NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Institutt for Fysikk

Eksamensoppgåve i TFY 4125 Fysikk (Kontinuasjonseksamen)

Fagleg kontakt under eksamen: Magnus Borstad Lilledahl
Tlf.: 92851014 / 73591873

Eksamensdato: 13.8.14
Eksamenstid (frå-til): 0900-1300
Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C/Bestemt enkel kalkulator, matematisk formelsamling (Rotman).

Annan informasjon: Eksamenssettet er utarbeida av Magnus Borstad Lilledahl

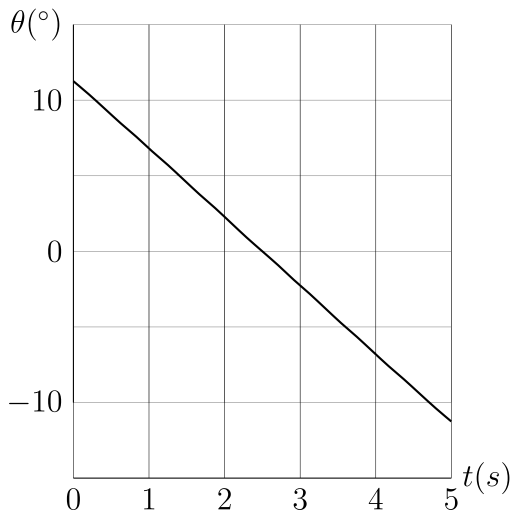
Målform/språk: Nynorsk
Sidetal: 19 sider
Sidetal vedlegg:

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studentane finn sensur i Studentweb. Har du spørsmål om sensuren må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikkje kunne svare på slike spørsmål.

Det er kun flervalgsoppgaver i dette oppgavesettet. Svar markeres på vedlagte skjema bakerst i oppgavesettet. Riv av dette arket og lever med eksamensomslaget. Kun ett kryss. Feil svar, ingen kryss eller flere enn ett kryss gir null poeng. Ingen minuspoeng for feil svar. Andre vedlegg som utregninger, kladd og kommentarer vil ikke bli tillagt vekt. Totalt antall poeng er 62 poeng. For alle fysiske konstanter, bruk antall signifikante siffer som angitt i formelarket på side 22.



Figur 1: (Oppgaver 1) Vinkelen mellom bevegelsesretningen (hastighetsvektoren) og x-aksen (postiv vinkel mot klokken), som funksjon av tid.

Oppgave 1 (4 poeng)

En partikkel beveger seg langs en bane som er gitt av $\mathbf{r} = (5.0 \text{ m/s})t\ \hat{\mathbf{i}} + (et + ft^2)\ \hat{\mathbf{j}}$. Vinkelen mellom partikkelens bevegelsesretning (gitt av $\mathbf{v}$) og x-aksen er gitt av grafen i figur 1. Bestem konstanten e (i m/s) og f (i m/s^2).

A. $e = 2,\ f = 0.8$

B. $e = -1,\ f = 0.3$

C. $e = 3,\ f = -2$

D. $e = 0.3,\ f = 3$

E. $e = 1,\ f = -0.2$

Løsningsforslag:

Ved å derivere posisjonsvektoren finner vi hastighetsvektoren.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (5\text{m/s})\hat{\mathbf{i}} + (e + 2ft)\hat{\mathbf{j}}$$

Hastighetsvektoren bestemmer bevegelsesretningen. Vinkelen θ mellom bevegelsesretningen og x-aksen finnes fra

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{e + 2ft}{5\text{ m/s}}$$

Her har vi to ukjente, e og f. Vi kan lese av to punkter på grafen for å få to likninger for å løse ut for de to ukjente. Velger man $\theta = 0$ får man en enkel likning, leser av at $t = 2{,}5$ s.

$$0 = e + 2f(2.5\text{ s})$$

$$e = -(5.0\text{ s})f$$

Så kan vi eksempelvis velge $\theta = 5°$, leser av at $t = 1{,}4$ s

$$(5\text{ m/s})\tan(5°) = e + 2f(1.4s)$$

Vi kan sett inn for e fra forrige likning og få

$$(5\text{ m/s})\tan(5°) = -(5.0\text{ s})f + 2f(1.4\text{ s})$$

$$f = \frac{-(5\text{ m/s})\tan(5°)}{2{,}2\text{ s}} = -0.2\text{ m/s}^2$$

Vi finner da at $e = 1$ m/s.

Oppgave 2 (2 poeng)

En bil akselerer med en akselerasjon $a(t) = \alpha t - \beta t^3$. Her er konstantene $\alpha = 3.0\text{ m/s}^3$ og $\beta = 0.10\text{ m/s}^5$. Anta at bilen er i ro ved $t = 0$. Hva er farten til bilen ved $t = 3.0$ s?

A. 3.0 m/s B. 7.1 m/s **C. 11 m/s** D. 21 m/s E. 16 m/s

Løsningsforslag:

Integrerer $a(t) = dv(t)/dt$

$$v(3) - v(0) = \int_0^3 \alpha t - \beta t^3 dt$$

$$v(3) = \left[\frac{\alpha t^2}{2} - \frac{\beta t^4}{4}\right]_0^3 = \frac{9}{2}\alpha - \frac{81}{4}\beta = 11\text{ m/s}$$

Oppgave 3 (3 poeng)

For at en kule skal rulle rent (uten å skli) nedover et skråplan må det være en viss friksjon f_r som gir kulen et dreiemoment. Om vi bytter ut en kule med radius R_1 med en kule med radius $R_2 > R_1$ (samme massetetthet slik at massen øker) så vil denne kraften

A. øke.
B. minke.
C. forbli uendret.
D. øke for friksjonskoeffisient over 0.5, ellers minke.
E. minke for friksjonskoeffisient over 0.5, ellers øke.

