TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)
Eksamen TFY4115 10. aug. 2012. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h
Rett svar:	E	C	A	C	B	D	B	A

Detaljer om spørsmålene:

a. E. Normalkraft normalt opp fra underlaget, friksjonskraft på langs oppover underlaget, tyngdekrafta rett nedover.

b. C. En massiv sylinder har $I = \frac{1}{2}mR^2$. Kin.energi er $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2(v/R)^2 = \frac{3}{4}mv^2$.

c. A. Landingen på karusellen er et uelastisk støt, så (mekanisk) energi E for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bakken, virker på systemet med en kraft når studenten lander. Dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde p være bevart. Men denne kraften fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en akse gjennom karusellens sentrum, slik at spinnet L er bevart.

d. C. Når kulene henger sammen er dette et fullstendig uelastisk støt, og det vil tapes energi. Under en kollisjon uten ytre krefter er alltid p og L bevart (her er sammenhengen $L = \ell p$ for hver av kulene, der ℓ er snorlengden.

e. B. Fart til venstre kule *før* støt fra energibevarelse $mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \;\Rightarrow\; v_1^2 = 2gh$. Med v' = fellesfarten etter støtet gir bevaring av bevegelsesmengden: $mv_1 = 2mv'$. Energibevaring *etter* støtet gir: $2mgH = \frac{1}{2}(2m)\,v'^2$, som gir $H = \frac{1}{2}\frac{v'^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{4g} = \frac{1}{2}\frac{2gh}{4g} = \frac{h}{4}$.

f. D. I metta damp er trykket kun avhengig av temperaturen. Om f.eks. volumet øker vil mer væske fordampe og opprettholde trykket.

g. B. Ved adiabatisk ekspansjon faller temperaturen fordi $\Delta U = W < 0$. Areal under pV-kurve og dermed arbeidet er mindre enn for isoterm, uansett temperatur og V_2/V_1.
OBS: Det burde vært presisert at starttilstanden er lik i begge tilfeller. Dersom det er sluttilstanden som er lik vil C være rett svar. Oppgaven derfor trukket ut av bedømmelsen (ingen hadde rett svar).

h. A. Ekvipartisjonsprinsippet sier at energien fordeles med $\frac{1}{2}k_\mathrm{B}T$ per frihetsgrad per molekyl, uansett masse. Per atom blir det derfor like mye (indre) energi U for de to enatomige gassene siden begge har tre frihetsgrader.

Oppgave 2.

a. I tillegg til kreftene tegnet på figuren i oppgaven virker tyngdekrafta Mg rett nedover midt på stanga. Likevekt i x- og y-retning gir

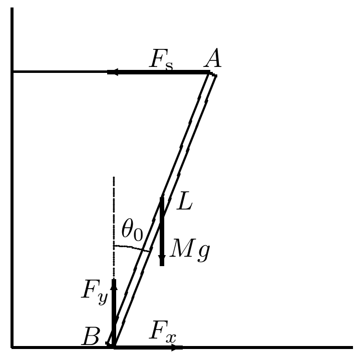
$$F_y = Mg \qquad \text{og} \qquad F_x = F_s$$

Videre har vi rotasjonslikevekt om punktet B:

$$Mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\theta_0 = F_\mathrm{s} \cdot L\cos\theta_0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{F_\mathrm{s} = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan\theta_0}\,.$$

Da har vi bestemt F_s, og ergo blir

$$\underline{F_x = F_\mathrm{s} = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan\theta_0} \qquad \text{og} \qquad \underline{F_y = Mg}\,.$$



b. Vi bruker Steiners sats (parallellakseteoremet) til å finne I om endepunktet, som er i avstand $\frac{L}{2}$ fra tyngdepunktet:

$$I = I_\mathrm{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \underline{\frac{1}{3}ML^2}\,.$$

Kan også integrere, med $\mathrm{d}m = \mathrm{d}\ell \cdot M/L$:

$$I = \int_0^L \ell^2 \mathrm{d}\ell \cdot M/L = \frac{M}{L} \cdot \left[\frac{1}{3}\ell^3\right]_0^L = \underline{\frac{1}{3}ML^2}\,.$$

c. Bevegelsen kan sees på som rein rotasjon om B, slik at kin. energi er kun rotasjonsenergi $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{6}ML^2\omega^2$. Energi ved θ_0 lik energi ved vilkårlig θ:

$$0 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta_0 = \frac{1}{6}ML^2\omega^2 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}$$

Oppgave 3.

