**TFY4115 Fysikk** (MTELSYS/MTTK/MTNANO)

# Eksamen TFY4145/FY1001 12. aug. 2013.
# Løsningsforslag

**Oppgave 1. Flervalgsoppgaver**

| Oppgave: | a | b | c | d | e | f | g | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rett svar: | E | C | C | B | B | D | B | A |

**Detaljer om spørsmålene:**

**a.** E. Normalkraft normalt opp fra underlaget, friksjonskraft på langs oppover underlaget, tyngdekrafta rett nedover.

**b.** C. En massiv sylinder har $I = \frac{1}{2}mR^2$. Kin.energi er $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2(v/R)^2 = \frac{3}{4}mv^2$.

**c.** C. Når kulene henger sammen er dette et fullstendig uelastisk støt, og det vil tapes energi. Under en kollisjon uten ytre krefter er alltid $p$ og $L$ bevart (her er sammenhengen $L = \ell p$ for hver av kulene, der $\ell$ er snorlengden).

**d.** B. Fart til venstre kule *før* støt fra energibevarelse $mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \;\Rightarrow\; v_1^2 = 2gh$. Med $v'$ = fellesfarten etter støtet gir bevaring av bevegelsesmengden: $mv_1 = 2mv'$. Energibevaring *etter* støtet gir: $2mgH = \frac{1}{2}(2m)\,v'^2$, som gir $H = \frac{1}{2}\frac{v'^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{4g} = \frac{1}{2}\frac{2gh}{4g} = \frac{h}{4}$.

**e.** B. Arbeid $W$ = varme inn - varme ut. Effektivitet $e = \frac{W}{Q_{\rm inn}} = \frac{Q_{\rm inn}-Q_{\rm ut}}{Q_{\rm inn}} = \frac{64-42}{64} = 0,34$.

**f.** D. I metta damp er trykket kun avhengig av temperaturen. Om f.eks. volumet øker vil mer væske fordampe og opprettholde trykket.

**g.** B. Ved adiabatisk ekspansjon faller temperaturen fordi $\Delta U = W < 0$. Areal under $pV$-kurve og dermed arbeidet er mindre enn for isoterm, uansett temperatur og $V_2/V_1$.

**h.** A. Ekvipartisjonsprinsippet sier at energien fordeles med $\frac{1}{2}k_{\rm B}T$ per frihetsgrad per molekyl, uansett masse. Per atom blir det derfor like mye (indre) energi $U$ for de to enatomige gassene siden begge har tre frihetsgrader.

**Oppgave 2.**

**a.** I tillegg til kreftene tegnet på figuren i oppgaven virker tyngdekrafta $Mg$ rett nedover midt på stanga. Likevekt i $x$- og $y$-retning gir

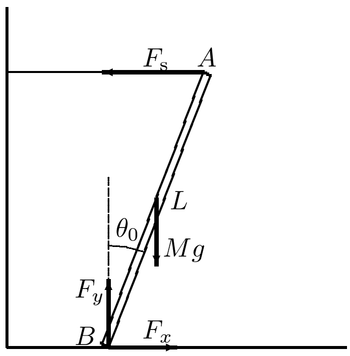
$$F_y = Mg \qquad \text{og} \qquad F_x = F_s$$

Videre har vi rotasjonslikevekt om punktet B:

$$Mg\cdot\frac{L}{2}\cdot\sin\theta_0 = F_{\rm s}\cdot L\cos\theta_0 \qquad\Rightarrow\qquad \underline{F_{\rm s} = Mg\cdot\frac{1}{2}\cdot\tan\theta_0}\,.$$

Da har vi bestemt $F_{\rm s}$, og ergo blir

$$\underline{F_x = F_{\rm s} = Mg\cdot\frac{1}{2}\cdot\tan\theta_0} \qquad \text{og} \qquad \underline{F_y = Mg}\,.$$




**b.** Fordi $F_x$ utgjøres kun av friksjonen, må $F_x = \mu_{\rm s}F_{\rm N} = \mu_{\rm s}F_y = \mu_{\rm s}Mg$. Sammen med uttrykket for $F_x$ over får vi da

$$\mu_{\rm s}Mg = Mg\cdot\frac{1}{2}\cdot\tan\theta_0 \qquad\Rightarrow\qquad \underline{\mu_{\rm s}} = \frac{\tan\theta_0}{2} = \frac{\tan 30^\circ}{2} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}} = \underline{0,289}\,.$$

Dette er minste verdien $\mu_{\rm s}$ kan ha for at stanga ikke skal skli.

