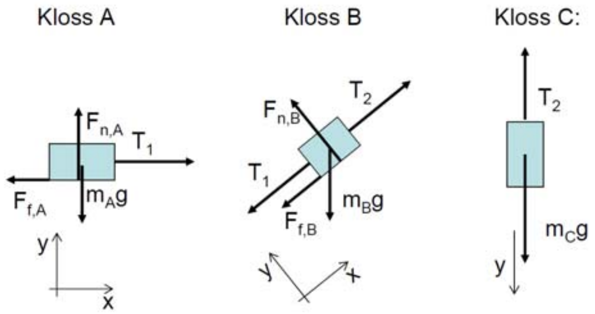
Løsningsforslag eksamen TFY4115 10. desember 2010.

Oppgave 1

a) Kreftene på klossene er vist under:



Siden trinsene og snorene er masseløse er det bare to ulike snordrag T_1 og T_2.

b) For å finne snordraget mellom kloss A og B, dvs T_1, bruker vi N1 på kloss B, siden klossene beveger seg med konstant fart.
Vi har da at (med x- og y-retninger som vist over):

$$\sum F_{y,A} = F_{n,A} - m_A g = 0 \Rightarrow F_{n,A} = m_A g$$

$$\sum F_{x,A} = T_1 - F_{f,A} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{T_1}} = F_{f,A} = \mu_k F_{n,A} = \mu_k m_A g = 0{,}350 \cdot 2{,}50\text{kg} \cdot 9{,}81\text{m/s}^2 = \underline{\underline{8{,}58\text{N}}}$$

c) For å finne massen til kloss C bruker vi N1 igjen, på klossB og C:

$$\sum F_{y,B} = F_{n,B} - m_B g \cos\theta = 0 \Rightarrow F_{n,B} = m_B g \cos\theta$$

$$\sum F_{x,B} = T_2 - T_1 - F_{f,B} - m_B g \sin\theta = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 + \mu_k m_B g \cos\theta + m_B g \sin\theta$$

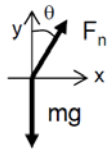
$$\sum F_{y,C} = m_C g - T_2 = 0 \Rightarrow T_2 = m_C g$$

Vi får da

$$m_C g = T_1 + \mu_k m_B g \cos\theta + m_B g \sin\theta = \mu_k m_A g + \mu_k m_B g \cos\theta + m_B g \sin\theta = m_A g\left(\mu_k + \mu_k \cos\theta + \sin\theta\right)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{m_C}} = m_A\left(\mu_k + \mu_k \cos\theta + \sin\theta\right) = 2{,}50\text{kg} \cdot \left(0{,}350 + 0{,}350 \cdot 0{,}8 + 0{,}6\right) \underline{\underline{= 3{,}08\text{kg}}}$$

Oppgave 2



a) Om det ikke er friksjon så er kreftene som virker på bilen bare normalkrafta og tyngekrafta, som vist i fritt legeme diagrammet til høyre. Normalkrafta vil ha en komponent rettet inn mot origo for sirkelbanen (med radius r=30,0m), slik at N2 på bilen blir

$$\sum F_x = F_n \sin\theta = ma = m\frac{v^2}{r}.$$

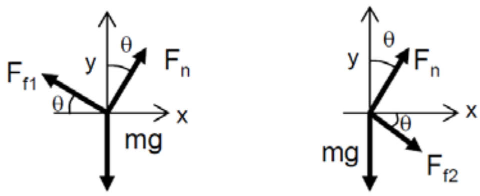
F_n finner vi et uttrykk for fra N1 for y-komponentene på bilen (ingen bevegelse i y-retning):

$$\sum F_y = F_n \cos\theta - mg = 0 \Rightarrow F_n = mg / \cos\theta .$$

Da har vi to likninger og to ukjente, og kan løse mph θ:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{v^2}{rg} \Leftrightarrow \underline{\underline{\theta}} = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right) = \underline{\underline{0{,}40 rad = 22{,}8^\circ}}$$

b) Om friksjonskoeffisienten er forskjellig fra null, så vil det virke en friksjonskraft $F_{f1} = \mu_s F_n$ rettet oppover skråplanet for å hindre bilen i å skli ned, om den kjører langsomt nok, men ikke for langsomt (illustrert til venstre under) og om den kjører raskt nok (men ikke for rakst): en annen friksjonskraft F_{f2} rettet nedover skråplanet for å forhindre bilen i å skli oppover om den kjører raskt nok:



