Bokmål

Kandidatnr………………..

Studieretning……………...

Side……………………….

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Instituttt for fysikk, NTNU

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Dag W. Breiby
Tlf.: 984 54 213

KONTINUASJONSEKSAMEN I EMNE TFY4125 - FYSIKK

Fredag 13. august 2010
Tid: 0900-1300

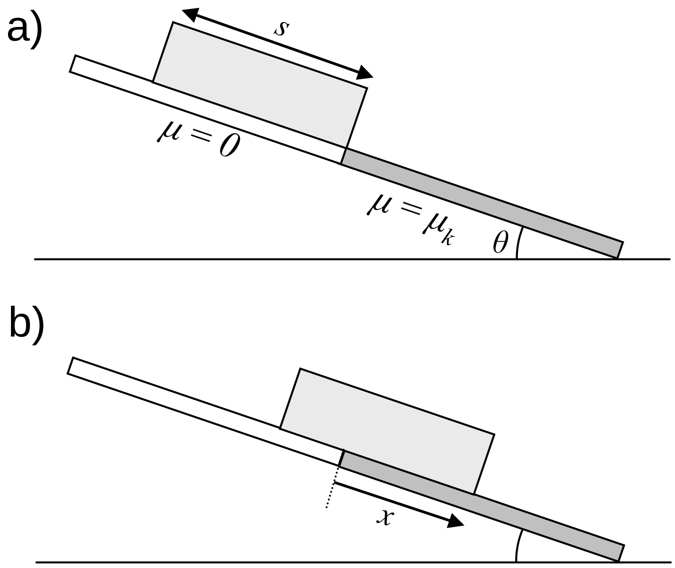
Tillatte hjelpemidler: Kode C:
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne
K. Rottmann: Matematisk Formelsamling
S. Barnett & T.M. Cronin: Mathematical Formulae

Eksamenssettet er utarbeidet av førsteamanuensis Dag W. Breiby og professor Tore Lindmo og består av:

Oppgavetekst til "vanlige" oppgaver 1-5	side 2-6
Vedlegg: Formelark	side 7-9

Hvert delspørsmål a) b) etc. i oppgavene 1-5 teller likt, med til sammen 80 % for alle 14 delspørsmål. De resterende 20 % utgjøres av midtsemesterprøven.

Oppgave 1. Kloss på stripete skråplan



En kloss med masse m og lengde s sklir nedover et skråplan. Skråplanet har et friksjonsfritt område, og et område hvor friksjonskoeffisienten mellom klossen og skråplanet er μ_k. Vi definerer $x = 0$ til å være posisjonen hvor den nederste kanten av klossen ligger på grensen mellom det glatte og det ru underlaget (som vist i a)). Vi ser bort fra komplikasjoner med statisk friksjon i denne oppgaven.

a) Vis at akselerasjonen til en kloss langs et generelt skråplan med friksjonskoeffisient μ_k er gitt ved $a = g\left(\sin\theta - \mu_k \cos\theta\right)$.

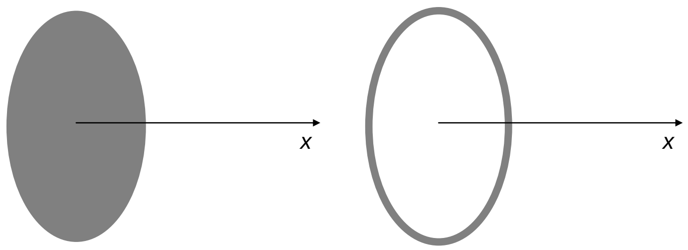
   Begrunn at for $x \in (0, s)$ kan friksjonen modelleres med en effektiv friksjonskoeffisient $\mu_{eff}\left(x\right) = C \cdot x$ og bestem konstanten C.

   Finn også uttrykk for μ_{eff} i områdene $x < 0$, og $x > s$.

b) Klossen holdes i ro og slippes fra $x = 0$. Etter å ha sklidd en strekning $x_0 < s$ antas klossens akselerasjon å være lik 0. Finn et uttrykk for x_0. Tegn fritt legeme kraft-diagram som viser kreftene som virker på klossen ved $x = x_0$.

c) Bruk energibetraktninger til å bestemme den totale strekningen x_{tot} klossen sklir før den stopper. Det forutsettes at $x_{tot} \leq s$. Vis at denne forutsetningen leder til et uttrykk for minimumsverdien av μ_k.