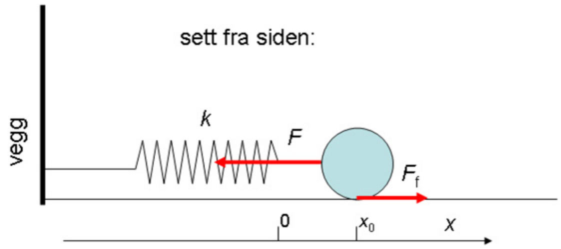
a. Fjærkrafta $F = -kx$ er positiv mot høyre (negativ for positiv x). Fjærkrafta gir en akselerasjon $a = \ddot{x}$. Newton 2 på akslingen med kuler (masse $2 \cdot M/2 = M$):

$$\sum F = M\ddot{x} = -kx, \qquad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0,$$

som vi gjenkjenner som en harmonisk oscillasjon med $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ og svingetid

$$\underline{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,00\,\mathrm{kg}}{200\,\mathrm{kg/s^2}}} = \underline{0,44\,\mathrm{s}}.$$

b. Fjærkrafta virker mot venstre og for at kula skal rotasjonsakselerere fra å være i ro til å rotere mot klokka, må friksjonskrafta F_f ha retning mot høyre. F_f virker i kontaktpunktet mot underlaget. F må være større enn F_f for at kula skal få translasjonsakselerasjon mot venstre.



c. Med rotasjonsakselerasjon α og translasjonsakselerasjon a er betingelsen $a = \alpha R$ for rein rulling oppfylt. F_f er stor nok til at grensa $F_{\mathrm{f,max}} = \mu_s Mg$ ikke er nådd. Newton 2 for rotasjon:

$$\tau = F_\mathrm{f}R = I\alpha = I\frac{a}{R},$$

der treghetsmomentet for de to kulene er $I = 2 \cdot \frac{2}{5}\frac{M}{2}R^2 = \frac{2}{5}MR^2$. Dette gir

$$F_\mathrm{f}R = \frac{2}{5}MR^2\frac{a}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{F_\mathrm{f} = \frac{2}{5}Ma}.$$

d. Akselerasjonen har retning mot venstre, men vi regner a uten fortegn (positiv) i følgende regning. Med fjærkraft $F = -kx_0$ (mot venstre) og $F_\mathrm{f} = +\frac{2}{5}Ma$ (mot høyre) i ytterpunktet, gir N2

$$\sum F = F + F_\mathrm{f} = -kx_0 + \frac{2}{5}Ma = -Ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{7}\cdot\frac{kx_0}{M} = \frac{5}{7}\cdot\frac{200\,\mathrm{N/m}\cdot 0,100\,\mathrm{m}}{1,00\,\mathrm{kg}} = \underline{14,3\,\mathrm{m/s^2}}.$$

e. Skal rotasjonsakselerasjonen følge med lineær akselerasjon må (fra uttrykk i c.):

$$F_\mathrm{f} = \frac{2}{5}Ma = \frac{2}{5}\cdot 1,00\,\mathrm{kg}\cdot 14,3\,\mathrm{m/s^2} = 5,72\,\mathrm{N}$$

Og med grensetilfellet $F_\mathrm{f} = F_{\mathrm{f,max}} = \mu_s Mg$ får vi

$$\mu_s Mg = \frac{2}{5}Ma \qquad \Rightarrow \qquad \mu_s = \frac{a}{g}\frac{2}{5} = \frac{14,3}{9,81}\cdot\frac{2}{5} = \underline{0,58}.$$

Kontroll: I høyre ytterstilling er fjærkraft $= kx_0 = 200\,\mathrm{N/m}\cdot 0,10\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{N}$ mot venstre mens friksjonskraft (funnet over) $F_\mathrm{f} = 5{,}72$ N mot høyre. Dette gir lineær akselerasjon $|a| = \frac{\sum F}{M} = \frac{kx_0 - F_\mathrm{f}}{M} = \frac{14,3\,\mathrm{N}}{1,00\,\mathrm{kg}} = 14,3\,\mathrm{m/s^2}$, som stemmer.

Oppgave 4.

a. Antall mol fra ideell gasslov:

$$n_\mathrm{A} = n_\mathrm{B} \equiv n = \frac{p_{A,0}V_{A,0}}{RT_{A,0}} = \frac{101300\ \mathrm{N/m^2}\cdot 5,0\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3}}{8,314\ \mathrm{J/(K\ mol)}\cdot 273\ \mathrm{K}} = 2,232\ \mathrm{mol} = \underline{\underline{2,23\ \mathrm{mol}}}$$

b. Bestemmer sluttvolumet i B fra adiabatlikningen. For enatomig gass er $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5/2}{3/2} = \frac{5}{3}$ (OBS: ble oppgitt under eksamen).