**c.** Vi bruker Steiners sats (parallellakseteoremet) til å finne $I$ om endepunktet, som er i avstand $\frac{L}{2}$ fra tyngdepunktet:

$$I = I_{\rm cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \underline{\frac{1}{3}ML^2}\,.$$

Kan også integrere, med $\mathrm{d}m = \mathrm{d}\ell \cdot M/L$:

$$I = \int_0^L \ell^2 \mathrm{d}\ell \cdot M/L = \frac{M}{L} \cdot \left[\frac{1}{3}\ell^3\right]_0^L = \underline{\frac{1}{3}ML^2}\,.$$

**d.** Newtons 2. lov for rotasjon:

$$\tau = I\alpha \qquad \Rightarrow \qquad Mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\theta = \frac{1}{3}ML^2 \cdot \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\alpha = \frac{g}{L} \cdot \frac{3}{2}\sin\theta}\,.$$

**e.** Bevegelsen kan sees på som rein rotasjon om B, slik at kin. energi er kun rotasjonsenergi $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{6}ML^2\omega^2$. Energi ved $\theta_0$ lik energi ved vilkårlig $\theta$:

$$0 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta_0 = \frac{1}{6}ML^2\omega^2 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}$$

Man vil kunne verifisere ved derivasjon at $\dot{\omega} = \alpha$.

## Oppgave 3.

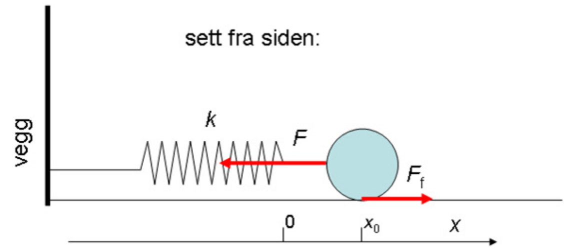
**a.** Fjærkrafta $F = -kx$ er positiv mot høyre (negativ for positiv $x$). Fjærkrafta gir en akselerasjon $a = \ddot{x}$. Newton 2 på akslingen med kuler (masse $2 \cdot M/2 = M$):

$$\sum F = M\ddot{x} = -kx, \qquad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0,$$

som vi gjenkjenner som en harmonisk oscillasjon med $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ og svingetid

$$\underline{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,00\,\mathrm{kg}}{200\,\mathrm{kg/s^2}}} = \underline{0,44\,\mathrm{s}}.$$

**b.** Fjærkrafta virker mot venstre og for at kula skal rotasjonsakselerere fra å være i ro til å rotere mot klokka, må friksjonskrafta $F_\mathrm{f}$ ha retning mot høyre. $F_\mathrm{f}$ virker i kontaktpunktet mot underlaget. $F$ må være større enn $F_\mathrm{f}$ for at kula skal få translasjonsakselerasjon mot venstre.