Oppgave 2. Elektrisk potensial fra skiver og ringer



Det kan vises at det elektriske potensialet på aksen i avstand x fra en skive ("disk") med radius R og overflateladningstetthet σ (per arealenhet) er gitt ved

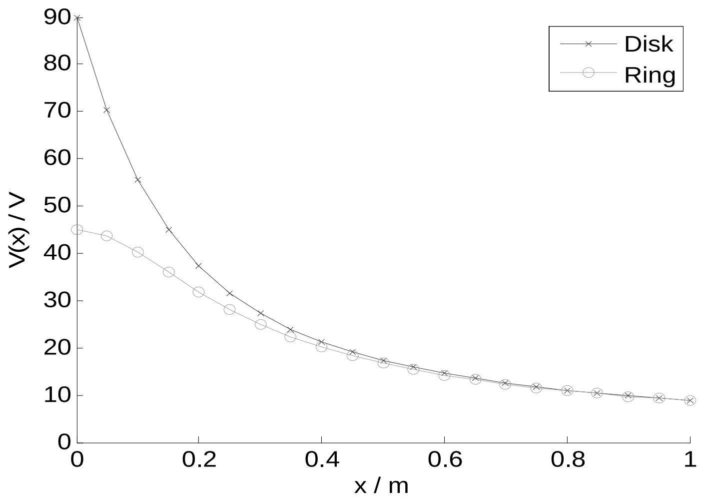
$$V_D = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right), \quad x > 0.$$

Potensialet fra en ring, også med radius R, og ladningstetthet λ (per lengdeenhet) er gitt ved

$$V_R = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{x^2+R^2}}, x \in (-\infty, \infty).$$

I begge tilfeller beskriver ligningene feltet på symmetriaksen i vakuum, og x angir avstanden fra senteret av skiven (eller ringen), som vist i figuren.

a) Skriv om uttrykkene for V_D og V_R med totalladningen Q i stedet for σ og λ.



b) Vis at i grensetilfellet $x \rightarrow \infty$ er V_R gitt ved

$$V_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}$$

Finn også et uttrykk for V_D i grensen $x \rightarrow \infty$.
Kommenter svarene.

Vi antar i resten av oppgaven at disken og ringen har like store ladninger, Q = 1,0 nC, og at R = 0,3 m. Potensialet for skiven og ringen for disse parameterne er plottet i figuren ovenfor. I resten av oppgaven gjør et elektron nytten som testpartikkel.

c) Vi lar potensialet være gitt ved V_R. Finn kraften (uttrykk og tallsvar) som virker på testpartikkelen når den er i posisjon x = 0,2 m.

d) Hvor stort arbeid må utføres for å flytte partikkelen fra x = 0,2 m til x = 1,0 m? Hvis elektronet slippes ved x = 1,0 m, hvor stor hastighet har det når det passerer x = 0,2 m?

Oppgitt: $(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}x$ for små x.

Oppgave 3. Varmekraftmaskin

En prosess med ett mol av en ideell én-atomig gass starter ved A med p_A = 1,0 atm (=1,01325·10^5 Pa) og T_A = 127 ºC, og kjøres gjennom følgende Carnot-prosess ABCDA: isoterm ekspansjon til to ganger det opprinnelige volumet ved B ($V_B = 2V_A$), adiabatisk ekspansjon til C med $V_C = 3V_A$, isoterm komprimering til D, og adiabatisk komprimering tilbake til utgangspunktet A.

a) Finn uttrykk og tallsvar (med SI-enheter) for tilstandsvariablene p_B, p_C, V_A og T_C.

b) Skissér prosessen i et pV-diagram.

