TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)

Eksamen 17. des. 2011. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h
Rett svar:	E	D	D	B	A	B	C	C

Detaljer om spørsmålene:

a. E. Ved gliding er $F_f = \mu_k F_N = \mu_k(mg - F\sin\theta)$. (Normalkrafta blir altså mindre som følge av at F har komponent oppover.) Fra $\sum F_x = 0$ (farta konstant) får vi også $F_f = F\cos\theta$, slik at to alternativ er rette.

b. D. Bevaring bev.mengde: $M_1 v = (M_1 + M_2)v'$ gir v' som oppgitt i D.

c. D. Massesenteret definert som "midtpunkt" for massen mens tyngdepunktet definert som "midtpunkt" for tyngdekrafta $G = mg$. Kun dersom tyngdens aksel. g er lik over hele legemet vil tyngdepunktet og massesenteret falle sammen.

d. B. Akselerasjonen er den andrederiverte av posisjonen: $a = \ddot{y}$. Andrederiverte av en sinuskurve er lik −sinus.

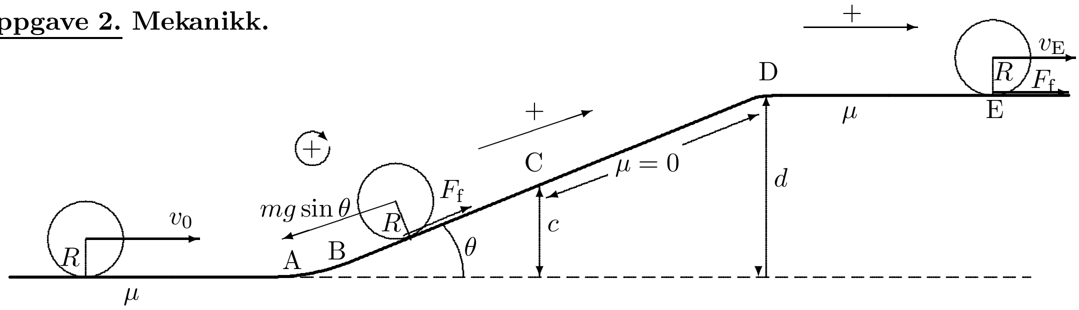
e. A Ekvipartisjonsprinsippet sier at energien fordeles med $\frac{1}{2}k_B T$ per frihetsgrad per molekyl, uansett masse. Per atom blir det derfor like mye (indre) energi U for de to enatomige gassene siden begge har tre frihetsgrader.

f. B Carnotvarmepumpa har virkningsgrad $\eta = \left|\frac{Q_H}{W}\right| = \frac{T_H}{T_H - T_L} = \frac{308}{40} = 7,70$. Arbeid $W = \frac{Q_H}{7,70} = 0,195$ kJ.

g. C Stefan-Boltzmanns lov: $j = \sigma T^4$ angir energistrømtetthet (W/m^2). For ei kule er total effekt $P = j \cdot A = j \cdot 4\pi R^2$. Når T konstant og R dobles vil P firedobles.

h. C Refererer til fasediagrammet i pT-projeksjon: Ved trykk under p_{trippel} finnes ingen væskefase. Ved oppvarming av fast stoff går stoffet over til gass uten å gå om væske.

Oppgave 2. Mekanikk.



Figuren viser valg av positive retninger: til høyre og oppover skråplanet, og positiv rotasjonsretning i den retning sylinderen ruller. Masse = m (et sted i oppgaveteksten brukt M).

a. i) Ved rulling uten energitap på flatt underlag er hastigheten konstant. Dermed $\underline{a = 0 \text{ og } F_f = 0}$.

ii) Retning: Sylinderens hastighet reduseres slik at $a < 0$. Den må også rulle langsommere slik at F_f må virke oppover langs planet for å gi et kraftmoment som reduserer ω.

