TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)
Eksamen 12. aug. 2015. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Rett svar:	E	D	A	C	A	C	A	B	A	B	A	D	C

Detaljer om spørsmålene:

1-1. E. Normalkraft normalt opp fra underlaget, friksjonskraft på langs oppover underlaget, tyngdekrafta rett nedover.

1-2. D. Hastighet endrer retning, dermed også (sentripetal)akselerasjon mot senturm. Sum av krefter må virke mot sentrum og dermed $\vec{F} \perp \vec{v}$ og ingen arbeid gjøres.

1-3. A. Landingen på karusellen er et uelastisk støt, så (mekanisk) energi E for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bakken, virker på systemet med en kraft når studenten lander. Dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde p være bevart. Men denne kraften fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en akse gjennom karusellens sentrum, slik at spinnet L er bevart.

1-4. C. Når kulene henger sammen er dette et fullstendig uelastisk støt, og det vil tapes energi. Under en kollisjon uten ytre krefter er alltid p og L bevart (her er sammenhengen $L = \ell p$ for hver av kulene, der ℓ er snorlengden).

1-5. A. Bruk Steiners sats: $I = I_{\text{cm}} + Mh^2$.

1-6. C. $T_3 = T_2 \cdot \sin 60°$, $T_1 = T_2 \cos 60°$. Da $\sin 60° > \cos 60°$ er $T_3 > T_1$. Videre må T_2 være størst, f.eks. fra Pythagoras: $T_2^2 = T_1^2 + T_3^2$.

1-7. A. Langs skråplanet virker tyngdens komponent ($mg \sin\theta$, der θ er helningen på skråplanet) nedover, like stor for alle tre, samt friksjonskrafta $f_i (i = 1, 2, 3)$ fra underlaget, retta oppover. Nettokrafta $mg \sin\theta - f_i$ bestemmer tyngdepunktets akselerasjon, som tydeligvis har vært størst for legeme 3, og like stor for 1 og 2. Ergo er f_3 mindre enn $f_1 = f_2$.

1-8. B. Ved adiabatisk ekspansjon faller temperaturen fordi $\Delta U = W < 0$. Areal under pV-kurve og dermed arbeidet er mindre enn for isoterm, uansett temperatur og V_2/V_1.

1-9. A. Ekvipartisjonsprinsippet sier at energien fordeles med $\frac{1}{2}k_{\text{B}}T$ per frihetsgrad per molekyl, uansett masse. Per atom blir det derfor like mye (indre) energi U for de to enatomige gassene siden begge har tre frihetsgrader.

1-10. B. Produktet pV er uendret hvis trykket dobles og volumet halveres. Da er også temperaturen uendret, som igjen betyr at v_{rms} er uendret.

1-11. A. 1.hovedsetning: $\Delta U = Q - W > 0$ og lik for alle. Arbeid W er lik areal under prosesskurva og positiv for alle, derfor må $Q = \Delta U + W > 0$ og størst for prosessen med størst W. Arbeid er lik areal under prosesskurva, størst for prosess 1.

1-12. D. En Carnot-prosess består av to isotermer og to isentropiske prosesser, dvs. med hhv. T konstant og S konstant. Dermed et rektangel i et (S, T)-diagram.

1-13. C. Parallellkopling av varmemotstander er som parallellkopling av elektriske motstander, $\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$ eller $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Utregnet: I hver stav: $\dot{Q}_i = \frac{\kappa_i A_i}{\ell}\Delta T = \frac{\Delta T}{R_i}$ (formelsamling). Temperaturfallet $\Delta T = T_{\text{H}} - T_{\text{L}}$ er det samme i begge stavene. Total varmestrøm $\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$ gir derfor $\frac{\Delta T}{R} = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2}$, altså $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Oppgave 2. Rulling i loop

a. Vi velger høyde $h = 0$ på underlaget. Når kula ruller på underlaget har kulas massesenter en høyde $h_A = r$, i toppunktet C har massesenteret høyden $h_{\text{C}} = 2R - r$. Høydeforskjellen er $\Delta h = h_{\text{C}} - h_A = 2R - 2r = 2R'$. Bevaring av energi gir:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{10}mv_0^2 &= mg2R' + \frac{7}{10}mv_{\text{C}}^2 \\
\Rightarrow \quad v_{\text{C}}^2 &= v_0^2 - 2gR' \cdot \frac{10}{7} = 9{,}0\,\text{m}^2/\text{s}^2 - 2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}200\,\text{m} \cdot \frac{10}{7} = 3{,}394\,\text{m}^2/\text{s}^2,
\end{aligned}$$

der vi har brukt $R' = R - r = 0,200$ m.

$$v_C = \sqrt{3,394}\,\text{m/s} = 1,842\,\text{m/s} = \underline{1,84\,\text{m/s}}.$$

b. Dersom nødvendig sentripetalakselerasjon a_c ved C er større enn tyngdens akselerasjon, må det i tillegg til tyngdekrafta mg være en normalkraft F_N fra underlaget. Vi beregner a_c ved C:

$$a_c = v_C^2/R' = 3,394/0,200\,\text{m/s}^2 = 16,97\,\text{m/s}^2 > 9,81\,\text{m/s}^2,$$

det er derfor en normalkraft og kula har kontakt med underlaget.

