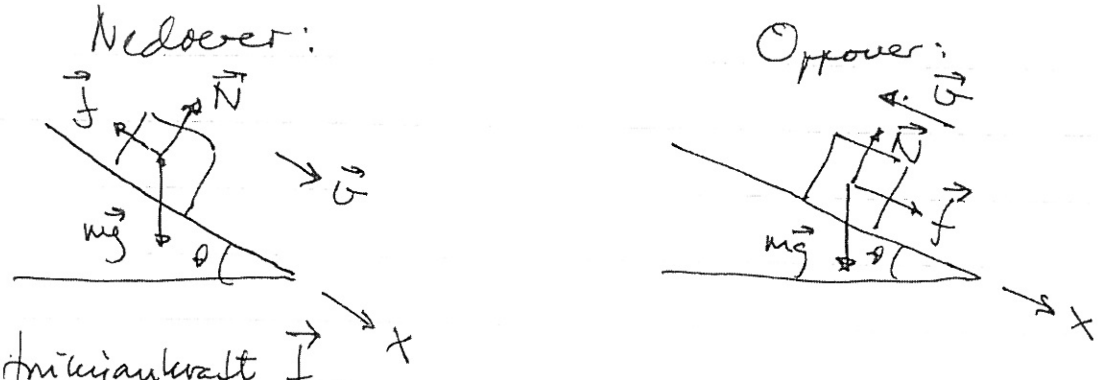
Løsningsforslag Kontinuasjonseksamen TFY4125 6. aug. 2009.

Oppgave 1.

a) Grafen i figur 2b viser $\frac{ds}{dt}$, dvs. <u>hastigheten</u> for vogna på skråplanet, med positiv retning <u>nedover</u> skråplanet.

I pkt A har vogna max hastighet nedover skråplanet, mens hastigheten skifter til max negativ hastighet (dvs oppover) i pkt B. Grafen fra A til B framstiller derfor <u>kollisjonen</u> med veggen nederst på skråplanet, hvor fjæra bremser ned bevegelsen og sender vogna oppover skråplanet etter støtet.

b) Kraft-diagram:



friksjonskraft $\vec{f}$

Nedover: (regner positiv x-retning nedover skråplanet)

$$\sum F_x = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta = m\ddot{x} = ma_{ned}$$

$$\underline{\underline{a_{ned} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)}}$$

Oppover:

$$\sum F_x = mg\sin\theta + \mu_k mg\cos\theta = ma_{opp}$$

$$\underline{\underline{a_{opp} = g(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)}}$$

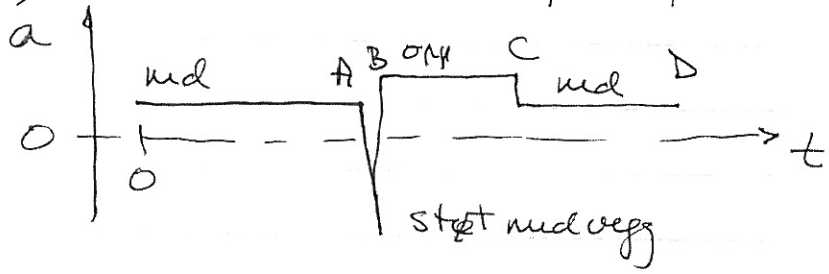
Ser at $a_{opp} > 0$ alltid, dvs virker hele tiden <u>nedover</u>

Vognas bevegelse mellom B og C tilsvarer bevegelsen <u>oppover</u> skråplanet, fra støtet i veggen nederst (B) i banen, til toppen av banen (C) hvor farten ~~hastigheten~~ er redusert til 0, i det vogna snur og begynner å gå nedover.

Mellom C og D er vogna på vei <u>nedover</u> skråplanet.

