TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)

Eksamen TFY4145/FY1001 14. des. 2012. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Rett svar:	E	B	B	C	D	B	C	B	C	B	A

Detaljer om spørsmålene:

a. E. Normalkraft normalt opp fra underlaget, friksjonskraft på langs oppover underlaget, tyngdekrafta loddrett nedover. (Ved konst. fart er tyngdens komponent nedover skråplanet lik friksjonskrafta.)

b. B. De to kulene som ett system: $\sum F = 0 \Rightarrow 2F_{\rm f} = 3mg \Rightarrow F_f = \frac{3}{2}mg$.
Øvre kule som system: $\sum F = 0 \Rightarrow mg + S = F_{\rm f} \Rightarrow S = F_{\rm f} - mg = \frac{3}{2}mg - mg = \frac{1}{2}mg$.
Alternativt kan $\sum F = 0$ for nedre kule brukes.

c. B. Øyemål tilsier at punktet 2 må være massefellespunktet. Kontrollregning: $x_{\rm cm} = (0\cdot 7\,{\rm kg} + 2\cdot 3\,{\rm kg} + 3\cdot 1\,{\rm kg} + 4\cdot 3\,{\rm kg})/14\,{\rm kg}) = 1,5$ og $y_{\rm cm} = (0\cdot 7\,{\rm kg} + 1\cdot 3\,{\rm kg} + 2\cdot 1\,{\rm kg} + 3\cdot 3\,{\rm kg})/14\,{\rm kg}) = 1,0$

d. C. Formelarket gir svaret ved formelen for $x_0(\omega)$ = amplityden til en tvungen svingning, som viser maksverdi ved $\omega = \omega_0$.

e. D. La L være bjelkens lengde. Må først finne S fra tauet: Kraftmomentbalanse om bjelkens venstre punkt: $S\cdot \sin 30^\circ \cdot L = 100\,{\rm N}\cdot L/2 + 150\,{\rm N}\cdot L$ gir $S = 400$ N. $\sum F_x = 0$ gir at krafta på bjelken fra hengslingen er $F_x = S_x = S\cos 30^\circ = 346,4$ N.

f. B. Kollisjonen er fullstendig uelastisk, så (mekanisk) energi E for systemet kan ikke være bevart. Da staven ligger fritt og friksjonsfritt bå bordet er det ingen ytre krefter eller ytre kraftmoment under støtet, da er både bevegelsesmengden p og spinnet L bevart.

g. C Ved adiabatisk ekspansjon faller temperaturen fordi $\Delta U = W < 0$. Areal under pV-kurve og dermed arbeidet er mindre enn for isoterm, uansett temperatur og V_2/V_1.

h. B Ved konst p utvider gassen seg og gjør ytre arbeid $W > 0$. $U = Q - W$ gir at indre energi øker mindre enn 10 J.

i. C Samme varmestrøm gjennom alle lag: $j = \kappa_1\cdot \Delta T_1/\ell = \kappa_2\cdot\Delta T_2/\ell = \kappa_3\cdot\Delta T_3/\ell$. Her er tykkelsen ℓ lik for alle lag. Når κ er liten (god varmeisolator) er ΔT stor.

j. B Kinetisk gassteori: $E_{\rm k} = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}k_{\rm B}T$ lik for begge, medfører at gass i system 2 med minst m har høyest $v_{\rm rms}$.

k. A Netto utstråling: $P = P_{\rm ut} - P_{\rm inn} = A\cdot e\cdot(\sigma T^4 - \sigma T^4_{\rm omg})$. Areal og emissivitet e har ikke noe å bety for forholdet $P_2/P_1 = (T_2^4 - T^4_{\rm omg})/(T_1^4 - T^4_{\rm omg}) = \frac{700^4-273^4}{500^4-273^4} = 4,119$. Temperaturer i kelvin.

Oppgave 2. Kollisjon og harmonisk oscillasjon.

a. Før kollisjonen er stanga i ro og kun prosjektilet har kinetisk energi, E_0, bevegelsesmengde, p_0, og spinn L_0 om aksen A, som er lik henholdsvis

$$\underline{E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2, \qquad p_0 = mv_0, \qquad L_0 = mv_0\frac{d}{2}}\,.$$

b. I et fullstendig uelastisk støt er ikke energien bevart. Under kollisjonen er det ei kraft på stanga fra akslingen i A, derfor er heller ikke bevegelsesmengde bevart for systemet (her bommet mange under eksamen). Denne ytre krafta har derimot null arm om A, altså null ytre kraftmoment og spinnet omkring aksen A er bevart. Fjæra er ikke rukket å bli utstrekt under kollisjonen, derfor ingen kraft eller kraftmoment fra den.