Løsningsforslag:

Setter opp Newtons andre lov

$$ma = mg\sin\theta - f$$

Vi har at $a = R\alpha$ som er en forutsetning for ren rulling, samt at $fR = I\alpha$, slik at $a = \frac{fR^2}{I}$. Vi får da

$$f = mg\sin\theta - fmR^2/I$$

Løser for f og finner da

$$f = \frac{mg\sin\theta}{mR^2/I + 1}$$

Vi skriver $I = \gamma mR^2$ hvor γ er en konstant som gjelder for kompakt kule. Vi får da

$$f = \frac{\gamma mg\sin\theta}{\gamma + 1}$$

Ettersom massen øker når R øker vil f øke.

Oppgave 4 (4 poeng)

Anta at vi har en kompakt kule med masse m og radius R (treghetsmomentet til en kompakt kule er $I = \frac{2}{5}mR^2$). Kula skal rulle rent (uten å skli) ned et plan som har en friksjonskoeffisient på 0.50. Hva er den størst vinkelen θ skråplanet kan ha før kula begynner å skli?

A. 15° **B.** 60° C. 45° D. 70° E. 33°

Løsningsforslag:

Vi begynner med å Newtons lov for translasjon og rotasjon

$$ma = mg\sin\theta - f$$

$$I\alpha = Rf$$

Ved ren rulling så må vi ha $a = R\alpha$. Vi bruker dette i den andre likningen og får

$$f = I\frac{a}{R^2}$$

Skråplanets vinkel påvirker friksjonskraften så vi løser for den ved å løse andre likning for a og deretter sette den inn i den først som gir

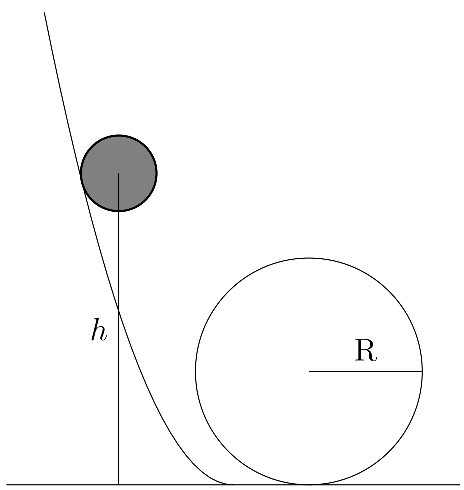
$$f = \frac{mg\sin\theta}{\frac{R^2}{I}+1} = \frac{mg\sin\theta}{1+1/\gamma)}$$

Hvor vi har satt $I = \gamma m R^2$ Den maksimale friksjonskraften vi kan ha er $f = \mu mg\cos\theta$ Vi må altså ha

$$\frac{mg\sin\theta}{1+1/\gamma)} < \mu mg\cos\theta$$

Løser for theta

$$\theta < \tan^{-1}(\mu(1+1/\gamma) = \tan^{-1}(0.5(7/2)) = 60^\circ$$



Figur 2: (Oppgave 5) Kulen (grå) ruller ned bakken og inn i loopen med radius R.

Oppgave 5 (4 poeng)

En kompakt kule ($I = \frac{2}{5}mR^2$) ruller ned en bane som ender i en sirkelformet loop med radius R (se figur 2). Friksjonen er stor nok til å sørge for at kulen ruller rent langs hele banen. Anta at rullingen er perfekt (ingen deformasjon av objektene) slik at friksjonen ikke gjør noe friksjonsarbeid. Hvor høy må h minst være for at kulen ikke skal dette ned når den når toppen av loopen?

A. $88R/19$ B. $16R/5$ C. $33R/7$ D. $14R/9$ **E.** $27R/10$

Løsningsforslag:

Den kinetiske energien til kula i toppen av loopen er gitt av endringen i potensiell energi som er $\Delta U = mg\Delta h$. Den kinetiske energien til kula er gitt av

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

Her har vi brukt at $I = 2/5mr^2$ for en kompakt kule og at $v = \omega r$ for ren rulling. Kreftene som virker i toppen av loopen er $F = mg + N = mv^2/R$. Den minste kraften vi kan ha og fortsatt følge sirkelbanen er når normalkraften er 0 slik at $mg = mv^2/R$ som gir $v^2 = gR$. Setter vi dette inn i uttrykket for den kinetiske energien får vi

$$K = 7/10mv^2 = 7/10mgr = mg\Delta h$$

$$\Delta h = 7R/10$$

Dett gir at $h = 2R + 7R/10 = 27R/1$

Oppgave 6 (2 poeng)

En masse i enden av en idell fjær ($F = -kx$) svinger med en frekvens på 6,0 Hz. Om vi dobler massen, hva blir da svingefrekvensen?

A. 6,0 Hz **B. 4,2 Hz** C. 3,0 Hz D. 1,5 Hz E. 0.6 Hz

Løsningsforslag:

Svingefrekvensen til en fjær er gitt av $f = 1/2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$ Om vi dobler massen ser vi at frekvensen endrer seg med en faktor på $1/\sqrt{2}$. Den nye frekvensen blir altså $6/\sqrt{2} = 4.2$

Oppgave 7 (4 poeng)

Anta at vi har et basseng som har frosset på overflaten. Avstanden fra toppen av islaget til bunnen er 2,0 m. Luften over isen har en temperatur på $-5{,}0°C$ og bunnen av bassenget holder en temperatur på $4{,}0°C$. Anta at vi har en likevektssituasjon (dvs konstant varmestrøm gjennom hele bassengets dybde). Hva er tykkelsen på islaget? Varmeledningskoeffisientene til vann og is er henholdsivs $\kappa_v = 0{,}56$ W/mK og $\kappa_i = 2{,}25$ W/mK. (Hint: Ved grensen mellom vann og is antar vi en temperatur på $0°C$.)