Vi kan alternativt beregne verdi for nødvendig normalkraft F_N ut fra Newton 2. Både mg og F_N virker rett nedover.

$$\begin{aligned} ma_c = mv_C^2/R' &= mg + F_N \\ \Rightarrow \quad F_N &= mv_C^2/R' - mg = 0,150\,\text{kg} \cdot 3,394\,\text{m}^2/\text{s}^2/0,200\,\text{m} - 0,150\,\text{kg} \cdot 9,81\,\text{m/s}^2 = 2,545\,\text{N} - 1,472\,\text{N} = 1,07\,\text{N} \end{aligned}$$

En positiv normalkraft F_N viser at det er kontakt med underlaget. Kulas masse m har ingen betydning.

c. Som i b. bruker vi Newton 2, men nå er det bare andelen $mg \sin\theta$ av tyngdekraften som bidrar til sentripetalkrafta:

$$mv_B^2/R' = mg \sin\theta + F_N\,.$$

Kula mister kontakten med underlaget idet $F_N = 0$, dvs.

$$\sin\theta = v_B^2/gR'. \tag{1}$$

Farten v_B er gitt av energibevaring som i a. Ved B er kulas høyde $R' + R' \sin\theta = R'(1 + \sin\theta)$.

$$\frac{7}{10} m v_0^2 = mgR'(1+\sin\theta) + \frac{7}{10} m v_B^2 \tag{2}$$

$$\Rightarrow \quad v_B^2 = v_0^2 - (1+\sin\theta) gR' \cdot \frac{10}{7}. \tag{3}$$

Innsatt i likn. (1):

$$\begin{aligned} \sin\theta &= v_0^2/gR' - (1+\sin\theta) \cdot \frac{10}{7} \\ \sin\theta &= \left(v_0^2/gR' - \frac{10}{7}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{10}{7}} = \left(\frac{(2,5)^2}{9,81 \cdot 0,20} - \frac{10}{7}\right) \cdot \frac{7}{17} = 0,723 \\ \theta &= \underline{46,3^\circ}. \end{aligned}$$

Oppgave 3. Svingning og friksjon

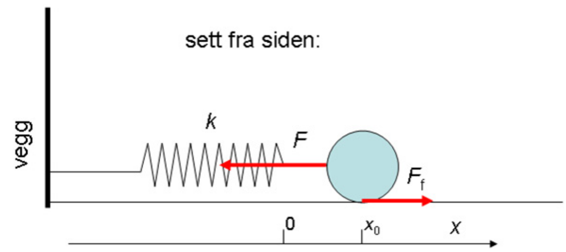
a. Fjærkrafta $F = -kx$ er positiv mot høyre (negativ for positiv x). Fjærkrafta gir en akselerasjon $a = \ddot{x}$. Newton 2 på akslingen med kuler (masse $2 \cdot M/2 = M$):

$$\sum F = M\ddot{x} = -kx, \qquad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{M} x = 0,$$

som vi gjenkjenner som en harmonisk oscillasjon med $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ og svingetid

$$\underline{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,00\,\text{kg}}{200\,\text{kg/s}^2}} = \underline{0,44\,\text{s}}.$$

b. Fjærkrafta virker mot venstre og for at kula skal rotasjonsakselerere fra å være i ro til å rotere mot klokka, må friksjonskrafta F_f ha retning mot høyre. F_f virker i kontaktpunktet mot underlaget. F må være større enn F_f for at kula skal få translasjonsakselerasjon mot venstre.



c. I høyre ytterstilling er farten i ferd med å endre seg fra positiv (høyre) til negativ (venstre), akselerasjonen må derfor ha retning mot venstre. Med positiv retning mot høyre blir da akselerasjonen $-a$, og Newton 2 gir, med fjærkraft $F = -kx_0$ (mot venstre) og $F_\mathrm{f} = +\frac{2}{5}Ma$ (mot høyre):

$$\sum F = F + F_\mathrm{f} = -kx_0 + \frac{2}{5}Ma = -Ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{7}\cdot\frac{kx_0}{M} = \frac{5}{7}\cdot\frac{200\,\mathrm{N/m}\cdot 0,100\,\mathrm{m}}{1,00\,\mathrm{kg}} = \underline{14,3\,\mathrm{m/s^2}}\,.$$

d. Skal rotasjonsakselerasjonen følge med lineær akselerasjon må (fra oppgitt F_f):

$$F_\mathrm{f} = \frac{2}{5}Ma = \frac{2}{5}\cdot 1,00\,\mathrm{kg}\cdot 14,3\,\mathrm{m/s^2} = 5,72\,\mathrm{N}$$