Etter kollisjonen har vi sammenhengen $L = I\omega$, der ω er vinkelhastigheten til stanga. Bevaring $L_0 = L$ gir

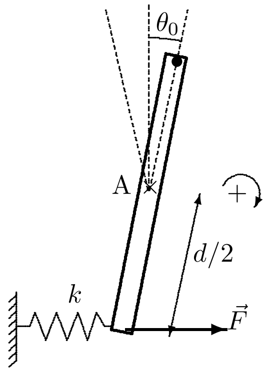
$$mv_0\frac{d}{2} = I\omega = \frac{1}{12}Md^2\omega \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{6mv_0}{Md}.$$

Stangas kinetiske energi umiddelbart etter kollisjonen blir

$$E_1 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}Md^2\left(\frac{6mv_0}{Md}\right)^2 = \underline{\frac{1}{2}mv_0^2\cdot\frac{3m}{M}}.$$

Med $M = 300m$ er
$$E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 \cdot \frac{3}{300} = E_0 \cdot \frac{1}{100},$$
dvs. 99 % av den mekaniske energien går tapt i den uelastiske kollisjonen mellom prosjektilet og stanga.

c. Med små utsving rundt likevekt er endring av fjærlengden
$$x = -\frac{d}{2}\sin\theta \approx -\frac{d}{2}\theta.$$
Ser bort fra forskyvning vertikalt ($\cos\theta \approx 1$). Definerer positiv rotasjonsretning med klokka (se figuren), dvs. θ og ω, samt $\vec{L}$ og $\vec{\tau}$ positiv i den retningen. For $\theta > 0$ presses fjæra sammen og $x < 0$, derfor minustegnet i uttrykket over.



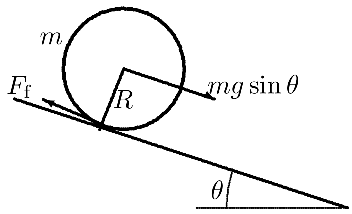
Krafta fra fjæra på stanga er, i følge Hookes lov,
$$F = -kx \approx k\theta\frac{d}{2}.$$
Krafta F har arm $d/2$ (setter $\cos\theta = 1$), og positiv F (mot høyre) gir negativt kraftmoment:
$$\tau = -F \cdot \frac{d}{2} = -k\theta\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}.$$

Newtons 2. lov for rotasjonsbevegelse gir
$$\tau = \dot{L} = I\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow \quad -k\theta\frac{d^2}{4} = \frac{1}{12}Md^2\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow \quad \underline{\ddot{\theta} + \frac{3k}{M}\theta = 0.}$$
Dette er som oppgitt svingelikning $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ med $\omega_0 = \sqrt{3k/M}$. Svingeperioden blir
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{M}{3k}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3,00\,\mathrm{kg}}{3\cdot 1,00\cdot 10^3\,\mathrm{N/m}}} = \underline{0,20\,\mathrm{s}}.$$

Oppgave 3. Kule.

a. Grensa til gliing er kjennetegnet ved at friksjonskrafta er sitt maksimale: $F_\mathrm{f} = \mu F_\mathrm{N} = \mu mg\cos\theta$. Vi regner på grensetilfellet og bruker derfor denne F_f i regningen som skal gi løsningen $\theta = \theta_\mathrm{max}$. Vi må finne uttrykk for translasjonsakselerasjon a og rotasjonsakselerasjon α og kombinere med rullebetingelsen $v = R\omega$ eller $a = R\alpha$.

Newtons lov for translasjon gir akselerasjon a (positiv nedover skråplanet):
$$ma = mg\sin\theta - F_\mathrm{f} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad a = g\cos\theta\,(\tan\theta - \mu) \qquad (1)$$
Newtons lov for rotasjon gir vinkelakselerasjon α (positiv for rulling nedover skråplanet):
$$I\,\alpha = F_\mathrm{f}R \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{F_\mathrm{f}R}{I} = \frac{\mu mg\cos\theta\,R}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{\mu g\cos\theta}{R}, \qquad (2)$$



der vi har brukt treghetsmoment for kule.