A. 0.34 m B. 0.88 m C. 0.14 m D. 0.66 m **E. 1.7 m**

Løsningsforslag:

Varmestrøm per areal er gitt av

$$H/A = \kappa \frac{dT}{dx}$$

Varmestrømmen må være lik gjennom både is og vann ettersom vi har en likevektssituasjon. Temperaturgradienten i hvert materiale må være konstant ettersom vi har likevekt slik at vi kan erstatte den deriverte med temperatur differansen dividert med tykkelsen, i hvert lag. Vi får da (indekser: b:bunn, g:grenseovergang, l:luft. t: total tykkelse, d: tykkelse av is)

$$\kappa_v (T_b - T_g)/(t - d) = \kappa_i (T_g - T_l)/d$$

Vi løser så denne likningen med hensynn på d

$$d = \frac{t}{1 + \frac{\kappa_v}{\kappa_i} \frac{\Delta T_V}{\Delta T_i}} = \frac{2 \text{ m}}{1 + \frac{0{,}56}{2{,}25} \cdot \frac{4}{5}} = 1{,}66 \text{ m}$$

Tykkelsen av islaget er 1.66 m.

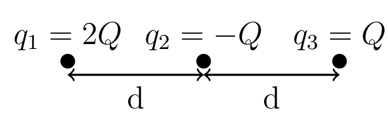
Oppgave 8 (2 poeng)

En astronaut befinner seg plutselig i det tomme verdensrom, langt fra alle galakser. Astronatuen har en temlig dårlig isolert romdrakt slik at draktens overflate holder en temperatur på 20°C. Anta at romdrakten har en emissivitet på $e = 0.5$. Anta at overflatearealet av astronauten er 1.2 m^2. Hvor mye varme mister astronauten i form av stråling per tid?

A. 88 W B. 1.3 W C. 33 W D. 15 kW **E. 0.25 kW**

Løsningsforslag:

$$H = Ae\sigma T^4 = 1.2 \text{ m}^2 \cdot 0.2 \cdot 5.610^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \cdot (293 \text{ K})^4 = 247 \text{ W}$$



Figur 3: Oppgave 9

Oppgave 9 (2 poeng)

Vi har tre partikler som ligger på en rekke med lik avstand d mellom seg (se figur 3).

Partiklene har en ladning $q_1 = 2Q$, $q_2 = -Q$ og $q_3 = Q$. Dersom vi flytter q_3 *litt* mot høyre, hva vil skje med den potensiell energien til systemet?

A. Øker.

B. Minker.

C. Forblir uendret.

D. Kommer an på avstanden d.

E. Elektrostatiske krefter er ikke-konservative og vi kan derfor ikke definere en potensiell energi.

Løsningsforslag:

Vi kan se på kraften som virker på q3. Dersom den virker mot venstre (positiv x-retning mot høyre) vil den potensielle energien øke og visa versa

$$F = kQ^2 \left(-\frac{1}{d^2} + \frac{2}{(2d)^2} \right) \hat{\mathbf{x}} = -\frac{kQ^2}{2d^2} \hat{\mathbf{x}}$$

Vi ser at denne peker mote venstre slik at energien den potensielle energien øker.

Oppgave 10 (2 poeng)

En jernbaneskinne er 10 m lang ved en vintertemperatur på -10°C. Hvor lang er den ved en sommertemperatur på 20°C. Lengdeutvidelseskoeffisienten for stål er $\alpha = 1{,}1 \cdot 10^{-5} K^{-1}$.

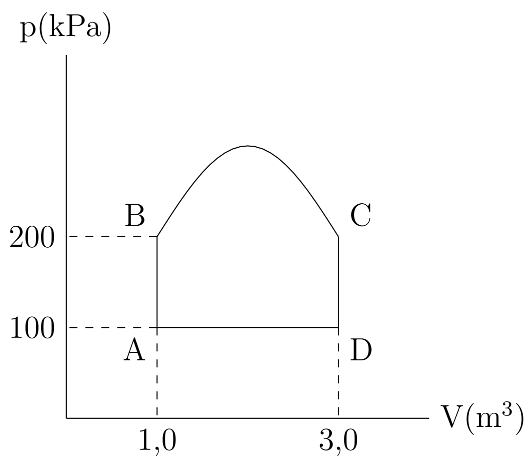
A. 3.3 mm B. 0.14 mm C. 1.7 cm D. 28 mm E. 0.9 mm

Løsningsforslag:

Utvidelsen er gitt av

$$\Delta L = \gamma L \Delta T = 1.1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1} \cdot 10\ \mathrm{m} \cdot 30\ \mathrm{K} = 3.3\ \mathrm{mm}$$

(Red: Det skulle selvsagt stå hvor mye lengere jernbaneskinnen ble)



Figur 4: Termodynamisk prossess som går i retning A-B-C-D-A. Alle prosesser er reversible.

Oppgave 11 (4 poeng)

Figur 4 viser en reversible termodynamisk prosess. Virkegassen er en ideell en-atomig gass. Prossesn fra B til C er beskrevet av følgende likning

$$p(V) = (200\ \mathrm{kPa}) + (100\ \mathrm{kPa}) \sin\left[\pi \frac{V - (1\ \mathrm{m}^3)}{(2\ \mathrm{m}^3)}\right]$$

Hvor stort arbeidet gjøres av gassen i prosessen fra B til C?