Laveste fart for å ha bilen i samme høyde finnes da fra N1 og N2 med kraftdiagrammet til venstre:

$$\sum F_y = F_n \cos\theta + F_{f1} \sin\theta - mg = 0 \Rightarrow F_n\left(\cos\theta + \mu_s \sin\theta\right) = mg$$

$$\sum F_x = F_n \sin\theta - F_{f1} \cos\theta = F_n\left(\sin\theta - \mu_s \cos\theta\right) = m\frac{v^2}{r}.$$

Deler disse to likningene på hverandre og løser med hensyn på *v*:

$$\frac{\sin\theta - \mu_s \cos\theta}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta} = \frac{v^2}{gr} \Leftrightarrow v = \sqrt{gr\frac{\tan\theta - \mu_s}{1+\mu_s \tan\theta}}$$ =5,6 m/s=20,1 km/t.

Dette blir dermed laveste fart bilen kan ha.

Høyeste fart finnes ut fra N1 og N2 med kreftene på bilen som vist til høyre over (med F_{f2} isteden for F_{f1}):

$$\sum F_y = F_n \cos\theta - F_{f2} \sin\theta - mg = 0 \Rightarrow F_n\left(\cos\theta - \mu_s \sin\theta\right) = mg$$

$$\sum F_x = F_n \sin\theta + F_{f2} \cos\theta = F_n\left(\sin\theta + \mu_s \cos\theta\right) = m\frac{v^2}{r}$$

Deler disse to likningene på hverandre og løser med hensyn på *v*:

$$\frac{\sin\theta + \mu_s \cos\theta}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta} = \frac{v^2}{gr} \Leftrightarrow v = \sqrt{gr\frac{\tan\theta + \mu_s}{1-\mu_s \tan\theta}}$$ =15,6 m/s = 56,0 km/t.

Dette er høyeste fart bilen kan ha.

Vi ser at høyeste fart med friksjon er høyere enn farten uten friksjon (40,0km/t), som er rimelig siden friksjonen da gir en komponent rettet nedover. For at bilen ikke skal skli opp eller ned må tyngekraften balanseres av summen av vertikalkomponentene til friksjonen og normalkrafta. Normalkrafta øker når *v* øker, når μ_s og θ ikke endres (sees fra N2 for *x*-komponentene), men økningen balanseres av friksjonskomponenten nedover. Tilsvarende er det rimelig at den laveste farten er lavere enn uten friksjon, siden friksjonen nå gir en komponent rettet oppover.

Oppgave 3

a. Energibevarelse gir $mgh = mv_0^2/2$ og $v_0 = \sqrt{2gh}$. Ballen "reflekteres" fra bakken med hastighet $-v_0 = -\sqrt{2gh}$. (Positiv retning valgt nedover.) Ballen endrer sin bevegelsesmengde med $\Delta p = \alpha m \Delta v = -2\alpha m v_0$ i den elastiske kollisjonen med bakken. Bevaring av bevegelsesmengde er ivaretatt i og med at bakken endrer sin bevegelsesmengde med $2\alpha m v_0$.

b. Rett før den elastiske kollisjonen mellom de to ballene har nederste ball hastighet $-v_0$ og øverste ball hastighet v_0. (De har falt like langt.) Det er gitt i oppgaven at v angir hastigheten til øverste ball *oppover* etter kollisjonen. La oss dessuten velge v_1 lik nederste balls hastighet *nedover* etter kollisjonen. Bevaring av energi og bevegelsesmengde gir da

$$\begin{aligned} mv_0 - \alpha m v_0 &= -mv + \alpha m v_1 & (1)\\ \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\alpha m v_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\alpha m v_1^2 & (2) \end{aligned}$$

Vi dividerer (1) med m og (2) med $m/2$. Deretter samler vi ledd som inneholder α på den ene siden av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} v_0 + v &= \alpha(v_1 + v_0) & (3)\\ v_0^2 - v^2 &= \alpha(v_1^2 - v_0^2) & (4) \end{aligned}$$