Og med grensetilfellet $F_\mathrm{f} = F_\mathrm{f,max} = \mu_s Mg$ får vi

$$\mu_s Mg = \frac{2}{5}Ma \qquad \Rightarrow \qquad \mu_s = \frac{a}{g}\frac{2}{5} = \frac{14,3}{9,81}\cdot\frac{2}{5} = \underline{0,58}\,.$$

Eller regning med symboler lengst mulig:

$$\mu_s Mg = \frac{2}{5}Ma_\mathrm{max} = \frac{2}{5}M\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{kx_0}{M}. \qquad \Rightarrow \qquad \mu_s = \frac{2}{7g}x_0\cdot\frac{k}{M} = \frac{2}{7\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}}\cdot 0,10\,\mathrm{m}\cdot\frac{200\,\mathrm{N/m}}{1,00\,\mathrm{kg}} = \underline{0,58}\,.$$

Kontroll: I høyre ytterstilling er fjærkraft $= kx_0 = 200\,\mathrm{N/m}\cdot 0,10\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{N}$ mot venstre mens friksjonskraft (funnet over) $F_\mathrm{f} = 5{,}72$ N mot høyre. Dette gir lineær akselerasjon $|a| = \frac{\sum F}{M} = \frac{kx_0 - F_\mathrm{f}}{M} = \frac{14,3\,\mathrm{N}}{1,00\,\mathrm{kg}} = 14,3\,\mathrm{m/s^2}$, som stemmer.

Oppgave 4. Termodynamikk

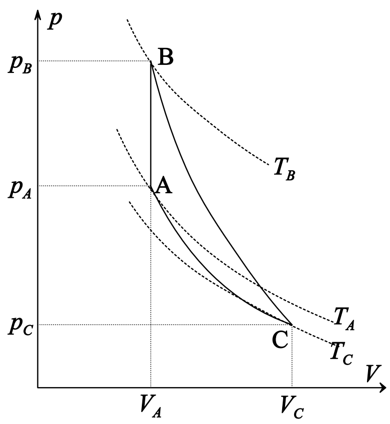
a.

$$\underline{n} = \frac{p_\mathrm{A}V_\mathrm{A}}{RT_\mathrm{A}} = \frac{101,3\,\mathrm{kPa}\cdot 4,0\,\mathrm{dm^3}}{8,314\cdot 300\,\mathrm{J/mol}} = 0,16246\,\mathrm{mol} = \underline{0,163\,\mathrm{mol}}$$

Vi får i videre regning ofte bruk for $nR = 1,3507\,\mathrm{J/K}$.

b. Isotermer: $pV = nRT = $ konst. $\Rightarrow\ p \propto V^{-1}$
Adiabater: $pV^\gamma = $ konst. $\Rightarrow\ p \propto V^{-\gamma} = V^{-5/3} = V^{-1,667}$
Prosessen $pV^{5/2} = $ konstant $\Rightarrow\ p \propto V^{-5/2} = V^{-2,5}$

Isotermer har altså altså slakest prosesskurve mens BC-prosessen med $pV^{5/2} = $ konstant har brattest prosesskurve og med adiabaten midt imellom. Dette er brukt ved inntegning av prosessene i pV-diagrammet. Dette gir også at $T_\mathrm{C} < T_\mathrm{A} < T_\mathrm{B}$, som er brukt ved inntegning av isotermer.



c. Fra formelark:

$$\Delta S_\mathrm{AB} = nC_V\ln\frac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}} = \frac{3}{2}\cdot nR\cdot\ln\frac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}} = \frac{3}{2}\cdot 1,3507\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot\ln\frac{450}{300} = \underline{0,821\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}}.$$

eller fra definisjon:

$$\Delta S_\mathrm{AB} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B}\frac{đQ}{T} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B}\frac{nC_V\mathrm{d}T}{T} = nC_V\cdot\ln\frac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}}$$

For den reversible, adiabatiske prosess CA er entropiendring null, idet $đQ_\mathrm{rev} = 0$, $\underline{\Delta S_\mathrm{CA} = 0}$.