A. 0.13 MJ B. 1.3 MJ C. 0.76 MJ **D. 0.53 MJ** E. 2.1 MJ

Løsningsforslag:

$$W = \int p dV$$

$$\int_1^3 a + b \sin\left(\pi \frac{V-1}{2}\right) dV$$

$$\left[aV - b\frac{\cos(\pi(V-1)/2)}{\pi/2}\right]_1^3$$

$$2a - 2b/\pi(\cos(\pi) - 1)$$

$$2a + 4b/\pi = 2\ \mathrm{m}^3 \cdot 200\ \mathrm{kPa} + 4\ \mathrm{m}^3/\pi \cdot 100\ \mathrm{kPa} = 0.53\ \mathrm{MJ}$$

Oppgave 12 (3 poeng)

Hvor mye varme tilføres systemet fra A til B?

A. 0.80 MJ B. 0.24 MJ C. 1.6 MJ **D. 0.15 MJ** E. 1.1 MJ

Løsningsforslag:

Fra ideelle gass loven har vi at $pV = nRT$. Det gir oss at

$$\Delta T = \Delta p V / nR$$

Videre har vi at ($C_v = 3R/2$ for en ideell gass)

$$Q = nC_v\Delta T = n\frac{3}{2}R\Delta T = \frac{3}{2}Delta p V = \frac{3}{2}100\ \mathrm{kPa} \cdot 1\ \mathrm{m}^3 = 0.15\ \mathrm{MJ}$$

Oppgave 13 (3 poeng)

Anta at vi har en ideell lang spole med tverrsnittsareal A. For en ideell lang spole gjelder at magnetfeltet inne i spolen er homogent over tverrsnittet og er gitt av B $= \mu_0 in$, hvor i er strømmen i spolen, og n er tettheten av vindinger (vindinger per lengdeenhet). Utenfor spolen er magnetfeltet neglisjerbart. En leder er tvunnet N ganger rundt spolen. Hva er den gjensidige induktansen mellom spolen og lederen?

A. $M = \mu_0 AN^2/n$

B. $M = \mu_0 A(N - n)$

C. $M = \mu_0 A(N^2 - n^2)/N$

D. $M = \mu_0 AN^{-1}n^2$

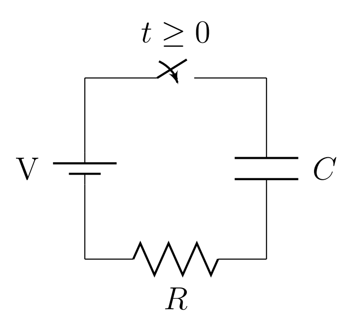
E. $M = \mu_0 ANn$

Løsningsforslag:

Den gjensidige induktansen M er definert av $\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt}$. Hvis vi lar 2 referere til sløyfen har vi fra Faradays lov at den induserte emf er gitt av $\mathcal{E}_2 = -N\frac{d\Theta_2}{dt}$. Vi bruker så definisjonen av fluks $\Theta_2 = \Theta_1 = B_1 A$ til å skrive

$$M = \frac{-\mathcal{E}_2}{\frac{di_1}{dt}} = \frac{N\frac{d\Theta}{dt}}{\frac{di_1}{dt}} = \frac{N_1 A_2 \frac{dB}{dt}}{\frac{di_1}{dt}} = \frac{N_1 A_2 \mu_0 n \frac{di_1}{dt}}{\frac{di_1}{dt}}$$

$$M = NA\mu n_2$$



Figur 5: En RC krets

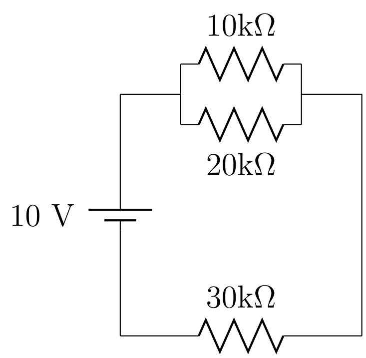
Oppgave 14 (2 poeng)

Anta at vi har kretsen som illustrert i figur 5 . Bryteren lukkes ved $t = 0$. Hva er strømmen gjennom kondensatoren når bryteren har vært lukket lenge?

A. 0 B. V/R C. $V/R + RC$ D. $V/2R$ E. ∞

Løsningsforslag:

Når kretsen har vært lukket lenge vil kondensatoren være ladet opp til spenningen over kondensatoren er den samme som over spenninskilden. Det vil dærmed ikke være noe spenningsfall over motstanden og ikke gå noe strøm i kretsen.



Figur 6: En resistiv krets

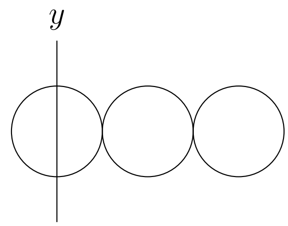
Oppgave 15 (2 poeng)

Hvor stor strøm går gjennom motstanden med en resistans på 30 kΩ i figur 6.

A. 2.9 mA B. 1.8 mA C. 0.56 mA **D. 0.27 mA** E. 0.013 mA

Løsningsforslag:

$$I = U/R = \frac{10 \text{ V}}{(\frac{200}{30} + 30) \text{ k}\Omega} = 0.27\text{mA}$$



Figur 7: (Oppgave 16) Pingpong baller på rekke som roterer rund aksen y

Oppgave 16 (3 poeng)

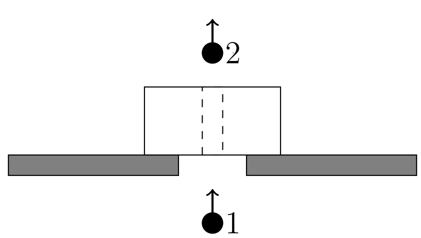
En pingpong ball har en masse m og en radius r. Anta at en enkel pingpong ball som roterer rundt en akse gjennom sentrum kan sees på som et kuleskall som har et treghetsmoment på $I = \frac{2mr^2}{3}$. Anta nå at vi har tre pingpong-baller som er limt sammen på en rekke. Hva er treghetsmomentet til dette objektet rundt y-aksen som går gjennom ballen på enden og er vinkelrett på aksen gjennom alle ballen (se figur 7).