Rullebetingelsen $a = R\,\alpha$ med innsatt a og α fra likn. (1) og (2) gir
$$g\cos\theta\,(\tan\theta - \mu) = \frac{5}{2}\cdot\mu g\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \left(1 + \frac{5}{2}\right)\mu = \frac{7}{2}\mu \quad \text{eller:} \quad \underline{\theta_\mathrm{max} = \arctan\left(\frac{7}{2}\mu\right)}.$$
Ved $\theta > \theta_\mathrm{max}$ vil kula rutsje.

b. Med $\mu = 1/4$ er $\theta_\mathrm{max} = \arctan\left(\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{4}\right) = 41,2^\circ$. Vi har dermed verifisert at kula rutsjer, idet $45^\circ > \theta_\mathrm{max}$.

Ved rutsjing er også friksjonskrafta $F_\mathrm{f} = \mu mg\cos\theta$ slik at uttrykkene for a og α ovenfor fortsatt er gyldige, henholdsvis likn. (1) og (2). Dette gir
$$x = \frac{a}{\alpha R} = \frac{g\sin\theta - \mu g\cos\theta}{\frac{5}{2}\,\mu g\cos\theta} = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{\mu}\tan\theta - 1\right) = \frac{2}{5}\cdot(4\cdot 1 - 1) = \underline{\frac{6}{5} = 1,20.}$$

Oppgave 4. Termodynamikk.

a. Antall mol fra ideell gasslov. Trykket 1 atm = 101300 N/m^2 er oppgitt i formelliste.

$$n_\mathrm{A} = n_\mathrm{B} \equiv n = \frac{p_{\mathrm{A},0}V_{\mathrm{A},0}}{RT_{\mathrm{A},0}} = \frac{101300\ \mathrm{N/m^2} \cdot 5,00 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3}}{8,314\ \mathrm{J/(K\ mol)} \cdot 273\ \mathrm{K}} = 2,232\ \mathrm{mol} = \underline{2,23\ \mathrm{mol}}$$

b. Kammer B er varmeisolert slik at kompresjonen i B er adiabatisk. Bruker derfor adiabatlikningen for p og V for gassen i B, med (oppgitt) $\gamma = \frac{5}{3}$.

$$p_\mathrm{B}V_\mathrm{B}^\gamma = p_{\mathrm{B},0}V_{\mathrm{B},0}^\gamma \quad \Rightarrow \quad V_\mathrm{B} = V_{\mathrm{B},0} \cdot \left(\frac{p_{\mathrm{B},0}}{p_\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_{\mathrm{B},0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{5}} = V_{\mathrm{B},0} \cdot 0,5173 = 2,586 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3} = \underline{2,59 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3}}$$

Totalvolum er konstant slik at V_A øker like mye som V_B avtar:

$$V_\mathrm{A} = (V_{\mathrm{A},0} + V_{\mathrm{B},0}) - V_\mathrm{B} = 2 \cdot 5,00 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3} - 2,586 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3} = 7,414 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3} = \underline{7,41 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3}}$$

c. Betrakt totalsystemet A+B, dette gjør intet ytre arbeid da totalvolumet er konstant. Ved bruk av 1. lov på totalsystemet får vi da:

$$đQ = \mathrm{d}U_\mathrm{tot} + đW_\mathrm{tot} = \mathrm{d}U_\mathrm{A} + \mathrm{d}U_\mathrm{B} + 0\,.$$

For ideell gass er $\Delta U = n\,C_V \Delta T$ der enatomig ideell gass har $C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}R = 12,47\ \mathrm{J/(K\,mol)}$. (Skulle du ikke huske dette kan du bruke oppgitt $\gamma = \frac{5}{3}$ fra formelark til å finne at ant. frihetsgrader er $n_\mathrm{f} = 3$ og at $C_V = \frac{1}{2}n_\mathrm{f}R$.) Dermed er

$$\begin{aligned}
Q &= \Delta U_\mathrm{A} + \Delta U_\mathrm{B} = n\,C_V(T_\mathrm{A} - T_{\mathrm{A},0}) + n\,C_V(T_\mathrm{B} - T_{\mathrm{B},0}) \\
&= 2,232\ \mathrm{mol} \cdot 12,47\ \mathrm{J/(K\,mol)} \cdot (1214 - 273)\ \mathrm{K} + 2,232\ \mathrm{mol} \cdot 12,47\ \mathrm{J/(K\,mol)} \cdot (423,5 - 273)\ \mathrm{K} \\
&= 26,19\ \mathrm{kJ} + 4,19\ \mathrm{kJ} = \underline{30,38\ \mathrm{kJ}}.
\end{aligned}$$