Stigningen for grafen ~~xxx~~ er mindre i området CD enn i området BC fordi CD er bevegelse nedover, hvor $|a_{ned}| < |a_{opp}|$ fordi nedover virker friksjonskraften og tyngdens komponent langs skråplanet i motsatte retninger, og gir dermed mindre akselerasjon.

c) Skisse av akselerasjonen fra start til pkt D:



Middelakselerasjonen bestemmes som gjennomsnittsverdi fra de intervaller i grafen hvor akselerasjonen er konstant

dvs: a_{ned} fra intervallet O-A og C-D

a_{opp} —"— B-C.

d) Fra uttrykkene: ① $a_{ned} = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$

② $a_{opp} = g(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)$

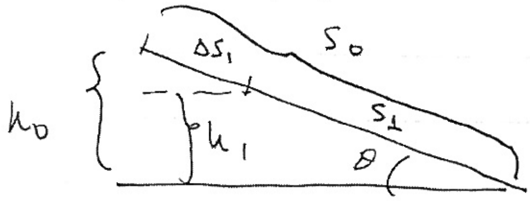
finner vi ved ①+② $(a_{ned} + a_{opp}) = 2g\sin\theta$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sin\theta = \frac{1}{2g}(a_{opp} + a_{ned})}}$$ q.e.d

②−①: $(a_{opp} - a_{ned}) = 2g\mu_k\cos\theta$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_k = \frac{1}{2g\cos\theta}(a_{opp} - a_{ned})}}$$

e) Kinetisk energi i punkt (A) dvs. nederst på skråplanet, før støt med veggen: K_1



$$K_1 = mg\left(h_0 - \mu_k \cos\theta \cdot S_0\right) \qquad h_0 = mg\sin\theta \cdot S_0$$

Kinetisk energi etter støtet $K_2 = eK_1$ tar vogna opp til høyde h_1 (distanse S_1), men noe av energien tapes som friksjonsarbeid

$$\Rightarrow \qquad K_2 = mg\, S_1 \sin\theta + \mu_k mg\cos\theta \cdot S_1 = eK_1$$

Setter inn for K_1: $e\left[\sin\theta - \mu_k\cos\theta\right]S_0 = \left(\sin\theta + \mu_k\cos\theta\right)S_1$

$$\Rightarrow S_1 = e\cdot S_0\,\frac{\sin\theta - \mu_k\cos\theta}{\sin\theta + \mu_k\cos\theta}$$

Dermed:

$$\underline{\underline{\Delta S_1 = S_0 - S_1 = S_0\left[1 - \frac{e(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)}{\sin\theta + \mu_k\cos\theta}\right]}} \quad \text{q.e.d.}$$

f) Situasjon I : $\underline{\mu_k = 0,\ e = 1.}$

Dette gir $\underline{\Delta S_1} = S_0\left[1 - \frac{1 \cdot \sin\theta}{\sin\theta}\right] = \underline{0}$

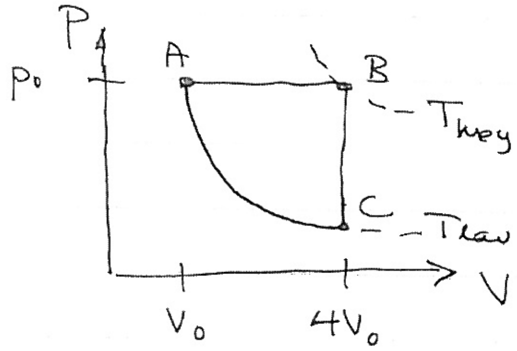
I dette tilfellet er det friksjonsfri bevegelse, og støtet nederst på skråplanet er fullstendig elastisk. Det er derfor ingen friksjonstap for bevegelsesenergien, og vogna kommer opp til utgangspunktet ($\Delta S_1 = 0$) for hver ned-opp tur.

Situasjon II : $\underline{\sin\theta = \mu_k \cos\theta.}$

Dette gir $\underline{\Delta S_1} = S_0\left[1 - \frac{e \cdot 0}{\sin\theta + \mu_k \cos\theta}\right] = \underline{S_0}$

I dette tilfellet motvirker friksjonskraften akkurat tyngdens komponent nedover skråplanet.
Dermed blir $a_{ned} = 0$, og vogna vil bruke uendelig lang tid nedover skråplanet og ikke komme tilbake oppover ($\Delta S_1 = S_0$).

