Løsningsforslag, Eksamen TFY 4125 Juni 2011

Oppg 1 a) $W = \int p(V)\,dV$

Ideell gass: $pV = nRT$. Isoterm: $T = \text{konst.}$

$V_2 = 2V_1$

$$W = \int_{V_1}^{2V_1} \frac{nRT}{V}\,dV = nRT \ln\left(\frac{2V_1}{V_1}\right) = \underline{\underline{p_1 V_1 \ln 2}}$$

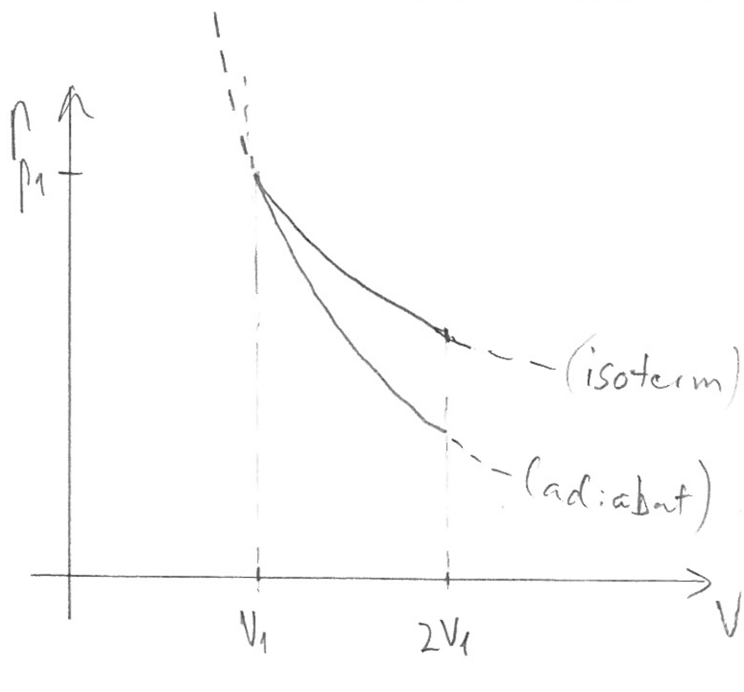
b) Adiabat $pV^\gamma = \text{konst} = p_1 V_1^\gamma$

$$W_{ad} = \int_{V_1}^{2V_1} \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma}\,dV = p_1 V_1^\gamma \frac{1}{-\gamma+1}\Big[V^{-\gamma+1}\Big]_{V_1}^{2V_1}$$

$$= p_1 V_1^\gamma \frac{1}{1-\gamma}\Big[(2V_1)^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}\Big]$$

$$= \frac{1}{1-\gamma} p_1 V_1 \left(2^{1-\gamma} - 1\right) = \underline{\underline{p_1 V_1 \frac{2^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}}}$$

c)



Arbeidet utført ved ekspansjonen er lik arealet under kurvene. Større arbeid gjøres av den isoterme prosessen.

1c) Dette stemmer med beregningene, hvis $\ln 2 > \frac{2^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$.

Dette er oppfylt for $\underline{\gamma > 1.}$

Vi vet:

$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v}$, og $C_p > C_v$. én-atomige gasser: $\gamma \sim \frac{5}{3}$

to-atomige : $\gamma \sim \frac{7}{5}$

OK!

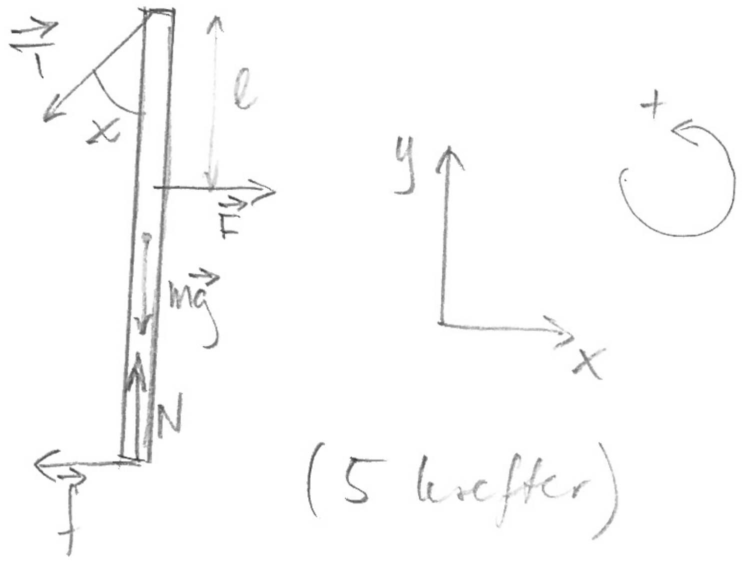
1d) <u>Trykk</u> forstås som molekylenes elastiske støt mot f.eks veggene i en beholder, med dertil følgende "impulsoverføring" ($\Delta\vec{p}$, endring av bev. mengde).