A. 22 mr^2 **B. 12** mr^2 C. 2 mr^2 D. 1/3 mr^2 E. 1/12 mr^2

Løsningsforslag:

Vi kan bruke parallellakseteoremet (Steiners sats) til å finn treghetsmomentet når det er forskjøvet fra rotasjonsaksen. Teoremet sier at $I_d = I_0 + md^2$. Vi får da et treghetsmoment som er gitt av

$$I = 3 \cdot \frac{2mr^2}{3} + m4r^2 + m16r^2 = 22mr^2$$



Figur 8: En kule som går gjennom en kloss

Oppgave 17 (3 poeng)

En kule blir skutt gjennom en trekloss som ligger over et hull i et bord. Kula treffer klossen med en hastighet på 300 m/s og kommer ut med en hastighet på 100 m/s. Anta at klossen flytter seg neglisjerbart før kula har gått igjennom. Kula veier m = 100 g og klossen veier $M = 5.0$ kg. Hvor høyt over bordet vil treklossen løfte seg (figur 8)?

A. 0.30 m **B. 0.82 m** C. 1.3 m D. 2.0 m E. 2.6 m

Løsningsforslag:

Kulas endring i bevegelsesmengde er $\Delta p = m\Delta v$. Fra loven om bevaring av bevegelsesmengde må klossen få en tilsvarende endring i bevegelsesmengde. Dermed har klossen en hastighet på $v = \dfrac{\Delta p}{M}$ og en kinetisk energi $K = 1/2Mv^2$ idet kula går ut. Når klossen når sit høyeste punkt har denne kinetiske energien gått over til potensiell energi. Slik at vi får

$$1/2mv^2 = mgh,$$

dvs

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{m\Delta v^2}{M2g} = 0.9\text{ m}$$

Oppgave 18 (2 poeng)

Hvor stort volum opptar en mol av en ideell gass ved en temperatur på 300 K et trykk på 0.50 MPa.

A. $5.0 \cdot 10^{-3}$ m^3

B. $3.0 \cdot 10^{-6}$ m^3

C. $3.5 \cdot 10^{-2}$ m^3

D. $7.3 \cdot 10^{-4}$ m^3

E. $1.2 \cdot 10^{-5}$ m^3

Oppgave 19 (2 poeng)

En bil (2000 kg) treffer en elg (500 kg) i 80 km/t, anta at rett etter støttet fortsetter bilen og elgen i 60 km/t som ett objekt. Hvor mange prosent av bilens kinetiske energi har gått til deformering av elg og bil?

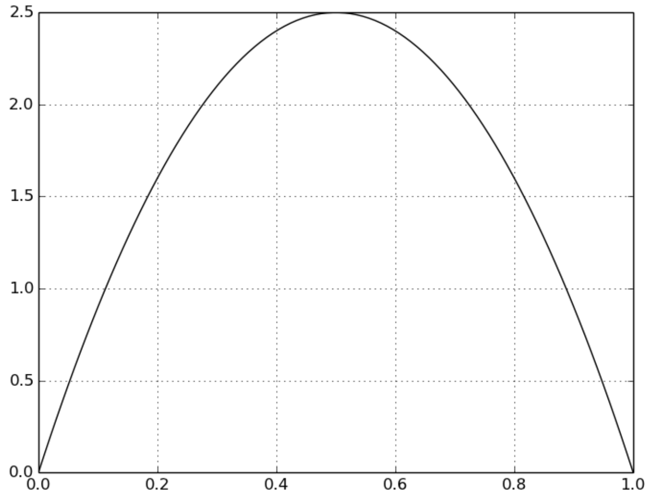
A. 10 % B. 15 % C. 20 % **D. 30 %** E. 35 %

Løsningsforslag:

La K_1 være kinetiske energien til bilen og K_2 kinetiske energien til bilen og elgen etter kollisjonen.

$$r = \frac{K_1 - K_2}{K_1} = 0.3$$

30 % av energien har gått til deformasjon



Figur 9: Kinetiske energi(i Joule) som funksjon av posisjon (i meter)

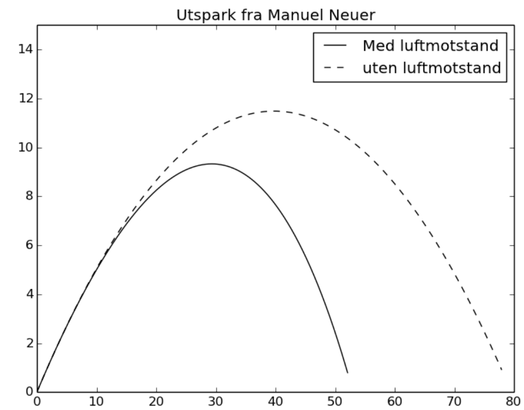
Oppgave 20 (3 poeng)

En kloss er festet til en fjær som sitter i en vegg og kan bevege seg friksjonsløst langs et horisontalt bord. Anta en ideell fjær ($\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$). Klossen blir påvirket av en ekstern kraft F_x. Figur 9 viser den kinetiske energien til klossen som funksjon av posisjon, hvor $x = 0$ i fjærens likevektsposisjon (før kraften F_x virker). Hvor stor er kraften F_x?

A. 1 N B. 2 N C. 5 N **D. 10 N** E. 20 N

Løsningsforslag:

Klossen oppnår maksimal kinetisk energi i punktet hvor $F_x = kd$. Slik at $k = F_x/d$ Vi har den kinetiske energi er gittt av $K = Fd - 1/2kd^2$, Setter inn uttrykke for k og Vi kan løse for F som vi finner er 10 N.