c) Prosess-trinnene CD og DA kan beskrives ved ligningene

CD: $$p(V) = p_C \frac{V_C}{V}$$

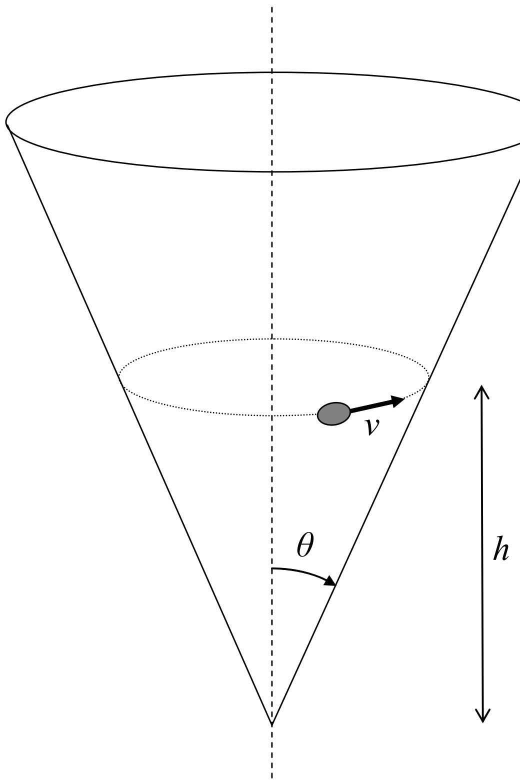
DA: $$p(V) = p_A \left(\frac{V_A}{V}\right)^{\gamma}$$

Bruk dette til å finne uttrykk og tallsvar for p_D og V_D.

d) Finn et uttrykk for Q_{varm}.

e) Regn ut varmekraftmaskinens virkningsgrad, og bruk dette til å finne arbeidet utført per syklus (uttrykk og tallsvar).

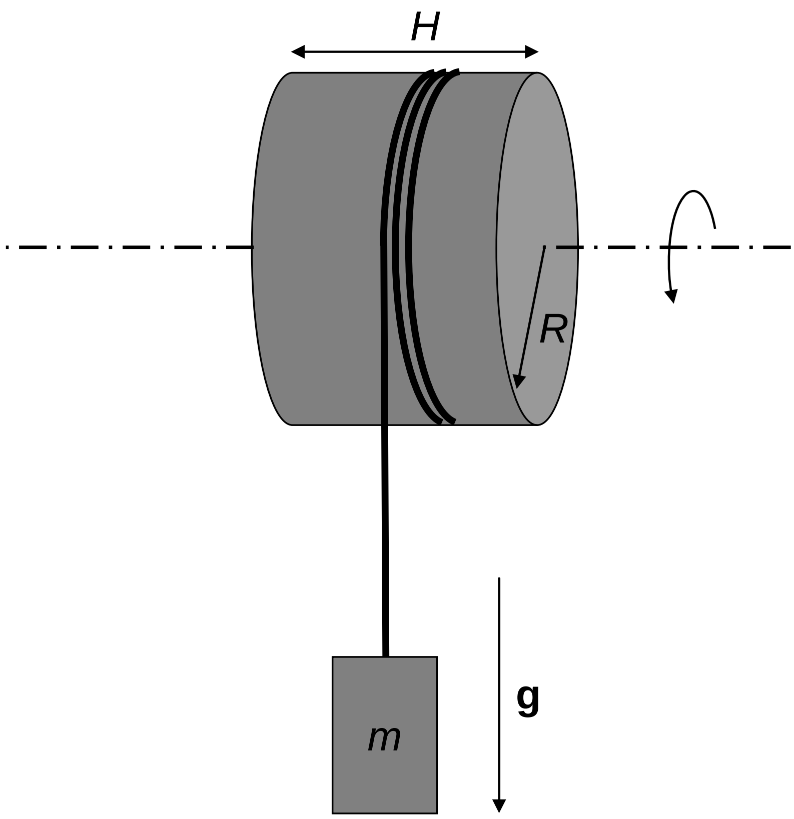
Oppgave 4. Bevegelse i trakt



En trakt har åpningsvinkel θ som vist i figuren. En kloss sklir friksjonsfritt i en sirkel inni trakten. Klossens hastighet v er tilpasset slik at den beveger seg med konstant høyde h.

Hvilke krefter virker på klossen? Sett opp uttrykk for kraftbalanse, og bruk dette til å bestemme forholdet U / K, der U og K er henholdsvis klossens potensielle og kinetiske energi.