Størrelser: $F_f < \mu F_N$ og justerer seg til å gi rotasjonsakselerasjon som klaffer med translasjonsakselerasjonen: $\alpha = a/R$. For å finne a og F_f bruker vi Newton 2 for rotasjon og for translasjon. Sylinderens tyngde dekomponeres i $mg\sin\theta$ nedover langs planet og $mg\cos\theta$ normalt ned mot planet.

$$\text{N2-rot:} \quad \tau = -F_f R = I\alpha = \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R} = \frac{1}{2}mRa \tag{1}$$

$$\text{N2-trans:} \quad F_f - mg\sin\theta = ma \tag{2}$$

Likn. (1) gir $F_f = -\frac{1}{2}ma$ som innsatt i (2) gir

$$-\frac{1}{2}a - g\sin\theta = a \quad \Rightarrow \quad a = \underline{-\frac{2}{3}g\sin\theta} = -\frac{2}{3}\cdot 9,81\,\text{m/s}^2 \cdot 0,50 = \underline{-3,27\,\text{m/s}^2}. \tag{3}$$

Og friksjonskrafta blir

$$F_\mathrm{f} = -\frac{1}{2}ma = \underline{\frac{mg\sin\theta}{3}} = \frac{1,00\,\mathrm{kg}\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0,50}{3} = \underline{1,64\,\mathrm{N}}. \tag{4}$$

iii) Siden friksjonskoeffisienten er null er selvfølgelig $\underline{F_\mathrm{f} = 0}$.
Langs planet virker da kun $mg\sin\theta$ (nedover), slik at $a = -g\sin\theta = \underline{-4,91\,\mathrm{m/s^2}}$ (nedover).

iv) Igjen virker friksjon, nå glidende friksjon med gitt verdi:

$$F_\mathrm{f} = \mu F_\mathrm{N} = \underline{\mu\cdot mg} = 0,60\cdot 1,00\,\mathrm{kg}\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{5,89\,\mathrm{N}}.$$

Sylinderen har for stor rotasjon i forhold til translasjon, slik at <u>friksjonen virker mot høyre</u> og derved øker v og reduserer ω. Dette er eneste krafta langs planet og dermed

$$a = \frac{F_\mathrm{f}}{m} = \mu\cdot g = 0,60\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{5,89\,\mathrm{m/s^2}} \quad \text{(positiv, mot høyre).}$$

b.

$$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{k,trans} + E_\mathrm{k,rot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot v^2/R^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \underline{\frac{3}{4}mv^2}.$$

c. Rein rulling uten energitap gir

$$E_\mathrm{k,C} + mgc = E_\mathrm{k,A} \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{4}mv_\mathrm{C}^2 + mgc = \frac{3}{4}mv_\mathrm{A}^2 = \frac{3}{4}mv_0^2 \quad\Rightarrow\quad \underline{v_\mathrm{C} = \sqrt{v_0^2 - \frac{4}{3}gc}} \quad \text{og } \underline{\omega_\mathrm{C} = v_\mathrm{C}/R}.$$

Eller fra akselerasjonen: $v_\mathrm{C}^2 - v_\mathrm{A}^2 = 2as = 2\left(-\frac{2}{3}g\sin\theta\right)c/\sin\theta = -\frac{4}{3}gc$ osv.

d. Uten friksjon endres ikke rotasjonshastigheten fra C til D:

$$\underline{\omega_\mathrm{D} = \omega_\mathrm{C} = v_\mathrm{C}/R}.$$

Rotasjonsenergien er derfor også konstant og potensiell høydeenergi tapper kun kinetisk translasjonsenergi:

$$E_\mathrm{k,D} = E_\mathrm{k,C} - mg(d-c) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}mv_\mathrm{D}^2 = \frac{1}{2}mv_\mathrm{C}^2 - mg(d-c)$$

som gir

$$\underline{v_\mathrm{D} = \sqrt{v_\mathrm{C}^2 - 2g(d-c)}}.$$

Eller fra akselerasjonen: $v_\mathrm{D}^2 - v_\mathrm{C}^2 = 2as = 2\left(-g\sin\theta\right)(d-c)/\sin\theta = -2g(d-c)$ osv.