<u>Temperatur</u> er en likevektsparameter, og det kan vises at i en ideell gass er den absolutte temperaturen proporsjonal med gassmolekylenes gjennomsnittlige translasjonsenergi.

Adiabatisk volumutvidelse foregår uten varmeutveksling med omgivelsene. Når gassen utvider seg (og gjør arbeid) isotermt, vil den samtidig oppta varme (For ideell gass er $\Delta U = 0$, og $Q = W$ for isoterm prosess).

I en adiabatisk prosess må energien som brukes til å gjøre arbeid tas fra den indre energien, $\Delta U = -W$, og trykket avtar derfor raskere.

Oppg2 a)



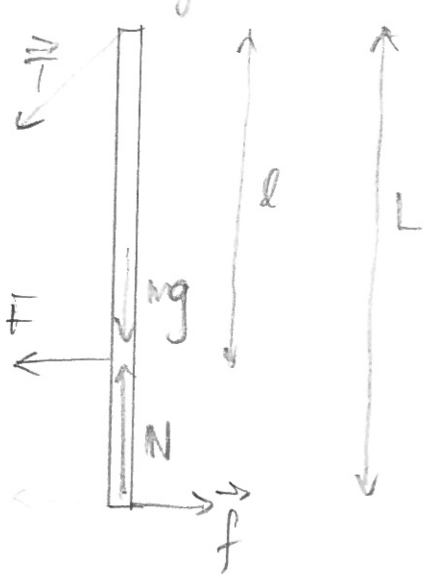
(5 krefter)

Statisk likevekt: $\sum_i \vec F_i = \vec 0$

$$\sum_i \vec \tau_i = \vec 0$$

($\vec F$ er horisontal).

Med $\vec F$ rettet i negativ x-retning:



Vi ser at dette også lar seg gjøre,

for: hvis $l = L$, $|\vec F| = |\vec f| \le \mu_s mg$ og

$|\vec N| = m|\vec g|$, vil $\vec T$ være lik $\vec 0$ og

begge kravene til likevekt er oppfylt (ustabil!)

For $l < L$: umulig! $\sum \vec \tau_i \neq \vec 0$

Oppg 2b)

i) x: $F - f - T\sin\chi = 0 \Rightarrow T = \dfrac{F-f}{\sin\chi}$

ii) y: $N - mg - T\cos\chi = 0$

iii) τ: $Fl - fL = 0$ om topp-pkt $\Rightarrow f = Fr,\ r = \dfrac{l}{L}$

iv) $f \leq \mu_s N$.

i, ii): $N - mg - \dfrac{F-f}{\sin\chi}\cos\chi = 0$

$Fl - \mu_s NL \geq 0 \Rightarrow N \leq \dfrac{Fl}{\mu_s L} = r\dfrac{F}{\mu_s}$

ii) $r\dfrac{F}{\mu_s} - mg - \dfrac{1}{\tan\chi}\left(F - \cancel{\mu_s} r\dfrac{F}{\cancel{\mu_s}}\right) \leq 0$

$rF\tan\chi - \mu_s mg\tan\chi - \mu_s F + \mu_s rF \leq 0$

$F(r\tan\chi - \mu_s + \mu_s r) \leq \mu mg\tan\chi$ (*)

$$F \leq \frac{\cancel{\mu_s} mg\tan\chi}{\frac{1}{\mu_s} r\tan\chi - \cancel{\mu_s} + \cancel{\mu_s} r}$$

$$= \frac{mg\tan\chi}{r\left(\frac{\tan\chi}{\mu} + 1\right) - 1}$$

Oppg 2c) Uttrykket for $|\vec{F}|$ divergerer hvis nevneren går mot null. Dette skjer for verdien $r = r_c$:

$$r_c\left(1 + \frac{\tan\chi}{\mu_s}\right) - 1 = 0$$

$$r_c = \frac{1}{1 + \frac{\tan\chi}{\mu_s}} = \underline{\underline{\frac{\mu_s}{\mu_s + \tan\chi}}}$$