Oppgave 2. Varmekraftmaskin.



Ideell, toatomig gass
$\gamma = C_p/C_v = 7/5$.

AB : Isobar $\Delta p = 0$
BC : Isokor $\Delta V = 0$
CA : Isoterm $\Delta T = 0$

a) Bestem p_C, $T_{høy} = T_B$

Har gitt p, V og T for tilstand A.
Bruker tilstandsligninga (ideell gass) mellom tilstandene A og C:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_C V_C}{T_C}$$

Innsatt kjente størrelser:

$$\frac{p_0 V_0}{T_{lav}} = \frac{p_C \cdot 4V_0}{T_{Lav}} \Rightarrow \underline{\underline{p_C = \frac{1}{4} p_0}}$$

Bruker tilstandsligninga mellom A og B:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_B}$$

Innsatt kjente størrelser:

$$\frac{p_0 V_0}{T_{lav}} = \frac{p_0 4V_0}{T_{høy}} \Rightarrow \underline{\underline{T_{høy} = 4T_{lav}}}$$

Øvre grense for effektiviteten (Carnots teorem)

$$\underline{\underline{\varepsilon_{carnot}}} = 1 - \frac{T_{lav}}{T_{høy}} = 1 - \frac{T_{lav}}{4T_{lav}} = 1 - \frac{1}{4} = \underline{\underline{0{,}75}}$$

b) Arbeidet for en hel syklus:

$$W_{TOT} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}.$$

Generelt: $W = \int_1^2 p\,dV$

Isobar prosess AB: $\underline{W_{AB}} = \int_A^B p\,dV = p_0 (V_B - V_A) = \underline{3p_0V_0}$

Isokor prosess BC: $\underline{\underline{W_{BC}}} = \int_B^C p\,dV = \underline{0}$ fordi $dV = 0$.

Isoterm prosess CA: $W_{CA} = \int_C^A p \cdot dV$ $\quad pV = nRT_{lav} = \text{konstant}$

$$\Rightarrow W_{CA} = nRT_{lav} \int_C^A \frac{dV}{V} = nRT_{lav} \big[\ln V\big]_{V_C}^{V_A} = nRT_{lav} \big[\ln V_0 - \ln 4V_0\big]$$

$$\underline{\underline{W_{CA}}} = nRT_{lav} \ln\left(\frac{V_0}{4V_0}\right) = -nRT_{lav} \cdot \ln 4 = \underline{\underline{-p_0V_0 \ln 4}}$$

$$\underline{\underline{W_{TOT} = p_0V_0 \left[3 - \ln 4\right] > 0}}$$

$W_{TOT} > 0$ også fordi prosessen går med klokka ABC.

c) Gjennomføring av prosessen.

AB: Isobar: Varme opp gassen via flammen, samtidig bevege stempelet utover slik at trykket holdes konstant. Gjennomføre prosessen langsomt, slik at den kan stoppes ved $V_B = 4V_0$, hele tiden med $p = p_0$.

BC: Isokor: Avkjøle gassen via varmeledning til omgivelsene over tid (gassflammen er slukket). Hele tiden holde stempelet i ro ($V = 4V_0$), og vente til $p_C = \frac{1}{4} p_0$

CA: Komprimere gassen ved å trykke stempelet innover, langsomt, slik at temperaturen holdes konstant på T_{rav} ved at varme kontinuerlig avgis til omgivelsene ved varmeledning.

d) <u>Entropiendring</u>

For ideell gass fra tilstand 1 til tilstand 2:

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ_{rev}}{T} = \int_1^2 \frac{1}{T}(dU + dW)_{rev}.$$

$$dQ_{rev} = nC_v dT + p dV$$

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{nC_v\,dT}{T} + \int \frac{p\,dV}{T}$$

$$p \cdot V = nRT$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{V} \cdot nRT$$

$$\Delta S_{12} = nC_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \int \frac{1}{V} \cdot nRT \frac{1}{T}\,dV$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{12} = nC_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}}$$

q.e.d. (ikke spurt etter).