e. Ved bevegelse fra D mot E har friksjonskrafta F_f null moment om punktet D fordi armen er (anti)parallell med krafta. Kraftmomentene fra mg og F_N nuller hverandre. Derfor er totalmomentet om D lik null og derfor er spinnet L om punktet D bevart. Vi beregner derfor spinnet ved D og ved E og setter deretter disse like:

$$\text{Sylinder ved D:}\qquad L(D) = mv_\mathrm{D}R + I\omega_\mathrm{D} = mv_\mathrm{D}R + \frac{1}{2}mR^2\frac{v_\mathrm{C}}{R} = mv_\mathrm{D}R + \frac{1}{2}mRv_\mathrm{C}$$

Ved E er det rein rulling, $\omega_\mathrm{E} = v_\mathrm{E}/R$, og spinnet kan uttrykkes:

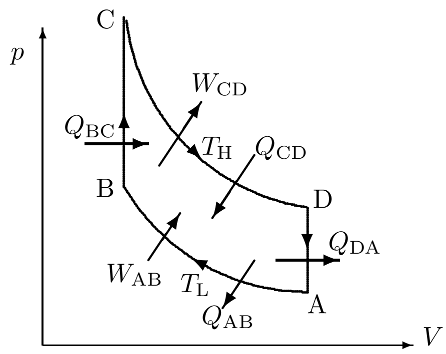
$$\text{Sylinder ved E:}\qquad L(E) = mv_\mathrm{E}R + I\omega_\mathrm{E} = mv_\mathrm{E}R + \frac{1}{2}mR^2\frac{v_\mathrm{E}}{R} = \frac{3}{2}mv_\mathrm{E}R.$$

$L(D) = L(E)$ gir

$$\frac{3}{2}mv_\mathrm{E}R = mv_\mathrm{D}R + \frac{1}{2}mRv_\mathrm{C} \quad\Rightarrow\quad \underline{v_\mathrm{E} = \frac{2}{3}v_\mathrm{D} + \frac{1}{3}v_\mathrm{C}}.$$

Oppgave 3. Kretsprosess.

a. Energistrøm vist i figuren. Ved isoterm ekspansjon gjør gassen arbeid på omgivelser og samme energimengde må tilføres som varme. Motsatt ved kompresjon. Ved isokor oppvarming tilføres varme, isokor avkjøling avgis varme.



Selv om prosessen går langsomt slik at det er termodynamisk likevekt i gassen, vil det - slik prosessen er gitt - i de isokore prosessene overføres varme fra/til et reservoar med en temperatur ulik gassens: For BC overføres varme fra reservoartemperatur T_H til gassens lavere temperatur varierende fra T_L til T_H. For DA overføres varme fra gassen med temp fra T_H til T_L og til reservoartemperatur T_L. Med denne irreversible varmeoverføringen er som helhet ikke varmekraftmaskinen reversibel.

b. For en isoterm prosess for ideell gass er $\Delta U = nC_v\Delta T = 0$, slik at 1. hovedsetning gir:

$\underline{Q_{AB}} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = 0 + nRT_L \ln\frac{V_B}{V_A} = 0,40 \cdot 8,31\,\text{J/K} \cdot 400\,\text{K} \cdot \ln(10/40) = -1843\,\text{J} = \underline{-1,8\,\text{kJ}}$ (avgitt).

$\underline{Q_{CD}} = \Delta U_{CD} + W_{CD} = 0 + nRT_H \ln\frac{V_D}{V_C} = 0,40 \cdot 8,31\,\text{J/K} \cdot 800\,\text{K} \cdot \ln(40/10) = 3686\,\text{J} = \underline{3,7\,\text{kJ}}$ (mottatt).