Oppgave 5. Fallende lodd, roterende tønne



Et lodd med masse *m* henger i en ideell (masseløs og perfekt tøyelig) snor. Snora er festet i ytterkant av en kompakt homogen sylinder med radius *R* og høyde *H*, som kan rotere om sin senterakse slik figuren viser. Snordraget får sylinderen til å rotere. Snora sklir ikke, og friksjonseffekter neglisjeres.

Gitt at H = 30,0 cm, R = 10,0 cm og m = 18,0 kg, bestem *massetettheten* ρ (masse per volum) til sylinderen, slik at loddet faller med akselerasjon $g/2$.

Vedlegg: Formelliste for emnet TFY4125 Fysikk

Vektorstørrelser er i **uthevet** skrift.

Fysiske konstanter:

Ett mol: $M(^{12}\text{C}) = 12$ g	$1\text{u} = 1.6605 \cdot 10^{-27}$ kg	$N_A = 6.0221 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
$k_B = 1.3807 \cdot 10^{-23}$ J/K	$R = N_A\, k_B = 8.3145$ J mol^{-1} K^{-1}	0°C = 273.15 K
$\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$ C^2/Nm^2	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2	
$e = 1.6022 \cdot 10^{-19}$ C	$m_e = 9.1094 \cdot 10^{-31}$ kg	
$c = 2.9997 \cdot 10^{8}$ m/s	$h = 6.6261 \cdot 10^{-34}$ Js	$g = 9.81$ m/s^2

Mekanikk:

$\dfrac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r},t)$, der $\mathbf{p}(\mathbf{r},t) = m\mathbf{v} = md\mathbf{r}/dt$; $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Konstant a: $v = v_0 + at$; $s = s_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$; $2as = v^2 - v_0^2$

$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$; $K = \frac{1}{2}mv^2$; $U(\mathbf{r})$ = potensiell energi. (tyngde: mgh; fjær: ½ kx^2)

$\mathbf{F} = -\nabla U$; $F_x = -\dfrac{\partial}{\partial x}U(x,y,z)$; $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\mathbf{r}) + \mathit{friksjonsarbeid} = \mathit{konst}.$

Tørr friksjon: $|F_f| = \mu_s \cdot F_\perp$ eller $|F_f| = \mu_k \cdot F_\perp$; Viskøs friksjon: $\mathbf{F}_f = -k_f \mathbf{v}$

Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F} = I\boldsymbol{\alpha}$, der $\mathbf{r}_0$ er valgt ref. punkt og I treghetsmomentet. $dW = \boldsymbol{\tau}\cdot d\boldsymbol{\theta}$

Statisk likevekt: $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0}$.

Massemiddelpunkt (tyngdepunkt): $\mathbf{R} = \dfrac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_i$, $M = \sum_i m_i$

Elastisk støt: $\Sigma_i\, \mathbf{p}_i = \mathit{konstant}$; $\Sigma_i\, E_i = \mathit{konstant}$. Uelastisk støt: $\Sigma_i\, \mathbf{p}_i = \mathit{konstant}$.

Impuls: $\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p}$, $\mathbf{I} = \int \mathbf{F}(t)dt$.

Vinkelhast.: $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{z}}$; $|\boldsymbol{\omega}| = \omega = d\theta/dt$; Vinkelakselerasjon: $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$; $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$

Sirkelbevegelse: $v = r\omega$; Sentripetalakselerasjon $a_r = -v\omega = -v^2/r = -r\omega^2$

Baneaks.: $a_\theta = dv/dt = r\, d\omega/dt = r\alpha$; Rotasjonsenergi: $K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$, der I er treghetsmomentet.

$I \equiv \sum_i m_i r_{\perp i}^{\ 2} \rightarrow \int_V dV \rho r_\perp^{\ 2}$. Akse gjennom massemiddelpunktet: $I \rightarrow I_0$.

Massiv kule: $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$; Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$; Kompakt sylinder / skive: $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$;

Lang, tynn stav: $I_0 = \frac{1}{12} ML^2$; Parallellakseteoremet (Steiners sats): $I = I_0 + Mb^2$
Betingelser for ren rulling: $v = \omega R$; $a = \alpha R$.