Kunne også betraktet system A: $Q = Q_\mathrm{A} = \Delta U_\mathrm{A} + W_\mathrm{A}$. Men W_A er litt ekkel å integrere, men men finnes enkelt fra: $W_\mathrm{A} = -W_\mathrm{B} = \Delta U_\mathrm{B}$ (fordi adiabatisk prosess i B), og vi ender opp med samme likningen som over.

d. Prosessen i B er reversibel og adiabatisk, da er

$$\underline{\Delta S_\mathrm{B} = 0}$$

For kammer A er det enkleste er å bruke formel for entropi S for ideell gass fra formelarket:

$$\Delta S_{12} = nC_V \ln\frac{T_2}{T_1} + nR\ln\frac{V_2}{V_1}$$

som for kammer A gir

$$\Delta S_\mathrm{A} = nC_V \ln\frac{T_\mathrm{A}}{T_{\mathrm{A},0}} + nR\ln\frac{V_\mathrm{A}}{V_{\mathrm{A},0}}$$

med tallverdier

$$\Delta S_\mathrm{A} = 2,232\ \mathrm{mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8,314\ \mathrm{J/(K\ mol)} \cdot \ln\frac{1214}{273} + 2,232\ \mathrm{mol} \cdot 8,314\ \mathrm{J/(K\ mol)} \cdot \ln\frac{7,414}{5,00} = \underline{48,8\ \mathrm{J/K}}$$

Alternativ beregning fra definisjonen av ΔS: Idet entropien S er en tilstandsfunksjon, kan vi beregne ΔS_A via enhver valgt prosess med samme start/slutt. Med 0=starttilstand $(p_{\mathrm{A},0}, V_{\mathrm{A},0})$ og 1=sluttilstand $(p_\mathrm{A}, V_\mathrm{A})$ velger vi en mellomtilstand 2=$(p_{\mathrm{A},0}, V_\mathrm{A})$. Da er $0 \to 2$ en isobar prosess (øker volumet $V_{\mathrm{A},0} \to V_\mathrm{A}$) og $2 \to 1$ en isokor prosess (øker trykket $p_{\mathrm{A},0} \to p_\mathrm{A}$). Temperaturen i mellomtilstanden er

$$T_2 = \frac{p_{\mathrm{A},0}\,V_\mathrm{A}}{nR} = p_{\mathrm{A},0}\,V_\mathrm{A} \cdot \frac{T_{\mathrm{A},0}}{p_{\mathrm{A},0}\,V_{\mathrm{A},0}} = T_{\mathrm{A},0} \cdot \frac{V_\mathrm{A}}{V_{\mathrm{A},0}}$$

Da er

$$\Delta S_\mathrm{A} = \int_0^2 \frac{đQ_\mathrm{rev}}{T} + \int_2^1 \frac{đQ_\mathrm{rev}}{T} = \int_0^2 \frac{n\,C_p\mathrm{d}T}{T} + \int_2^1 \frac{n\,C_V\mathrm{d}T}{T} = n\,C_p \ln\frac{T_2}{T_{\mathrm{A},0}} + n\,C_V \ln\frac{T_\mathrm{A}}{T_2}$$

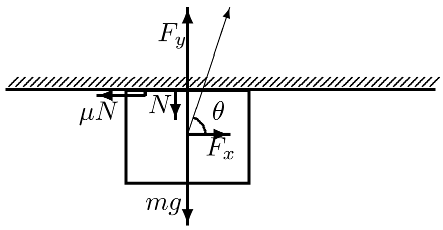
Nå er $n\,C_p = n\,C_V + nR$:

$$\Delta S_\mathrm{A} = nR\ln\frac{T_2}{T_{\mathrm{A},0}} + n\,C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_{\mathrm{A},0}} \cdot \frac{T_\mathrm{A}}{T_2}\right) = nR\ln\frac{V_\mathrm{A}}{V_{\mathrm{A},0}} + n\,C_V\ln\frac{T_\mathrm{A}}{T_{\mathrm{A},0}}$$

som ovenfor.

Oppgave 6.

a. Takkloss.