$$p_B V_B^\gamma = p_{B,0}V_{B,0}^\gamma \quad\Rightarrow\quad V_B = V_{B,0}\cdot\left(\frac{p_{B,0}}{p_\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_{B,0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{5}} = V_{B,0}\cdot 0,5173 = 2,586\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3} = \underline{\underline{2,59\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3}}}$$

$$V_A = (V_{A,0}+V_{B,0}) - V_B = 2\cdot 5,0\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3} - 2,586\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3} = 7,414\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3} = \underline{\underline{7,41\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3}}}$$

c. Temperaturene bestemmes enklest fra ideell gasslov:

$$T_\mathrm{A} = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{3\cdot 101300\ \mathrm{N/m^2}\cdot 7,414\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3}}{2,232\ \mathrm{mol}\cdot 8,314\ \mathrm{J/(K\ mol)}} = \underline{\underline{1214\ \mathrm{K}}}.$$

$$T_\mathrm{B} = \frac{p_B V_B}{n_\mathrm{B} R} = \frac{3\cdot 101300\ \mathrm{N/m^2}\cdot 2,586\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3}}{2,232\ \mathrm{mol}\cdot 8,314\ \mathrm{J/(K\ mol)}} = 423,5\ \mathrm{K} = \underline{\underline{424\ \mathrm{K}}}.$$

d. Betrakt totalsystemet A+B, dette gjør intet ytre arbeid da totalvolumet er konstant. Ved bruk av 1.lov på totalsystemet får vi da:

$$đQ = \mathrm{d}U_\mathrm{tot} + đW_\mathrm{tot} = \mathrm{d}U_\mathrm{A} + \mathrm{d}U_\mathrm{B} + 0$$

For monoatomær ideell gass er $C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}R$ slik at $\mathrm{d}U = nC_V\mathrm{d}T$. Dermed er

$$Q = C_{V,A}(T_\mathrm{A} - T_{A,0}) + C_{V,B}(T_\mathrm{B} - T_{B,0}) = \frac{3}{2}nR(T_\mathrm{A} - T_{A,0}) + \frac{3}{2}nR(T_\mathrm{B} - T_{B,0})$$

Med $n = 2,232$ mol, $R = 8,312$ J/(K mol), $T_\mathrm{B} = 423,5$ K, $T_\mathrm{A} = 1214$ K, $T_{A,0} = T_{B,0} = 273$ K, får vi

$$Q = 26,19\ \mathrm{kJ} + 4,19\ \mathrm{kJ} = 30,38\ \mathrm{kJ} = \underline{\underline{30,4\ \mathrm{kJ}}}.$$

Kunne også betraktet system A: $Q = Q_\mathrm{A} = \Delta U_\mathrm{A} + W_\mathrm{A}$. Men W_A er litt ekkel å beregne men finnes enklest fra: $W_\mathrm{A} = -W_\mathrm{B} = \Delta U_\mathrm{B}$ (fordi adiabatisk prosess i B), og vi ender opp med samme likningen som over.

e. Prosessen i B er reversibel og adiabatisk, da er

$$\underline{\underline{\Delta S_B = 0}}.$$

For A er det enkleste (og fullt tillatt) å bruke følgende formel for ideell gass fra formelark:

$$\Delta S_{12} = nC_V\ln\frac{T_2}{T_1} + nR\ln\frac{V_2}{V_1} \qquad \text{her:}\quad \Delta S_\mathrm{A} = nC_V\ln\frac{T_A}{T_{A,0}} + nR\ln\frac{V_\mathrm{A}}{V_{A,0}}$$

Tallverdier:

$$\Delta S_\mathrm{A} = 2,23\ \mathrm{mol}\cdot\frac{3}{2}\cdot 8,314\ \mathrm{J/(K\ mol)}\cdot\ln\frac{1214}{273} + 2,23\ \mathrm{mol}\cdot 8,314\ \mathrm{J/(K\ mol)}\cdot\ln\frac{7,414}{5,0} = \underline{\underline{48,8\ \mathrm{J/K}}}$$

Kan evt. også beregne ΔS_B:

$$\Delta S_\mathrm{B} = nC_V\ln\frac{T_\mathrm{B}}{T_{B,0}} + nR\ln\frac{V_\mathrm{B}}{V_{B,0}} = 2,23\ \mathrm{mol}\cdot\frac{3}{2}\cdot 8,314\ \mathrm{J/(K\ mol)}\cdot\ln\frac{423}{273} + 2,23\ \mathrm{mol}\cdot 8,314\ \mathrm{J/(K\ mol)}\cdot\ln\frac{2,586}{5,0} = \underline{\underline{0,0\ \mathrm{J/K}}}$$

