJ/kg}$. Hva er sublimasjonsvarmen L_{su} ved trippelpunktet?*

Ved trippelpunktet, og bare der, kan en *både* gå direkte fra fast stoff til gass, og gå via væskefasen. Energien som trengs må være uavhengig av dette valget, slik at ved trippelpunktet er $L_{su} = L_s + L_f = (333 + 2\,501)\,\mathrm{kJ/kg} = 2\,834\,\mathrm{kJ/kg}$.

Oppgave 6

I første del av denne oppgaven skal vi beregne arbeidet for isotermt å komprimere en ideell gass, for så å bruke dette til å finne entropiendringen i den irreversible prosessen "spontan ekspansjon i et termisk og mekanisk lukket system". I andre del skal vi tilsvarende se på en ideell gassblanding og beregne det minimale arbeidet som skal til for å separere de to komponentene. Til slutt skal vi beregne entropiøkningen når to énkomponent gasser med samme trykk tillates spontant å blande seg med hverandre.

6a. *I en beholder med volum V_0 og ved temperaturen T befinner det seg n mol ideell gass. Ved hjelp av et stempel i beholderen komprimeres gassen langsomt og isotermt fra begynnelsesvolumet V_0 til sluttvolumet V_1. Hva er arbeidet som må tilføres under kompresjonen?*

For denne isoterme kompresjonen trengs arbeidet (*av* omgivelsene, *på* gassen)

$$|\Delta W| = |\int_{V_0}^{V_1} p\,\mathrm{d}V| = nRT \int_{V_1}^{V_0} V^{-1}\mathrm{d}V = nRT \ln(V_0/V_1).$$

Når prosessen er isoterm, innebærer dette at energien tilført under kompresjonen lekker ut til omgivelsene, typisk ved varmeledning.

6b. *Bruk uttrykket for entropifunksjonens differensial,* $\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T$*, og varmelærens første hovedsetning til å finne entropiendringen i kompresjonsprosessen. Hvordan kan en fra dette finne entropiendringen ved en spontan, irreversibel ekspansjon fra* V_1 *til* V_0 *i et termisk og mekanisk lukket system?*

Med innsikten gitt av varmelærens annen hovedsetning, på formen $\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T$, kan første hovedsetning skrives

$$\mathrm{d}Q = T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V.$$

For en ideell gass avhenger indre energi bare av temperaturen, $U = U(T)$. Den isoterme prosessen ovenfor gir derfor den negative entropiendringen $\Delta S_{0\to1} = -\Delta S$, der $\Delta S = S_0 - S_1 = T^{-1}\int_1^0 p\mathrm{d}V = T^{-1}|\Delta W|$. Dersom gassen irreversibelt ekspanderer uhindret i et termisk *lukket* system fra likevektstilstanden (V_1, T) til en tilstand med $V = V_0$, vil mye rart skje under ekspansjonen. Siden systemet er mekanisk lukket, gjøres det ikke noe arbeid på omgivelsene under ekspansjonen. Og siden systemet er termisk lukket, gir første hovedsetning, med $\Delta Q = 0$ og $\Delta W = 0$, at $\Delta U = 0$. Når likevekt igjen har inntrådt, vil temperaturen derfor være den samme som før. Derved kan vi bruke resultatet fra 6a og konkludere med at entropiøkningen i den spontane ekspansjonen er