For en isokor prosess er $W = 0$, slik at

$\underline{Q_{BC}} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = n\,C_V \cdot \Delta T + 0 = n\,C_V(T_H - T_L) = 0,40 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot 400\,\text{J} = 3326\,\text{J} = \underline{3,3\,\text{kJ.}}$ (mottatt).

$\underline{Q_{DA}} = \Delta U_{DA} + W_{DA} = n\,C_V \cdot \Delta T + 0 = n\,C_V(T_L - T_H) = -3326\,\text{J} = \underline{-3,3\,\text{kJ.}}$ (avgitt).

c. Indre energi U er tilstandsfunksjon slik at for kretsprosessen er $\Delta U = Q - W = 0$. Dermed er $W = Q = Q_{\text{inn}} + Q_{\text{ut}}$, der $Q_{\text{inn}} = Q_{BC} + Q_{CD}$ (positiv) og $Q_{\text{ut}} = Q_{AB} + Q_{DA}$ (negativ). For isokorene er $Q_{BC} = -Q_{DA}$ slik at

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W}{Q_{\text{inn}}} = \frac{Q_{\text{inn}} + Q_{\text{ut}}}{Q_{\text{inn}}} = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{BC} + Q_{CD}} = \frac{-1843 + 3686}{3326 + 3686} = \frac{1843}{7022} = 0,262 = \underline{0,26}$$

d. Enkleste løsning er å bruke uttrykk for ΔS for ideell gass fra formelark. For AB er temperatur uendra og volum endres fra V_A til V_B:

$$\underline{\Delta S_{AB}} = nR\ln V_B/V_A = 0,40\text{ mol} \cdot 8,31\text{ J/(K}\cdot\text{mol)} \cdot \ln(10/40) = -4,610\,\text{J/K} = \underline{-4,6\text{ J/K}}.$$

For BC er volum uendra og temperatur endres fra T_L til T_H:

$$\underline{\Delta S_{BC}} = nC_V \ln T_H/T_L = 0,40\text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31\text{ J/(K}\cdot\text{mol)} \cdot \ln(800/400) = 5,763\,\text{J/K} = \underline{5,8\text{ J/K}}.$$

e. Entropien er en tilstandsfunksjon slik at gassens entropi er tilbake til starttilstanden ved ett omløp:

$$\underline{\Delta S_{\text{gass}}} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DE} = \underline{0}.$$

(Utregning for hver delprosess er unødvendig, men regning som ovenfor vil gi $\Delta S_{CD} = -\Delta S_{AB}$ og $\Delta S_{DA} = -\Delta S_{BC}$.)

Som beskrevet i **a.** er varmeoverføringen til omgivelsene irreversibel i BC og DA mens den er reversibel for isotermene AB og CD. Omgivelsene mottar derfor like mye entropi i AB som den avgir i CD, og vi kan nøye oss med å regne ut entropiendringen for omgivelsene i isokorene BC og DA:

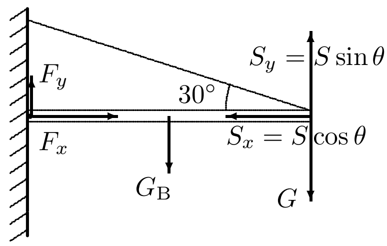
$\Delta S_{\text{BC,omg}} = -Q_{BC}/T_H = -3326\,\text{J}/800\,\text{K} = -4,158\,\text{J/K}$ (omg. avgir entropi)

$\Delta S_{\text{DA,omg}} = -Q_{DA}/T_L = -(-3326\,\text{J})/400\,\text{K} = 8,315\,\text{J/K}$ (omg. mottar entropi)

$\Delta S_{\text{omg}} = \Delta S_{\text{BC,omg}} + \Delta S_{\text{DA,omg}} = 8,315\,\text{J/K} - 4,158\,\text{J/K} = 4,158\,\text{J/K} = \underline{4,2\text{ J/K}}.$

Kommentarer: Altså øker universets entropi, som stemmer med betraktningen i **a.** at varmemaskinen har irreversibel varmeoverføring i isokorene BC og DA. Vi ser i regningen at grunnen til økningen i entropi er at omgivelsene mottar og avgir ved ulike temperaturer i de to isokorene, derfor mottas mer entropi ved avkjøling DA enn avgis ved oppvarmingen i BC.