Figur 10: Fotballens bane med og uten luftmsotand

Oppgave 21 (3 poeng)

Manuel Neuer (tysk fotballkeeper) sparker ut en ball fra mål. Ballen har en utgangsfart på 30 m/s, med en vinkel på 30 grader over horisontalen. Ballen blir påvirket av en luftmotstand på $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$. Hvilken av følgende kodesnutter i alternativene nedenfor skal byttes ut med `***` i koden nedenfor for at variablene `x` og `y` gir den riktige banen til fotballen. (se figur 10 for resultat med og uten luftmotstand).

```
import math as mth
import numpy as np
T = 2.7 #Total tid
N = 10000 #Antall datapunkter
h = T/(N-1) #Tidssteg

g = 9.8 #Tyngdens akselerasjon
b = 0.1 #Luftmotstand koeffisient
m = 0.43 #Massen til en fotball
v0 = 30 #utgangsfart
vx = np.zeros(N)
vy = np.zeros(N)
x = np.zeros(N)
y = np.zeros(N)

phi= 30*mth.pi/180
vx[0] = v0*mth.cos(phi)
vy[0] = v0*mth.sin(phi)

for i in range(0,N-1):
    ***
    x[i+1] = vx[i]*h + x[i]
    y[i+1] = vy[i]*h + y[i]
```

A. `vx[i+1] = h*(-b/m*vx[i])`
   `vy[i+1] = h*(-b/m*vy[i]-g)`

B. `vx[i+1] = h*(-b/m*vx[i]) - vx[i]`
   `vy[i+1] = h*(-b/m*vy[i]-g) - vy[i]`

C. `vx[i+1] = h*(-b/m*vx[i]) + h*vx[i]`
   `vy[i+1] = h*(-b/m*vy[i]-g) + h*vy[i]`

D. `vx[i+1] = h*(-b/m*vx[i]) + vx[i]`
   `vy[i+1] = h*(-b/m*vy[i]-g) + vy[i]`

E. `vx[i+1] = h*(-b/m*vx[i]+g) + vx[i]`
   `vy[i+1] = h*(-b/m*vy[i]-g) + vy[i]`

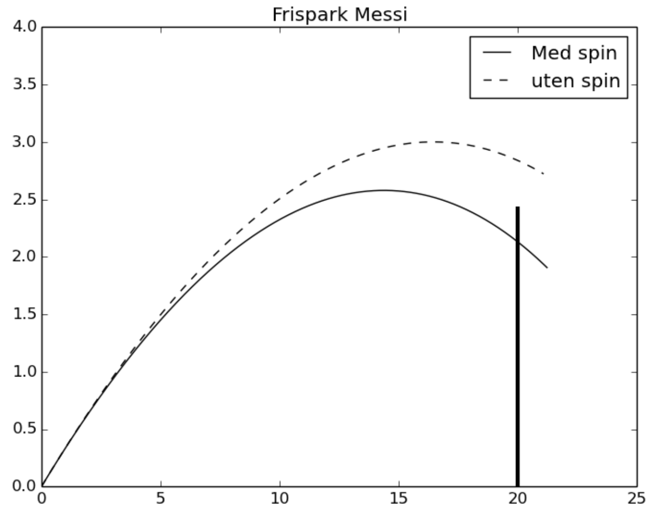
Løsningsforslag:

Kreften som vireker på system i x-retning og y-retning er

$$F_x = -bv_x$$

$$F_y = -bv_y - mg$$

Sett så disse inn i Newtons 2.lov og diskretiser på vanlig vis. Dette gir alternativ C



Figur 11: Fotballens bane med og uten spin. Den vertikale linjen representerer et fotballmål og man tydelig se verdien av litt top-spin.

Oppgave 22 (3 poeng)

Lionel Messi (en argentiske fotballspiller av moderat kaliber) sparker en ball slik at den roterer forover (toppen av ballen roterer med bevegelsesretningen, top-spin). Rotasjonen forårsaker *Magnus-effekten* (oppkalt etter Heinrich Gustav Magnus, ikke forfatteren av dette eksamenssettet) som gir en kraft gitt av $F = sv$ hvor v er hastigheten til ballen s er en koeffisient som kvantiserer effekten. Kraften virker vertikalt på bevegelsesretningen, mot den siden av ballen som roterer bort fra bevegelsesretningen (altså primært nedover i dette tilfellet). Det virker også en kraft fra luftmotstand på ballen gitt av $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$. Hvilken av følgende kodesnutter i alternativen skal byttest ut med `***` i koden nedenfor for at variablene `x` og `y` gir den korrekte posisjonen til ballen. (se figur 11 for eksempel med og uten *Magnus-effekten* - et tenkt mål er tegnet inn).

```
T = 1.0 #Total tid
N = 10000 #Antall datapunkter
h = T/(N-1) #Tidssteg

g = 9.8 #Tyngdens akselerasjon
b = 0.1 #Luftmotsand koeffisient
m = 0.43 #Massen til en fotball
s = 0.08 #spinkoeffisient
v0 = 25 #utgangsfart
ang = 19.0 #utgangsvinkel

vx = np.zeros(N)
vy = np.zeros(N)
```

```
x = np.zeros(N)
y = np.zeros(N)

phi= ang*mth.pi/180 #utgangsvinkel i radianer
vx[0] = v0*mth.cos(phi) #utgangshastighet
vy[0] = v0*mth.sin(phi)

for i in range(0,N-1):
    ***
    x[i+1] = vx[i]*h + x[i]
    y[i+1] = vy[i]*h + y[i]
#-------------------------------------
```