**c.** Med rotasjonsakselerasjon $\alpha$ og translasjonsakselerasjon $a$ er betingelsen $a = \alpha R$ for rein rulling oppfylt. $F_\mathrm{f}$ er stor nok til at grensa $F_{\mathrm{f,max}} = \mu_s Mg$ ikke er nådd. Newton 2 for rotasjon:

$$\tau = F_\mathrm{f}R = I\alpha = I\frac{a}{R}\,,$$

der treghetsmomentet for de to kulene er $I = 2 \cdot \frac{2}{5}\frac{M}{2}R^2 = \frac{2}{5}MR^2$. Dette gir

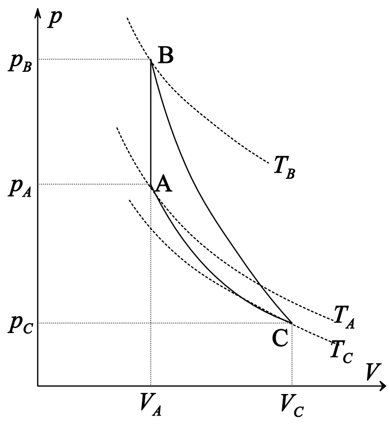
$$F_\mathrm{f}R = \frac{2}{5}MR^2\frac{a}{R} \qquad \Rightarrow \quad \underline{F_\mathrm{f} = \frac{2}{5}Ma}\,.$$

**Oppgave 4.**

**a.**

$$\underline{n} = \frac{p_\mathrm{A} V_\mathrm{A}}{RT_\mathrm{A}} = \frac{101,3\,\mathrm{kPa} \cdot 4,0\,\mathrm{dm}^3}{8,314 \cdot 300\,\mathrm{J/mol}} = 0,16246\,\mathrm{mol} = \underline{0,163\,\mathrm{mol}}$$

Vi får i videre regning ofte bruk for $nR = 1,3507\,\mathrm{J/K}$.




**b.** Enatomig gass har tre translasjonsfrihetsgrader slik at $C_V = \frac{3}{2}R$ og $C_p = C_V + R = \frac{5}{2}R$ og dermed $\underline{\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}}$

Isotermer: $pV = nRT =$ konst. $\Rightarrow p \propto V^{-1}$
Adiabater: $pV^\gamma =$ konst. $\Rightarrow p \propto V^{-\gamma} = V^{-5/3} = V^{-1,667}$
Prosessen $pV^{5/2} =$ konstant $\Rightarrow p \propto V^{-5/2} = V^{-2,5}$

Isotermer har altså altså slakest kurve mens BC-prosessen med $pV^{5/2}$ = konstant har brattest kurve og med adiabaten CA midt imellom. Dette er brukt ved inntegning av prosessene i $pV$-diagrammet samt isotermer med $T_\mathrm{C} < T_\mathrm{A} < T_\mathrm{B}$.

**c.** Fra formelark:

$$\Delta S_\mathrm{AB} = nC_V \ln \frac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}} = \frac{3}{2} \cdot nR \cdot \ln \frac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}} = \frac{3}{2} \cdot 1,3507\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot \ln \frac{450}{300} = \underline{0,821\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}}.$$

eller fra definisjon:

$$\Delta S_\mathrm{AB} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \frac{đQ}{T} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \frac{nC_V \mathrm{d}T}{T} = nC_V \cdot \ln \frac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}}$$

For den reversible, adiabatiske prosess CA er entropiendring null, idet $đQ_\mathrm{rev} = 0$, $\underline{\Delta S_\mathrm{CA} = 0}$.

Fordi $S$ er en tilstandsfunksjon er for den sykliske, reversible, prosessen $\Delta S_\mathrm{tot} = 0$. Derfor må

$$\Delta S_\mathrm{BC} = -\Delta S_\mathrm{AB} = \underline{-0,821\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}}.$$

* Hvis man utsetter beregning av $\Delta S_\mathrm{BC}$ til etter $T_C$ og $V_C$ er beregnet, kan vi bruke fra formelark:

$$\Delta S_\mathrm{BC} = nC_V \ln \frac{T_\mathrm{C}}{T_\mathrm{B}} + nR \ln \frac{V_\mathrm{C}}{V_\mathrm{B}} = 0,1625 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8,314\,\mathrm{J/K} \cdot \ln \frac{217}{450} + 1,3507\,\mathrm{J/K} \cdot \ln 1,6267 = -0,821\,\mathrm{J/K}.$$