Alterativ utregning fra at entropien S er en tilstandsfunksjon og bruk av en alternativ isobar + isokor prosess for gass A. Vi lar 0=starttilstand $(p_{A,0}, V_{A,0})$, 2=tilstand med $(p,V) = (p_{A,0}, V_\mathrm{A})$ og 1=sluttilstand (p_A, V_A), der 0-2 er en isobar prosess og 2-1 er en isokor prosess. Temperaturen i mellomtilstanden er

$$T_2 = \frac{p_{A,0}\ V_\mathrm{A}}{nR} = p_{A,0}\ V_\mathrm{A}\cdot\frac{T_{A,0}}{p_{A,0}\ V_{A,0}} = T_{A,0}\cdot\frac{V_\mathrm{A}}{V_{A,0}}$$

Da er

$$\Delta S_\mathrm{A} = \int_0^2\frac{đQ_\mathrm{rev}}{T} + \int_2^1\frac{đQ_\mathrm{rev}}{T} = \int_0^2\frac{C_p\mathrm{d}T}{T} + \int_2^1\frac{C_V\mathrm{d}T}{T} = C_p\ln\frac{T_2}{T_{A,0}} + C_V\ln\frac{T_A}{T_2}$$

Nå er $C_p = C_V + nR$:

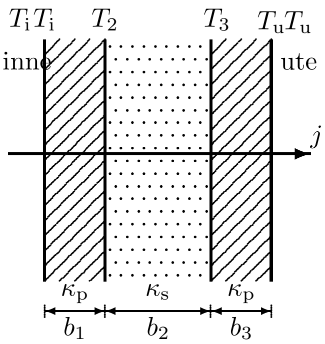
$$\Delta S_\mathrm{A} = nR\ln\frac{T_2}{T_{A,0}} + C_V\ln\left(\frac{T_2}{T_{A,0}}\cdot\frac{T_A}{T_2}\right) = nR\ln\frac{V_\mathrm{A}}{V_{A,0}} + C_V\ln\frac{T_A}{T_{A,0}}, \quad \text{som over.}$$

Oppgave 5.

a. Varmetransport i materialer følger Fouriers varmeledningslikning: $j = -\kappa \mathrm{d}T/\mathrm{d}x$. For det tilfellet at en har stasjonær varmeledning gjennom en plate med tykkelse b gir dette (når varmestrømtettheten regnes positiv og ΔT er temperaturforskjellen mellom platens to sider)

$$j = \frac{\kappa}{b}\Delta T\,.$$

Denne likningen er helt analog med Ohms lov for likestrøm, med ΔT i rollen som elektrisk spenning, j som elektrisk strøm, og b/κ i rollen som elektrisk motstand. En lagdelt vegg er helt analog en seriekopling av elektriske motstander.



Å se bort fra varmeovergangseffekt betyr at paneloverflate inne og ute har samme temperatur som henholdsvis lufta ute og inne, Varmestrømtettheten over hvert enkelt lag kan uttrykkes

$$j = \kappa_\mathrm{p}/b_1 \cdot (T_\mathrm{i} - T_2) \quad (1)$$

$$j = \kappa_\mathrm{s}/b_2 \cdot (T_2 - T_3) \quad (2)$$

$$j = \kappa_\mathrm{p}/b_3 \cdot (T_3 - T_\mathrm{u}) \quad (3)$$

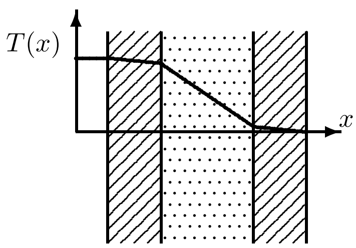
Alle disse varmestrømmer j må være like, ellers ville interne temperaturer endres over tid. Divisjon v hver likning med koeffisienten foran ΔT på høyre side av likningen og deretter sum av alle likninger gir følgende uttrykk, og deretter innsetting av tallverdier:

$$j = \frac{T_\mathrm{i} - T_\mathrm{u}}{b_1/\kappa_\mathrm{p} + b_2/\kappa_\mathrm{s} + b_3/\kappa_\mathrm{p}} \quad (4)$$

$$= \frac{22 - 5}{0,02/0,14 + 0,10/0,047 + 0,025/0,14}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \quad (5)$$

$$= \frac{17}{0,142 + 0,179 + 2,128}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = \frac{17}{2,449}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = \underline{6,94\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}}. \quad (6)$$

b. Temperaturen faller lite gjennom panelveggen med høy varmeledningsevne (dårlig isolasjon) og mye gjennom steinullaget med lav varmeledningsevne. Figur til høyre.



c. Temperaturen T_2 på yttersida av innerpanelet finner vi fra (1). Skriver temperaturene i °C:

$$T_2 = T_\mathrm{i} - j \cdot b_1/\kappa_\mathrm{p} = (22,0 - 6,94 \cdot 0,142)\,^\circ\mathrm{C} = (22,00 - 0,985)\,^\circ\mathrm{C} = \underline{21,0\,^\circ\mathrm{C}} \quad (294\,\mathrm{K})\,.$$

A.Mi. 16. aug. 2012.