Under forutsetning av at begge sider i (3) er forskjellig fra null, kan vi dividere (4) med (3). Det gir

$$v_0 - v = v_1 - v_0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_0 - v,$$

som innsatt i ligning (3) lar oss eliminere v_1:

$$\begin{aligned} v_0 + v &= \alpha(2v_0 - v) + \alpha v_0 = 3\alpha v_0 - \alpha v & (5)\\ \Rightarrow (\alpha+1)v &= (3\alpha - 1)v_0 & (6)\\ \Rightarrow v &= \frac{3\alpha-1}{\alpha+1}v_0 = \sqrt{2gh}\cdot\frac{3\alpha-1}{\alpha+1} & (7)\\ (\Rightarrow v_1 &= 2v_0 - v = -v_0\frac{\alpha-3}{\alpha+1} = -\sqrt{2gh}\cdot\frac{\alpha-3}{\alpha+1}\ ) & (8) \end{aligned}$$

Med "starthastighet" v i $y = 0$ vil den øverste ballen sprette til en høyde $y = v^2/2g$, dvs

$$y = h\cdot\left(\frac{3\alpha-1}{\alpha+1}\right)^2.$$

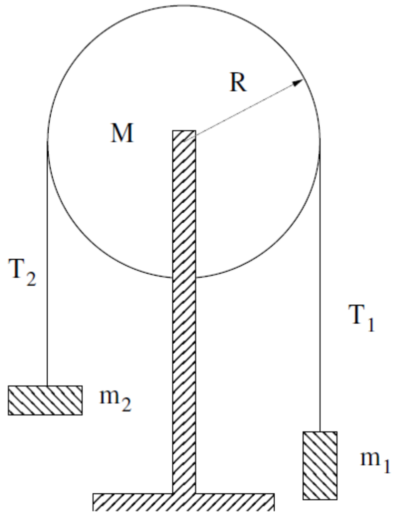
Grense- og spesialtilfeller (som her er mer utførlig diskutert enn det som var forventet til eksamen):

- $\alpha \gg 1$: Da vil $v \to 3v_0$ og $y \to 9h$. Høyere enn dette er det altså ikke mulig å få en ball til å sprette ved å slippe den sammen med *en* tyngre ball, fra høyden h. Med *flere* baller, derimot, med gradvis økende masse nedover, er det mulig å få den øverste ballen til å sprette riktig høyt (se A. Anderson og J. Vanderkooy, *Physics Education* **34**, side 172 (1999)). (Merk: Med *uendelig stor* α blir $v_1 = -v_0$ og høyre side av (3) lik null, slik at vi ikke uten videre kan dividere (4) med (3). Men baller med uendelig stor masse bekymrer ikke en fysiker – slike fins jo uansett ikke.)

- $\alpha \ll 1$: Da vil $v \to -v_0$, dvs den nå mye tyngre øverste ballen vil tvinge den nederste ballen til "retrett", og selv ganske enkelt fortsette sin ferd nedover med praktisk talt uendret hastighet. Men bakken er jo der, i umiddelbar nærhet, så enden på visa blir at den øverste ballen "reflekteres" med farten v_0 og spretter til starthøyden $y = h$. Dette ligger da også allerede "innbakt" i uttrykket for $y(h,\alpha)$, dvs $y \to h$ når $\alpha \to 0$. (Igjen kunne en kanskje bli litt urolig, for $v = -v_0$ gjør venstre side av (3) lik null og divisjon av (4) med (3) mistenkelig. Men baller med null masse anser vi som like uproblematiske som baller med uendelig masse.)

- $\alpha = 1$: Da vil $v \to v_0$ og $y \to h$. Og det er jo rimelig. De to ballene har lik masse og spretter begge etter hvert tilbake til sine opprinnelige starthøyder. Men den nederste ballen vil selvsagt først ta seg en ekstra runde nedom bakken, med hastighet $v_1 = v_0$, for å overføre en ny porsjon bevegelsesmengde, mv_0, til gulvet, før den endelig spretter tilbake til opprinnelig høyde.

Oppgave 4



a. Den største massen må nødvendigvis vinne nappetaket her, og m_2 vil derfor akseleres nedover, m_1 oppover: Rotasjon med klokka. Snordraget T_2 må være større enn T_1 siden T_2, foruten å akselerere m_1, også skal få sving på trinsen med treghetsmomentet $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$.

b. Siden de to massenes akselerasjon må være den samme, gir Newtons 2. lov for translasjon,

$$a = \frac{m_2 g - T_2}{m_2} = \frac{T_1 - m_1 g}{m_1}$$

Newtons 2. for rotasjon gir den tredje ligningen til bestemmelse av de tre ukjente T_1, T_2 og a (når ω regnes positiv *med* klokka):

$$\tau = (T_2 - T_1)R = I_0\dot{\omega} = \tfrac{1}{2}MR^2 \cdot a/R \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = \frac{M}{2}a.$$