$$\Delta S = \frac{1}{T} nRT \ln\frac{V_0}{V_1} = nR\ln\frac{V_0}{V_1}.$$

En av mulighetene i forbindelse med CO_2*-separasjon og lagring, er separasjon av en gassblanding der* CO_2 *inngår. Vi kan bruke en idealisert generalisering av argumentene ovenfor til å bestemme den minimale energien (det minimale arbeidet) som må til i en slik separasjonsprosess. For enkelhets skyld tenker vi oss en ideell gassblanding med n mol totalt, som består av* $x_1 n$ *mol av gasskomponent 1, og* $x_2 n$ *mol av gasskomponent 2. (For de to molbrøkene gjelder da at* $x_1 + x_2 = 1$.*) Blandingen er plassert i en beholder med totalt volum* V_0 *som holdes ved den konstante temperaturen* T. *I hver ende av den sylindriske beholderen er det et stempel. Det ene slipper gjennom gasskomponent 1, men ikke 2. Det andre slipper gjennom gasskomponent 2, men ikke 1. De to stemplene skyves så langsomt og isotermt mot hverandre inntil de møtes. Da er gassen på den ene siden ren 1, med volum* V_1. *På den andre siden av stemplene er gassen ren 2, med volum* V_2. *Vår idealiserte prosess har separert de to gasskomponentene, og enklere og billigere kan det ikke gjøres. (I praksis er det både vanskeligere og dyrere!)*

6c. *Bestem arbeidet som må gjøres i den idealiserte, isoterme prosessen beskrevet ovenfor. Er det en god idé, fra et energiøkonomiseringssynspunkt, å la separasjonsprosessen foregå ved høy temperatur?*

Gass nr.1 komprimeres isotermt fra volumet V_0 til volumet V_1. Til denne kompresjonen trengs arbeidet (jf. 6a) $|\Delta W_1| = x_1 nRT\ln(V_0/V_1)$. Gass nr.2 komprimeres isotermt fra volum V_0 til volum V_2, og til dette trengs arbeidet $|\Delta W_2| = x_2 nRT\ln(V_0/V_2)$. Alt i alt må følgende arbeid utføres i kompresjonene

$$|\Delta W| = nRT[x_1\ln(V_0/V_1) + x_2\ln(V_0/V_2)].$$

Det er åpenbart en fordel energimessig å la prosessen foregå ved så lav temperatur som praktisk mulig.

6d. *Hva er betingelsen for at trykket i de to gassvolumene etter separasjonsprosessen er det samme som det totale gasstrykket i den opprinnelige blandingen?*

Etter separasjonen er trykkene henholdsvis $p_1 = x_1 nRT/V_1$ og $p_2 = x_2 nRT/V_2$, mens det opprinnelige trykket var $p = nRT/V_0$. Skal alle disse trykkene være like, må $x_1/V_1 = x_2/V_2 = 1/V_0$. Eller: $V_1/V_0 = x_1$ og $V_2/V_0 = x_2$.

6e. *Til slutt skal vi bestemme entropiendringen når to gasser med samme trykk spontant blander seg i et termisk lukket system. Velg derfor V_1 og V_2 slik at trykket på begge sider av stemplene blir det samme som trykket i blandingen i hele volumet, $V_1 + V_2 = V_0$. Bruk samme argumentasjon som i punkt 6b til å bestemme entropiendringen i prosessen, der to ideelle gasser spontant blander seg med hverandre. Uttrykk svaret ved n, R, og molbrøkene x_1 og x_2.*

Når $p_1 = p_2 = p$, fant vi i forrige punkt at $V_1/V_0 = x_1$ og $V_2/V_0 = x_2$. Settes dette inn i uttrykket for det totale arbeidet i separasjonsprosessen, funnet i 6c, finner vi

$$|\Delta W| = nRT[x_1 \ln(1/x_1) + x_2 \ln(1/x_2)] = -nRT(x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2).$$

Men med samme argumentasjon som under 6b er entropiforskjellen mellom blandingstilstanden vi startet fra og de separerte gassene som var sluttproduktet, nettopp $\Delta S = |\Delta W|/T$. Dermed har vi funnet blandingsentropien: Når vi starter med to forskjellige ideelle gasser med samme trykk, fjerner skilleveggen og lar dem blande seg med hverandre, blir entropiøkningen

$$\Delta S = -nR(x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2) > 0.$$

At uttrykket nødvendigvis er positivt, følger av at molbrøkene er mindre enn 1. Og at blandingsprosessen øker entropien, er helt i samsvar med Boltzmanns innsikt: Entropien er et mål for mikroskopisk uorden!