A. `vx[i+1] = h*(-b/m*vx[i]+g+s*vy[i]) + vx[i]`
   `vy[i+1] = h*(-b/m*vy[i]-g-s*vx[i]) + vy[i]`

B. `vx[i+1] = h*(-b/m*vx[i]+s*vy[i]) + vx[i]`
   `vy[i+1] = h*(-b/m*vy[i]-s*vx[i]) + vy[i]`

C. `vx[i+1] = h*(-b/m*vx[i]+s*vy[i]) + vx[i]`
   `vy[i+1] = h*(-b/m*vy[i]-g-s*vx[i]) + vy[i]`

D. `vx[i+1] = h*(-b/m*vx[i]+s*vy[i])`
   `vy[i+1] = h*(-b/m*vy[i]-g-s*vx[i])`

E. `vx[i+1] = h*(-b/m*vx[i]+s*vy[i]) + h*vx[i]`
   `vy[i+1] = h*(-b/m*vy[i]-g-s*vx[i]) + h*vy[i]`

Løsningsforslag:

Kreften som vireker på system i x-retning og y-retning er

$$F_x = -bv_x + sv_y$$

$$F_y = -bv_y - sv_x - mg$$

Sett så disse inn i Newtons 2.lov og diskretiser på vanlig vis. Dette gir alternativ C

Fysiske konstanter

$g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$
$k_\mathrm{B} = 1{,}3807 \cdot 10^{-23}\mathrm{J/K}$
$N_\mathrm{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$
$R = N_\mathrm{A} k_\mathrm{B} = 8{,}31\ \mathrm{Jmol^{-1}K^{-1}}$
$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2\ N^{-1}\ m^{-2}}$
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$
$k = 8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2C^{-2}}$
$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$
$m_\mathrm{e} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
$\sigma = 5.6 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$

Mekanikk

$v(t) = v_0 + at$
$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$
$W = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$
$K = \frac{1}{2}mv^2$
$\mathbf{F} = -\nabla U$
$F_\mathrm{f} \leq \mu_s F_\perp$
$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
$b = \theta r$, $v = \omega r$, $a = \alpha r$
$K_\mathrm{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$
$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$
$I = \sum_i m_i \mathbf{r}_i^2$
$I_d = I_0 + Md^2$
$\mathbf{r_{cm}} = \frac{1}{M_\mathrm{tot}} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$
$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p} = \int \mathbf{F} dt$
Betingelser for ren rulling:
$v = \omega r,\ a = \alpha r$

Svingninger

$x'' + \omega_0^2 x = 0$
$\omega_0 = \sqrt{k/m}$
$T = 2\pi/\omega$
$f = 1/T$

Termisk fysikk

n (antall mol)
$N = nN_\mathrm{A}$ (antall molekyler)
$\Delta U = Q - W$
$pV = nRT$
$pV = N\frac{2}{3}K_\mathrm{avg}$
$W = \int pdV$
$dQ = nCdT$
$C_\mathrm{V} = \frac{3}{2}R$ (en-atomig)

$C_\mathrm{V} = \frac{5}{2}R$ (to-atomig)
$C_\mathrm{P} = C_\mathrm{V} + R$
$\gamma = \frac{C_\mathrm{P}}{C_\mathrm{V}}$
$PV^\gamma =$ konst (adiabatisk)
$TV^{\gamma-1} =$ konst (adiabatisk)
$\eta = \frac{W}{Q}$
$\eta_\mathrm{Carnot} = 1 - \frac{T_c}{T_h}$
$dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$
$H = \kappa A\frac{dT}{dx}$
$H = e\sigma AT^4$

Elektrisitet og magnetisme

$\mathbf{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$
$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$
$\Delta V = -\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}$
$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$
$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$
$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0(I + \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt})$
$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$
$\mathbf{F} = q(E + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
$\boldsymbol{\tau} = \mu \times \mathbf{B}$
$\mu = IA$
$\mathcal{E}_\in = -M\frac{di_1}{dt}$
$C = \frac{Q}{V}$
$V = RI$

Formelliste for emnet TFY4125 Fysikk

Vektorstørrelser er i **uthevet** skrift.

Fysiske konstanter:

Ett mol: $M(^{12}C) = 12$ g	$1u = 1{,}6605 \cdot 10^{-27}$ kg	$N_A = 6{,}0221 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
$k_B = 1{,}3807 \cdot 10^{-23}$ J/K	$R = N_A k_B = 8{,}3145$ J mol^{-1} K^{-1}	0ºC = 273,15 K
$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}$ C^2/Nm^2	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2	
$e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ C	$m_e = 9{,}1094 \cdot 10^{-31}$ kg	
$c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s	$h = 6{,}6261 \cdot 10^{-34}$ Js	$g = 9{,}81$ m/s^2

Mekanikk:

$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r},t)$, der $\mathbf{p}(\mathbf{r},t) = m\mathbf{v} = md\mathbf{r}/dt$; $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Konstant a: $v = v_0 + at$; $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$; $2as = v^2 - v_0^2$

$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$; $K = \frac{1}{2}mv^2$; $U(\mathbf{r})$ = potensiell energi. (tyngde: mgh; fjær: ½ kx^2)

$\mathbf{F} = -\nabla U$; $F_x = -\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z)$; $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(\mathbf{r}) + E_{therm} = konst.$

$W_{tot} = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$

Tørr friksjon: $\left|F_f\right| \le \mu_s \cdot F_\perp$ eller $\left|F_f\right| = \mu_k \cdot F_\perp$. Viskøs friksjon: $\left|F_f\right| = -k_f v$; $\mathbf{F}_f = -k_f \mathbf{v}$

Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\times\mathbf{F} = I\boldsymbol{\alpha}$, der $\mathbf{r}_0$ er valgt ref. punkt og I treghetsmomentet. $dW = \boldsymbol{\tau}\cdot d\boldsymbol{\theta}$

Statisk likevekt: $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0}$.