Fordi S er en tilstandsfunksjon er for den sykliske, reversible prosessen $\underline{\Delta S_\mathrm{tot} = 0}$.

d. For adiabaten AC har vi

$$p_\mathrm{C}V_\mathrm{C}^\gamma = p_\mathrm{A}V_\mathrm{A}^\gamma \tag{4}$$

og for prosessen BC har vi

$$p_\mathrm{C}V_\mathrm{C}^{5/2} = p_\mathrm{B}V_\mathrm{B}^{5/2}. \tag{5}$$

Likn. (4) dividert med likn. (5) og det at $V_B = V_A$ gir

$$\frac{V_\mathrm{C}^\gamma}{V_\mathrm{C}^{5/2}} = \frac{p_\mathrm{A}}{p_\mathrm{B}}\cdot\frac{V_\mathrm{A}^\gamma}{V_\mathrm{B}^{5/2}} \qquad \Rightarrow \qquad V_\mathrm{C}^{\gamma-5/2} = \frac{p_\mathrm{A}}{p_\mathrm{B}}\cdot V_\mathrm{A}^{\gamma-5/2}\,,$$

altså

$$V_\mathrm{C} = V_\mathrm{A}\cdot\left(\frac{p_\mathrm{A}}{p_\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{\gamma-5/2}} = V_\mathrm{A}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{6}{5}} = V_\mathrm{A}\cdot 1,6267 = 6,507\,\mathrm{dm^3} = \underline{6,51\,\mathrm{dm^3}}.$$

Da er $\dfrac{V_A}{V_C} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{6}{5}}$ og fra likn. (4) får vi

$$p_\mathrm{C} = p_\mathrm{A}\left(\frac{V_\mathrm{A}}{V_\mathrm{C}}\right)^{\gamma} = p_\mathrm{A}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6}{5}\cdot\gamma} = p_\mathrm{A}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = p_\mathrm{A}\cdot 0,44444 = \underline{0,444\,\mathrm{atm}}.$$

og

$$T_\mathrm{C} = \frac{p_\mathrm{C}V_\mathrm{C}}{nR} = \frac{0,44444\cdot 101,3\cdot 10^3\ \mathrm{Pa}\cdot 6,507\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3}{1,3507\,\mathrm{Nm/K}} = 216,89\ \mathrm{K} = \underline{217\ \mathrm{K}\quad (-56\ {}^\circ\mathrm{C})}.$$

* eller

$$T_\mathrm{C} = \frac{p_\mathrm{C}V_\mathrm{C}}{nR} = \frac{p_\mathrm{A}\left(\frac{2}{3}\right)^2 V_\mathrm{A}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{6}{5}}}{nR} = T_\mathrm{A}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}} = T_\mathrm{A}\cdot 0,72298 = \underline{217\ \mathrm{K}}.$$

e. I BC der $pV^{5/2} = p_\mathrm{C}V_\mathrm{C}^{5/2} = p_\mathrm{B}V_\mathrm{B}^{5/2}$ får vi

$$\begin{aligned} W_\mathrm{BC} &= \int_\mathrm{B}^{C} p\mathrm{d}V = \int_\mathrm{B}^{C} p_\mathrm{B}\left(\frac{V_\mathrm{B}}{V}\right)^{5/2}\mathrm{d}V = p_\mathrm{B}V_\mathrm{B}^{5/2}\left[-\frac{2}{3}V^{-3/2}\right]_\mathrm{B}^{C} = p_\mathrm{B}V_\mathrm{B}^{5/2}\cdot\frac{2}{3}\left(V_\mathrm{B}^{-3/2} - V_\mathrm{C}^{-3/2}\right) \\ &= \frac{2}{3}p_\mathrm{B}V_\mathrm{B} - \frac{2}{3}p_\mathrm{C}V_\mathrm{C} = \frac{2}{3}nR\left(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{C}\right) = \frac{2}{3}\cdot 1,3507\,\mathrm{J/K}\cdot(450 - 216,89)\ \mathrm{K} = 209,91\ \mathrm{J} = \underline{210\ \mathrm{J}}. \end{aligned}$$

f. Virkningsgraden er definert

$$\eta = \frac{W}{Q_\mathrm{inn}} = \frac{W_\mathrm{BC} + W_\mathrm{CA}}{Q_\mathrm{AB}}.$$

I BC går varme ut. W_BC er funnet over. Oppgitt: $W_\mathrm{CA} = -168,4$ J. For isokoren AB finner vi

$$\begin{aligned} Q_\mathrm{AB} &= C_V\cdot(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A}) = \frac{3}{2}\cdot nR(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A}) = \frac{3}{2}\cdot 1,3507\,\mathrm{J/K}\cdot(450 - 300)\ \mathrm{K} = 303,91\ \mathrm{J}. \\ \eta &= \frac{209,91 - 168,4}{303,91} = \frac{41,51}{303,91} = 0,1366 = \underline{0,137}. \end{aligned}$$

* Med den foreslåtte 'reserveverdien' er $\eta = \frac{216,0-168,4}{303,91} = \underline{0,157}$.

A.Mi. 31. juli 2015.