Eliminasjon av a gir de to ligningene

$$\frac{2}{M}T_1 = \left(\frac{2}{M} + \frac{1}{m_1}\right)T_1 - g \quad ; \quad \frac{1}{m_2}T_2 = 2g - \frac{1}{m_1}T_1,$$

som gir

$$T_1 = g\frac{2m_1m_2 + m_1M/2}{m_1 + m_2 + M/2} \quad ; \quad T_2 = g\frac{2m_1m_2 + m_2M/2}{m_1 + m_2 + M/2}.$$

Av dette følger akselerasjonen

$$T_2 - T_1 = g\frac{(m_2 - m_1)M/2}{m_1 + m_2 + M/2} \quad \Rightarrow \quad a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M/2}.$$

Dette siste svaret kunne vi nesten ha gjettet, siden den drivende kraften her åpenbart er $m_2g - m_1g$ og Newtons 2. for rotasjon viser at trinsens effektive trege masse er $M/2$.

c. Når vi lar $M \to 0$ blir $T_1 = T_2$, og $a = (m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)$. Dette stemmer med enkle regninger!

Omvendt, når vi lar $M \to \infty$ blir $T_2 - T_1 = m_2g - m_1g$ og $a = 0$. Naturligvis, for da er trinsen ikke til å rikke, akselerasjonen må være null og snordragene være gitt av de respektive masser.

Siden begge grensene stemmer med direkte resonnementer, er tilliten til det generelle resultatet betydelig styrket.

Oppgave 5

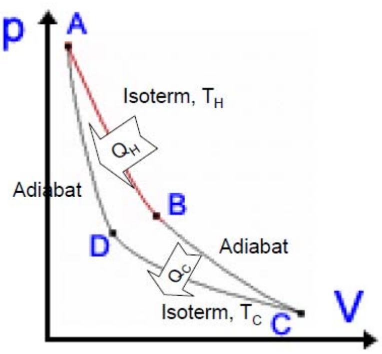
Reversibel prosess: En prosess som er så langsom at systemet kan regnes for å være i termodynamisk likevekt under hele prosessen.

Adiabatisk prosess: En varmeisolert prosess; $\Delta Q = 0$.

En adiabatisk prosess kan være irreversibel dersom den gjøres på en slik måte at systemet ikke er i termodynamisk likevekt, for eksempel en hurtig ekspansjon av en gass.

b) Carnot-prosessen er en syklisk prosess som består av

1. en isoterm ekspansjon av arbeidsmediet (en ideell gass) ved temperatur T_H (A→B i pV diagrammet til høyre). I dette trinnet absorberes en mengde varme Q_H.
2. en adiabatisk ekspansjon til temperaturen har falt til T_C (B→C)
3. en isoterm kompresjon ved T_C hvor en mengde varme Q_C avgis (C→D)
4. en adiabatisk kompresjon tilbake til utgangstilstanden med T_H (D→A)



Effektiviteten er definert generelt som

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_L}{Q_H}.$$

For en reversibel prosess som denne kan man uttrykke effektiviteten ved temperaturene T_H og T_C:

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_L}{Q_H} = \frac{T_H - T_L}{T_H} = 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$

Varme tilføres i trinn A→B og avgis i trinn C→D.

c) For å beregne varmemengden Q_L tar vi utgangspunkt i definisjonen på effektivitet og uttrykker den som funksjon av W og Q_L:

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{W}{Q_L + W}$$

Løser med hensyn på Q_L og får

$$Q_L = W\frac{1-e}{e}$$

Vi har fått oppgitt at e er x = 80% av carnot effektiviteten: dvs

$$e = x \cdot \left(1 - \frac{T_L}{T_H}\right) = 0{,}8\left(1 - \frac{290K}{550K}\right) = 0{,}378$$

W er oppgitt til å være 1000 MJ per sekund, slik at avgitt mengde varme per sekund blir

$$\underline{\underline{Q_L}} = W\frac{1-e}{e} = 1000\left(\frac{1-0{,}378}{0{,}378}\right)MJ = \underline{\underline{1644MJ}}$$

Varmemengden Q_L avgis per sekund til de $V = 50\text{m}^3$ vann som strømmer forbi i dette sekundet. Hvor mye dette volumet med vann varmes opp bestemmes da fra uttrykket

$Q_L = c_{vann} V \Delta T$, hvor V er volumet og c_{vann} varmekapasitet per volum, som finnes fra

$c_{vann} = 4190$ J/(kgK) = 4190 ·1000 kg/m^3 J/(kgK) = 4,190 10^6 J/(m^{3}K).