Massemiddelpunkt (tyngdepunkt): $\mathbf{R} = (1/M)\sum_i m_i\mathbf{r}_i$, $M = \sum_i m_i$

Elastisk støt: $\Sigma_i\, \mathbf{p}_i$ = *konstant*; $\Sigma_i\, K_i$ = *konstant*. Uelastisk støt: $\Sigma_i\, \mathbf{p}_i$ = *konstant*.

Impuls: $\mathbf{I} = \Delta\mathbf{p}$, $\mathbf{I} = \int \mathbf{F}(t)dt$.

Vinkelhast.: $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{z}}$; $\left|\boldsymbol{\omega}\right| = \omega = d\theta/dt$; Vinkelakselerasjon: $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$; $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$

Sirkelbevegelse: $\mathbf{v} = \omega\mathbf{r}$; $v = \omega r$; Sentripetalakselerasjon $a_r = -v\omega = -v^2/r = -r\omega^2$

Baneaks.: $a_\theta = dv/dt = r\,d\omega/dt = r\alpha$; Rotasjonsenergi: $K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$, der I er treghetsmomentet.

$I \equiv \sum_i m_i r_{\perp i}{}^2 \rightarrow \int_V dV\rho r_\perp{}^2$. Akse gjennom massemiddelpunktet: $I \rightarrow I_0$.

Massiv kule: $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$; Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$; Kompakt sylinder / skive: $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$;

Lang, tynn stav: $I_0 = \frac{1}{12} ML^2$; Parallellakseteoremet (Steiners sats): $I = I_0 + Mb^2$
Betingelser for ren rulling: $v = \omega R$; $a = \alpha R$.

Svingninger:

Udempet svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; $T = 2\pi/\omega_0$; $f_0 = 1/T = \omega_0/2\pi$

Pendel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$; Fysisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{gmd/I}$; Matematisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{g/l}$

Termisk fysikk:

n = antall mol; $N = nN_A$ = antall molekyler; f = antall frihetsgrader; $\alpha = L^{-1}dL/dT$

$Q_{in} = \Delta U + W$; $C = \dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$; (Varmekapasiteten kan være gitt per masseenhet eller per mol)

$PV = nRT = Nk_B T$; $PV = N\frac{2}{3}\langle K\rangle$; $\langle K\rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}m\langle v_x^2\rangle$; $\Delta W = P\Delta V$; $W = \int_1^2 PdV$

Molare varme kap.: $C_V = \frac{3}{2}R$ (én-atomig); $C_V = \frac{5}{2}R$ (to-atomig); $C_P = C_V + R$. $dU = nC_V \cdot dT$.

Adiabat: $\gamma \equiv C_P/C_V$; $PV^\gamma = konst.$; $TV^{\gamma-1} = konst.$

Virkningsgrader for varmekraftmaskiner: $\varepsilon = W/Q_v$; Carnot: $\varepsilon = 1 - T_k/T_v$: Otto: $\varepsilon = 1 - 1/r^{\gamma-1}$

Kjøleskap: $\eta_K = \left|\dfrac{Q_k}{W}\right| \xrightarrow{Carnot} \dfrac{T_k}{T_v - T_k}$; Varmepumpe: $\eta_{VP} = \left|\dfrac{Q_v}{W}\right| \xrightarrow{Carnot} \dfrac{T_v}{T_v - T_k}$

Clausius: $\sum \dfrac{\Delta Q}{T} \le 0$; $\oint \dfrac{\mathrm{d}Q}{T} \le 0$; Entropi: $\mathrm{d}S = \dfrac{\mathrm{d}Q_{rev}}{T}$; $\Delta S_{12} = \int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}Q_{rev}}{T}$; $S = k_B \ln W$

Entropiendring i en ideell gass: $\Delta S_{12} = nC_V \ln(T_2/T_1) + nR\ln(V_2/V_1)$

_____ Elektrisitet og magnetisme: ____

Coulomb: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$; $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$; $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Elektrisk felt: $\mathbf{E} = -\nabla V = -\left\langle \dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y}, \dfrac{\partial V}{\partial z} \right\rangle ; E_x = -\dfrac{dV}{dx}$

Elektrisk potensial: $\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$. $\Delta U = Q\Delta V$

1. Gauss lov $\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint_S E_n dA = \dfrac{Q_{inni}}{\varepsilon_0}$

2. Gauss lov for magnetisme $\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = \oint_S B_n dA = 0$

3. Faradays lov $\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi_m}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\int_S B_n dA = -\int_S \dfrac{\partial B_n}{\partial t} dA$

4. Amperes lov $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (I_{inni} + I_d)$, $I_d = \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \int_S \dfrac{\partial E_n}{\partial t} dA$

Fluks: $\Phi_E = \int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_S E_n \cdot dA$; $\Phi_M = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = \int_S B_n \cdot dA$.

Kapasitans: $C \equiv \dfrac{Q}{V}$. For platekondensator: $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$. $U = \dfrac{1}{2}CV^2 = \dfrac{1}{2}Q^2 / C$.

Energitetthet: $u_E = \dfrac{U_E}{'volum'} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$; $u_B = \dfrac{U_B}{'volum'} = \dfrac{1}{2\mu_0}B^2$

Biot-Savarts lov: $d\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I \dfrac{d\mathbf{l}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$. $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

Lorentzkraften: $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$; $d\mathbf{F} = I(d\mathbf{l}\times\mathbf{B})$.

Svarark (riv av og lever med eksamensomslag)
Kandidatnummer:
Fagkode:

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					