**d.** For adiabaten AC har vi

$$p_\mathrm{C} V_\mathrm{C}^\gamma = p_\mathrm{A} V_\mathrm{A}^\gamma \tag{1}$$

og for prosessen BC har vi

$$p_\mathrm{C} V_\mathrm{C}^{5/2} = p_\mathrm{B} V_\mathrm{B}^{5/2}. \tag{2}$$

Likn. (1) dividert med likn. (2) og det at $V_B = V_A$ gir

$$\frac{V_\mathrm{C}^\gamma}{V_\mathrm{C}^{5/2}} = \frac{p_\mathrm{A}}{p_\mathrm{B}} \cdot \frac{V_\mathrm{A}^\gamma}{V_\mathrm{B}^{5/2}} \qquad \Rightarrow \qquad V_\mathrm{C}^{\gamma-5/2} = \frac{p_\mathrm{A}}{p_\mathrm{B}} \cdot V_\mathrm{A}^{\gamma-5/2},$$

altså

$$V_\mathrm{C} = V_\mathrm{A} \cdot \left(\frac{p_\mathrm{A}}{p_\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{\gamma-5/2}} = V_\mathrm{A} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{6}{5}} = V_\mathrm{A} \cdot 1,6267 = 6,507\,\mathrm{dm}^3 = \underline{6,51\,\mathrm{dm}^3}.$$

Da er $\dfrac{V_A}{V_C} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{6}{5}}$ og fra likn. (1) får vi

$$p_\mathrm{C} = p_\mathrm{A} \left(\frac{V_\mathrm{A}}{V_\mathrm{C}}\right)^\gamma = p_\mathrm{A} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6}{5}\cdot\gamma} = p_\mathrm{A} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = p_\mathrm{A} \cdot 0,44444 = \underline{0,444\,\mathrm{atm}}.$$

og

$$T_\mathrm{C} = \frac{p_\mathrm{C} V_\mathrm{C}}{nR} = \frac{0,44444 \cdot 101,3 \cdot 10^3\,\mathrm{Pa} \cdot 6,507 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{1,3507\,\mathrm{Nm/K}} = 216,89\,\mathrm{K} = \underline{217\,\mathrm{K} \quad (-56\,°\mathrm{C})}.$$

* eller

$$T_\mathrm{C} = \frac{p_\mathrm{C} V_\mathrm{C}}{nR} = \frac{p_\mathrm{A} \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_\mathrm{A} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{6}{5}}}{nR} = T_\mathrm{A} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}} = T_\mathrm{A} \cdot 0,72298 = \underline{217\,\mathrm{K}}.$$

**e.** I BC der $pV^{5/2} = p_\mathrm{C}V_\mathrm{C}^{5/2} = p_\mathrm{B}V_\mathrm{B}^{5/2}$ får vi

$$\begin{aligned} W_\mathrm{BC} &= \int_\mathrm{B}^C p\mathrm{d}V = \int_\mathrm{B}^C p_\mathrm{B}\left(\frac{V_\mathrm{B}}{V}\right)^{5/2}\mathrm{d}V = p_\mathrm{B}V_\mathrm{B}^{5/2}\left[-\frac{2}{3}V^{-3/2}\right]_\mathrm{B}^C = p_\mathrm{B}V_\mathrm{B}^{5/2}\cdot\frac{2}{3}\left(V_\mathrm{B}^{-3/2} - V_\mathrm{C}^{-3/2}\right) \\ &= \frac{2}{3}p_\mathrm{B}V_\mathrm{B} - \frac{2}{3}p_\mathrm{C}V_\mathrm{C} = \frac{2}{3}nR\left(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{C}\right) = \frac{2}{3}\cdot 1,3507\,\mathrm{J/K}\cdot(450 - 216,89)\ \mathrm{K} = 209,91\ \mathrm{J} = \underline{210\ \mathrm{J}}. \end{aligned}$$

**f.** Virkningsgraden er definert

$$\eta = \frac{W}{Q_\mathrm{inn}} = \frac{W_\mathrm{BC} + W_\mathrm{CA}}{Q_\mathrm{AB}}.$$