Oppgave 4.



a. Lastens vekt $G = 150$ N. Bjelkens vekt $G_B = 100$ N virker midt på bjelken. Kraftmomentbalanse om bjelkens venstre punkt bestemmer taustrekket S:

$$S{\cdot}\sin 30^\circ{\cdot}L = G{\cdot}L{+}G_B{\cdot}L/2 \quad\Rightarrow\quad S = (G + G_B/2){\cdot}\frac{1}{\sin 30^\circ} = 200\,\mathrm{N}{\cdot}\frac{1}{1/2} = 400\,\mathrm{N}.$$

Newton 1 horisontalt og vertikalt bestemmer kraftkomponentene F_x og F_y fra hengslingen. Antar F_y oppover:

$$\sum\nolimits_x F = 0 \qquad \Rightarrow F_x = S_x = S\cdot\cos 30^\circ = S\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = 346,4\,\mathrm{N} = \underline{346\,\mathrm{N}}.$$

$$\sum\nolimits_y F = 0 \qquad \Rightarrow F_y = G + G_B - S_y = G + G_B - S\sin 30^\circ = 250\,\mathrm{N} - 400\,\mathrm{N}\cdot 0,500 = \underline{50,0\,\mathrm{N}}.$$

Størrelse: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(346,4)^2 + (50,0)^2}\,\mathrm{N} = 349,99\,\mathrm{N} = \underline{350\,\mathrm{N}}$

Vinkel med x-retning (bjelken): $\phi = \arctan(50/346,4) = 8,213^\circ = \underline{8,21^\circ}$.

b. Det er ikke nødvendig å utlede svingelikning for fysisk pendel, bruker følgende formler i formellista:

1) Treghetsmoment for kule om massesenter: $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$.

2) Steiners sats, gir oss I for kule om punkt i avstand xR fra massesenter: $I = \frac{2}{5}MR^2 + M(xR)^2 = \left(\frac{2}{5} + x^2\right)MR^2$.

3) Frekvens for fysisk pendel med masse M, treghetsmoment I og med avstand d fra pendelens massesenter til svingepunkt: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{Mgd}{I}}$. Gjelder for små vinkelutslag ($\sin\theta \approx \theta$).

4) Svingetid for pendel: $T = 2\pi/\omega_0$.

For kulependelen er $d = xR$. Bruk av $I = \left(\frac{2}{5} + x^2\right)MR^2$ gir

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{5} + x^2\right)MR^2}{MgxR}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\sqrt{\frac{2 + 5x^2}{5x}}.$$

c. La T være temperaturen vi skal bestemme i grenseflata. Siden temperaturen på ytterflatene er gitt (T_A og T_B) trenger vi ikke ta med varmeovergangen $\alpha\Delta T$ for disse flatene. Med $\kappa_A = 3\kappa_B$ og $\ell_A = 2\ell_B$ kan varmestrøm $j = \kappa\Delta T/\ell$ gjennom hvert lag uttrykkes:

$$\begin{aligned} j_A &= 3\kappa_B\cdot(T_A - T)/2\ell_B \\ j_B &= \kappa_B\cdot(T - T_B)/\ell_B \end{aligned}$$

Ved stasjonære forhold (konstant T) er varmestrømmen er den samme gjennom begge lag, $j_A = j_B$, og dette gir

$$(3/2)\cdot(T_A - T) = (T - T_B) \qquad\Rightarrow\qquad 3T_A - 3T = 2T - 2T_B \qquad\Rightarrow\qquad T = \frac{3}{5}T_A + \frac{2}{5}T_B = \underline{52\,^\circ\mathrm{C}\quad(325\,\mathrm{K})}.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 4. jan. -12.