For hver av delprosessene:

AB: $$\Delta S_{AB} = nC_v \cdot \ln\left(\frac{T_{høy}}{T_{lav}}\right) + nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\Delta S_{AB} = nC_v \cdot \ln\left(\frac{4T_{lav}}{T_{lav}}\right) + nR\ln\left(\frac{4V_0}{V_0}\right)$$

$$\Delta S_{AB} = (nC_v + nR)\ln 4$$

$$\underline{C_v + R = C_p = \frac{7}{2}R}$$

$$\underline{C_v = \frac{5}{2}R}$$

$$\Delta S_{AB} = \frac{7}{2}nR \cdot \ln 4$$

$$\underline{nR = \frac{p_0V_0}{T_{lav}}}$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{AB} = \frac{7}{2} \cdot \frac{p_0V_0}{T_{lav}} \cdot \ln 4}}$$

BC: $$\Delta S_{BC} = nC_v \cdot \ln\left(\frac{T_{lav}}{T_{høy}}\right) + nR\ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)$$

$$\Delta S_{BC} = nC_v \cdot \ln\left(\frac{T_{lav}}{4T_{lav}}\right) + \underbrace{nR\ln\left(\frac{4V_0}{4V_0}\right)}_{=0}$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{BC}}} = nC_v \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{-\frac{5}{2}\frac{p_0V_0}{T_{lav}} \cdot \ln 4}}$$

$$\Delta S_{CA} = nC_v \cdot \ln\underbrace{\left(\frac{T_{h\phi}}{T_{lav}}\right)}_{=0} + nR\ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right)$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{CA}}} = nR\ln\left(\frac{V_0}{4V_0}\right) = -nR\ln 4 = \underline{\underline{-\frac{p_0V_0}{T_{lav}}\cdot \ln 4}}$$

$$\Delta S_{syklus} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA}$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{syklus}}} = \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{2} - 1\right)\frac{p_0V_0}{T_{lav}} \cdot \ln 4 \; \underline{\underline{= 0}} \quad \text{q.e.d.}$$

For en sykliske prosess er $\underline{\Delta S = 0}$ for hver komplett syklus, fordi entropien S er en tilstandsvariabel for gassen.

Oppg. 3

a) Sentral skive: $J_M = \frac{1}{2} M R^2$

Liten skive: $J_m = \frac{1}{2} m r^2 + m(2r)^2$ // Steiners sats

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{R}{3}\right)^2 + m\left(2\frac{R}{3}\right)^2$$

$$= mR^2\left(\frac{1}{18} + \frac{4}{9}\right) = mR^2 \frac{1}{2}$$

$$J = J_M + 12 J_m = \frac{1}{2} M R^2 + 12 \frac{1}{2} m R^2$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{M}{2} + 6m\right) R^2}}$$

b) i) $\mu_2 = \mu_1 \Rightarrow \underline{\underline{h = h_0}}$ – Fordi den mekaniske energien er bevart.

ii) $\mu_2 = 0$

$\Rightarrow$ Skiven bevarer rotasjonsenergien den har i bunnpunktet fordi dreiemomentet er null.

$mgh_0 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$, $v = \omega r$ er hastighet i bunnen.

$\cancel{m} g h_0 = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cancel{m} r^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 \Rightarrow \underline{v^2 = \frac{4}{3} g h_0}$

Den kinetiske translasjonsenergien bestemmer den nye høyden:

$\frac{1}{2} \cancel{m} v^2 = \cancel{m} g h$

$$h = \frac{1}{2g} v^2 = \frac{1}{2\cancel{g}} \frac{4}{3} \cancel{g} h_0 = \underline{\underline{\frac{2}{3} h_0}}$$

Oppgave 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	B	E	A	B	D	C	B	E