I BC går varme ut. $W_\mathrm{BC}$ er funnet over. For adiabaten CA og isokoren AB finner vi

$$\begin{aligned} W_\mathrm{CA} &= -C_V(T_\mathrm{A} - T_\mathrm{C}) = -\frac{3}{2}\cdot nR(T_\mathrm{A} - T_\mathrm{C}) = -\frac{3}{2}\cdot 1,3507\,\mathrm{J/K}\cdot(300 - 216,89)\ \mathrm{K} = -168,39\ \mathrm{J}. \\ Q_\mathrm{AB} &= C_V\cdot(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A}) = \frac{3}{2}\cdot nR(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A}) = \frac{3}{2}\cdot 1,3507\,\mathrm{J/K}\cdot(450 - 300)\ \mathrm{K} = 303,91\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

$$\underline{\eta = \frac{209,91 - 168,39}{303,91} = \frac{41,52}{303,91} = 0,1366 = 0,137.}$$

* Med de foreslåtte 'reserveverdiene' er $W_\mathrm{CA} = -\frac{3}{2}\cdot 1,3507\,\mathrm{J/K}\cdot(300 - 210,0)\ \mathrm{K} = -182,4\ \mathrm{J}$ og $\eta = \frac{216-182,4}{303,91} = \underline{0,111}$.

## Oppgave 5.

Siden temperaturen på ytterflatene ($T_\mathrm{v}$ og $T_\mathrm{h}$) er gitt, trenger vi ikke ta med varmeovergangen $\alpha\Delta T$ for disse flatene. Med $\kappa_\mathrm{a} = 3\kappa_\mathrm{b}$ og $a = 2b$ kan varmestrøm $j = \kappa\Delta T/\ell$ gjennom hvert lag uttrykkes:

$$\begin{aligned} j_\mathrm{A} &= 3\kappa_\mathrm{b}\cdot(T_\mathrm{v} - T)/2b \\ j_\mathrm{B} &= \kappa_\mathrm{b}\cdot(T - T_\mathrm{h})/b \end{aligned}$$

Ved stasjonære forhold (konstant $T$) er varmestrømmen den samme gjennom begge lag, $j_\mathrm{A} = j_\mathrm{B}$, og dette gir

$$(3/2)\cdot(T_\mathrm{v} - T) = (T - T_\mathrm{h}) \qquad \Rightarrow \quad 3T_\mathrm{v} - 3T = 2T - 2T_\mathrm{h} \qquad \Rightarrow \quad T = \frac{3}{5}T_\mathrm{v} + \frac{2}{5}T_\mathrm{h} = \underline{52\,^\circ\mathrm{C}\quad(325\,\mathrm{K})}.$$

Med kjennskap til elektriske kretser kan man trekke veksler på analogien til Ohms lov: $I = V/R$ med varmestrømtetthet $j$ analog til strømmen $I$ og drivkraft $\Delta T$ analogi til spenning $V$. Dette er seriekopling av to motstander med (termisk) resistans $R = R_\mathrm{A} + R_\mathrm{B} = a/\kappa_\mathrm{a} + b/\kappa_\mathrm{b} = 2b/3\kappa_\mathrm{b} + b/\kappa_\mathrm{b} = 5/3\cdot b/\kappa_\mathrm{b}$. Dermed er

$$j = \frac{\Delta T}{R} = \frac{3}{5}\frac{\kappa_\mathrm{b}}{b}\Delta T \quad \Rightarrow \quad T = T_\mathrm{h} + j\cdot R_\mathrm{B} = T_\mathrm{h} + \frac{3}{5}\frac{\kappa_\mathrm{b}}{b}\Delta T\cdot\frac{b}{\kappa_\mathrm{b}} = T_\mathrm{h} + \frac{3}{5}\Delta T = \underline{52\,^\circ\mathrm{C}}.$$

A.Mi. 16. aug. 2013.