Alle kreftene som virker på blokken er tegnet inn i figuren. Skyvkrafta F dekomponert i horisontal komponent og vertikal komponent. Normalkrafta N fra taket på blokken virker nedover. Newton 1 vertikalt gir

$$N + mg = F_y \qquad \Rightarrow \qquad N = F_y - mg.$$

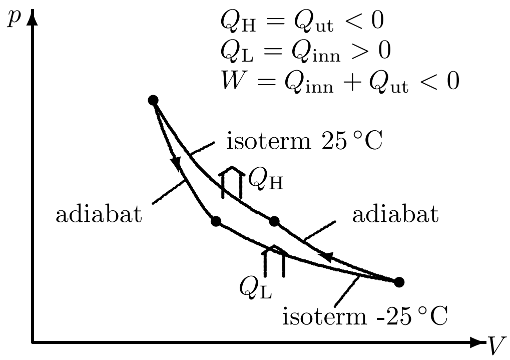
Skal klossen holde seg i taket må $F_y > mg$. Newton 2 horisontalt:

$$ma = F_x - \mu N \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{F_x - \mu\,(F_y - mg)}{m}$$

Med $F_x = F\cos\theta$ og $F_y = F\sin\theta$ og $\theta = 70°$ blir akselerasjonen

$$a = \frac{F\cos\theta - \mu F\sin\theta}{m} + \mu g = \frac{32,49\,\mathrm{N}}{5,00\,\mathrm{kg}} - 0,400\cdot\frac{89,27\,\mathrm{N}}{5,00\,\mathrm{kg}} + 0,400\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{3,28\,\mathrm{m/s^2}}.$$

b. Carnot kjølemaskin.



Nedre isoterm ved T_L = (273-25) K = 248 K. Øvre isoterm ved T_H = (273+25) K = 298 K. Kjølemaskin: Prosessretning mot klokka (må angis), varme inn (ut fra fryseboksen) ved den nedre isotermen, varme ut (til omgivelsene) ved den øvre isotermen.

Kjølefaktor (effektfaktor) er definert $\eta_\mathrm{K} = \dfrac{Q_\mathrm{L}}{|W|}$ som for Carnot-maskin er lik (oppslag i formelliste er godkjent)

$$\eta_\mathrm{K,C} = \frac{T_\mathrm{L}}{T_\mathrm{H} - T_\mathrm{L}} = \frac{248}{50} = 4,96 = \underline{5,0}.$$

c. Varmeledning.

Fouriers lov for varmeledning er oppgitt: $\dot{Q} = \dfrac{\kappa A}{\ell}\Delta T = \dfrac{1}{R}\Delta T$. For kopperstaven er κ, ℓ og A oppgitt og første uttrykk for $\dot{Q}$ brukes. For hver av reservoarene er varmeresistansen R oppgitt og andre uttrykk for $\dot{Q}$ brukes. Ved stasjonære forhold er $\dot{Q}$ konstant og temperaturgradienten gjennom kopperstaven er konstant. Med tverrsnitt $A = \pi r^2 = \pi(10\cdot 10^{-3})^2\ \mathrm{m}^2$ får vi

$$\dot{Q}_\mathrm{Cu} = \frac{\kappa A}{\ell}\Delta T = \frac{400\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K\cdot m}}\cdot 314\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2}{0,500\ \mathrm{m}}\cdot 100\ \mathrm{K} = 25,12\ \mathrm{J/s} = 1507\ \mathrm{J/min}.$$

I tillegg overføres varme fra omgivelsene til det kalde reservoaret:

$$\dot{Q}_\mathrm{omg,k} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{20,0\ \mathrm{K}}{0,700\ \mathrm{W/K}} = 28,57\ \mathrm{J/s} = 1714\ \mathrm{J/min}.$$

Total varmestrøm inn til det kalde reservoaret er $\dot{Q}_\mathrm{kald} = (1508 + 1714)\ \mathrm{J/min} = 3221\ \mathrm{J/min}$, og denne smelter is:

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}_\mathrm{kald}}{L_\mathrm{sm}} = \frac{3221\ \mathrm{J/min}}{335\ \mathrm{kJ/kg}} = 9,615\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/min} = \underline{9,62\ \mathrm{g/min}}.$$

Varmestrøm fra det varme reservoaret til omgivelser har ingen betydning for svaret.

A.Mi. 9. jan. 2013.