Med tall:

$$r = 1: \quad F \leq \frac{10.0 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}75}{1 \cdot \left(1 + \frac{0{,}75}{0{,}25}\right) - 1}\,\mathrm{N}$$

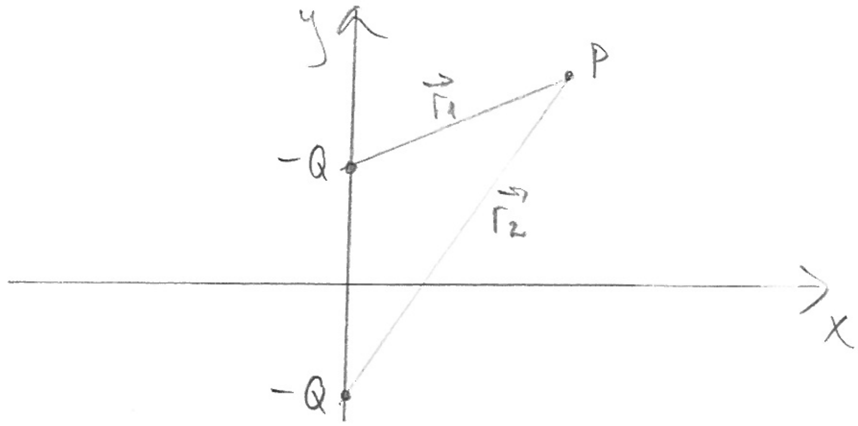
$$\underline{\underline{= 24{,}5\,\mathrm{N}}}$$

$$r = \frac{1}{2} \quad \underline{\underline{F \leq 73{,}6\,\mathrm{N}}}$$

$$r_c = \frac{0{,}25}{0{,}25 + 0{,}75} = \underline{\underline{0{,}25}}$$

For $r \leq r_c$ vil ikke staven skli, "uansett" hvor stor kraft F som anvendes. Spesielt for $r = 0$ ser vi at friksjonskrafta blir null. (Ligningen i oppg. b er kun gyldig for $r > r_c$ fordi ved (*) i utledningen (se forrige side) dividerer vi med $r\tan\chi - \mu_s + \mu_s r$, som for $r < r_c$ er mindre enn 0.

Oppg 3



a) Potensial fra punktladninger: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i}$

I det vilkårlige punktet P med koordinater (x,y)
er $|\vec{r}_1| = \sqrt{x^2+(y-a)^2}$ og $|\vec{r}_2| = \sqrt{x^2+(y+a)^2}$ // Pytagoras.
Med $Q_1 = Q_2 = -Q$ fås

$$V(x,y) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+(y+a)^2}}\right)$$

(Vi har antatt at nullpunktet er gitt ved $\lim_{x,y\to\infty} V(x,y) = 0$.)

Oppg 3b På x-aksen er $y=0$, selvfølgelig.

Dermed: $$V(x) \equiv V(x,0) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

For små x:

$$V(x) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{a\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}} \approx \underline{\underline{\frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)}}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{E}(x) = -\frac{dV}{dx}\hat{x} = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\frac{x}{a^2}\hat{x} = \underline{\underline{\frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x}{a^3}\hat{x}}}$$

evt. $E(x) = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x}{a^3}$. (Kan også finnes ved andre metoder, f.eks. direkte fra Coulombfeltet for punktladning.)

Oppg 3c

(Likevektsposisjon: $\vec{F} = \vec{0}$.

Det er klart at $F_y = 0$.

$F_x = qE(x) = 0$ for $x = 0$.)

Stabil? Ja, vi ser intuitivt at hvis q forskyves litt i positiv x-retning vil det virke en netto gjenopprettende kraft i negativ x-retning. Tilsv. for negativ forskyvning.

Svingning:

$$F = ma = m\ddot{x} = \frac{-Qq}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x}{a^3} \quad \text{(for små svingninger)}$$

$$\ddot{x} + \frac{Qq}{2\pi m\varepsilon_0}\frac{1}{a^3}x = 0$$

som er av typen "$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$"

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Qq}{2\pi m\varepsilon_0}\frac{1}{a^3}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{(2\pi a)^3}\frac{Qq}{m\varepsilon_0}}}}$$

(Også her kan uttrykk for Coulombkraft brukes som alternativ utledning).

Oppg 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	C	E	D	E	B	B	D	B	D