Dreieimpuls: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. Spinn: $\mathbf{L}_{egen} = I_0 \boldsymbol{\omega}$. $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L} / dt$.

Hydrostatisk trykk: $p(h) = p_0 + \rho g h$; $m = \rho V$;

Bernoulli, langs strømlinje: $p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = konst.$

Svingninger:

Udempet svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; $T = 2\pi / \omega_0$; $f_0 = 1/T = \omega_0 / 2\pi$

Pendel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$; Fysisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{gmd/I}$; Matematisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{g/l}$

Termisk fysikk:

n = antall mol; $N = nN_A$ = antall molekyler; $\alpha = l^{-1} dl / dT$

$Q_{in} = \Delta U + W$; $C = \dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$; (Varmekapasiteten kan være gitt pr. masseenhet eller pr. mol)

$$PV = nRT = Nk_B T \; ; PV = N\frac{2}{3}\langle K\rangle \; ; \langle K\rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}m\langle v_x^2\rangle \; ; \Delta W = P\Delta V \; ; W = \int_1^2 PdV$$

Molar varmekapasitet: $C_V = \dfrac{3}{2}R$ (en-atomig); $C_V = \dfrac{5}{2}R$ (to-atomig); $C_P = C_V + R$. $dU = C_V \cdot dT$.

For ideell gass: $\gamma \equiv C_P / C_V$. Adiabat: $PV^\gamma = konst.$; $TV^{\gamma-1} = konst.$

Virkningsgrader for varmekraftmaskiner: $\varepsilon = W / Q_v$; Carnot: $\varepsilon = 1 - T_k / T_v$: Otto: $\varepsilon = 1 - 1/r^{\gamma-1}$

Kjøleskap: $\eta_K = \left|\dfrac{Q_k}{W}\right| \xrightarrow{Carnot} \dfrac{T_k}{T_v - T_k}$; Varmepumpe: $\eta_{VP} = \left|\dfrac{Q_v}{W}\right| \xrightarrow{Carnot} \dfrac{T_v}{T_v - T_k}$

Clausius: $\sum \dfrac{\Delta Q}{T} \leq 0$; $\oint \dfrac{\mathrm{d}Q}{T} \leq 0$; Entropi: $\mathrm{d}S = \dfrac{\mathrm{d}Q_{rev}}{T}$; $\Delta S_{12} = \int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}Q_{rev}}{T}$; $S = k_B \ln W$

Entropiendring i en ideell gass (per mol): $\Delta S_{12} = C_V \ln(T_2/T_1) + R\ln(V_2/V_1)$

_____ Elektrisitet og magnetisme: ______________________________

Coulomb: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$; $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$; $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Elektrisk felt: $\mathbf{E} = -\nabla V = -\left\langle \dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y}, \dfrac{\partial V}{\partial z} \right\rangle$; $E_x = -\dfrac{dV}{dx}\hat{\mathbf{x}}$.

Elektrisk potensial: $\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$. $\Delta U = Q\Delta V$

1. Gauss lov $\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint_S E_n dA = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

2. Gauss lov for magnetisme $\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = \oint_S B_n dA = 0$

3. Faradays lov $\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = emf = -\dfrac{d\Phi_m}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\int_S B_n dA = -\int_S \dfrac{\partial B_n}{\partial t} dA$

4. Amperes lov $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \left(I + I_D\right)$, $I_D = \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \int_S \dfrac{\partial E_n}{\partial t} dA$

Fluks: $\Phi_E = \int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_S E_n \cdot dA$; $\Phi_M = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = \int_S B_n \cdot dA$.

Kapasitans: $C \equiv \dfrac{Q}{V}$ For platekondensator: $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$. $U = \dfrac{1}{2}CV^2 = \dfrac{1}{2}Q^2/C$.

Energitetthet: $u_E = \dfrac{U_E}{volum} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$; $u_B = \dfrac{U_B}{volum} = \dfrac{1}{2\mu_0}B^2$

Biot-Savarts lov: $d\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I \dfrac{d\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$. $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

Lorentzkraften: $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$; $d\mathbf{F} = I(d\mathbf{l}\times\mathbf{B})$.