Temperaturøkningen blir altså

$$\underline{\underline{\Delta T}} = \frac{Q_L}{c_{vann} \cdot V} = \underline{\underline{7{,}8K}}$$

Oppgave 6

a) Vi skal bestemme volumet i tilstand c og trykk volum og temperatur i a og b.

Vi har at *pV=nRT*, siden gassen er antatt å være ideell. Vi har oppgitt at n=2. I tilstand c for vi derfor

$$\underline{\underline{V_c}} = nR\frac{T_c}{p_c} \underline{\underline{= 4{,}82\cdot 10^{-2}\ m^3}}$$

Prosess b → c er en isokor, slik at $V_b = V_c$,= 4,82·10^{-2}m^3 og prosess a → b er en isoterm slik at $T_a = T_b = 393K$.

For å finne V_a bruker vi adiabatlikningen for sammenhengen mellom volum og temperatur for tilstand c og a :

$$T_c\, V_c^{\gamma-1} = T_a\, V_a^{\gamma-1} \Leftrightarrow \underline{\underline{V_a}} = \left(\frac{T_c}{T_a}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_c \underline{\underline{= 2{,}31\cdot 10^{-2}\, m^3}}$$

Trykket i a og b kan nå finnes fra ideell gass likninga:

$$\underline{\underline{p_a}} = nR\frac{T_a}{V_a} \underline{\underline{= 2{,}82\cdot 10^5\, Pa}}$$

$$\underline{\underline{p_b}} = nR\frac{T_b}{V_b} \underline{\underline{= 1{,}35\cdot 10^5\, Pa}}$$

b) I prosess c → a komprimeres gassen adiabatisk, dvs dQ = 0 (og ΔQ = 0). Da gir termodynamikkens første lov (på differensial form)

$$dQ = 0 = dU + pdV \Rightarrow pdV = -dU = -nC_V dT$$

Arbeidet som gjøres på gassen i løpet av c → a er da

$$\underline{\underline{W_{ca}}} = \int_c^a pdV = -\int_c^a dU = -\int_c^a nC_V dT = -nC_V\left(T_a - T_c\right) \underline{\underline{= -4158J}}$$

I prosess a → b ekspanderer gassen med konstant temperatur og vi kan finne et uttrykk for *p* fra ideell gasslikningen: *p = nRT/V*:

$$\underline{\underline{W_{ab}}} = \int_a^b pdV = \int_a^b \frac{nRT_a}{V} dV = nRT_a\int_a^b \frac{1}{V} dV = nRT_a\, ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) \underline{\underline{= 4795J}}$$

I prosess b → c er volumet konstant, slik at , slik at netto arbeid utført av gassen i løpet av kretsprosessen er

$$\underline{\underline{W_{net}}} = W_{ab} + W_{bc} + W_{ca} = 4795J - 4158J \underline{\underline{= 637J}}$$

Oppgave 7

Vi antar at mannen stråler som er svart legeme og da er varmetapet per sekund

$H_{ut} = Ae\,\sigma T^4 = 191\ J/s = 191\ W.$

Samtidig mottar mannen varmestråling fra omgivelsene (antar omgivelsene også har emissivitet lik 1) lik

$H_{inn} = Ae\,\sigma T^4 = 99\ W$

slik at netto varmetap blir $\underline{\underline{H_{net} = 92\, W}}$.

(Her har vi også antatt at resten av mannens overflate er dekket med klær, som er i termodynamisk likevekt med omgivelsene, dvs som har en temperatur på -16C.)

Andre mulige varmeoverføringsmekanismer fra det eksponerte arealet som er mulige er konveksjon dvs varmetap til lufta. I tilegg kan det overføres varme fra undersiden av skoene og til bakken via varmeledning, dersom skosålene har varmeledningsevne >0. Om skoene er godt isolert vil dette varmetapet være neglisjerbart.

[Kommentar utenom pensum: Varmetapet fra konveksjon kan være betydelig og størrelsen på tapet avhenger av om lufta strømmer laminert (gir tap på ca 75W) eller turbulent (ca 750W) oppover langs det eksponerte arealet.]