1. Usain Bolt satte verdensrekord på 200 m i Berlin i 2009, med tiden 19.19 s. Bolts hastighet $v(t)$ gjennom rekordløpet kan med noenlunde brukbar tilnærmelse beskrives med funksjonen

$$v(t) = v_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

med maksimal hastighet $v_0 = 12.0$ m/s og "tidskonstant" $\tau = 1.30$ s. Hva var Bolts maksimale baneakselerasjon (dvs i fartsretningen)?

A. 6,23 m/s^2 B. 7,23 m/s^2 C. 8,23 m/s^2 **D.** 9,23 m/s^2 E. 10,23 m/s^2

Solution: $a = dv/dt = (v_0/\tau)\exp(-t/\tau)$ slik at vi har maksimal a ved $t = 0$, $a_{\max} = v_0/\tau = 12.0/1.30 = 9.23$ m/s^2.

2. En appelsin med masse $m = 0{,}231$ kg faller fra en posisjon 1,83 m over gulvet. Anta $g = 9{,}81$ m/s^2. Hva er hastigheten til appelsinen i det den treffer gulvet (hint: antall korrekte siffer)?
A. 3,0 m s^{-1} B. 2,99 m s^{-1} **C.** 5,99 m s^{-1} D. 6 m s^{-1} E. 2,993 024 m s^{-1}

Solution: Mekanisk energi er bevart slik at $\Delta K = \Delta U \implies \frac{1}{2}mv^2 = mgh \implies v = \sqrt{2gh}$

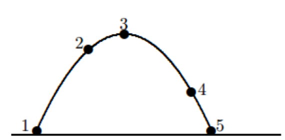
$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,83\text{m}} = 5,99\text{m/s}$$

(Med korrekte 3 signifikante siffer som oppgitt i oppgaven. Massen kommer ikke inn i utregningen).

3. En kanon skyter ut ei metallkule fra bakkenivå ($y_0 = 0$) og med utgangsretning 30° over horisontalretningen. Kula lander 23 m unna. Hva var kulas starthastighet v_0? Se bort fra luftmotstand.

A. 16 m s^{-1} B. 21 m s^{-1} C. 26 m s^{-1} D. 31 m s^{-1} E. 36 m s^{-1}

Solution: Med startposisjon $x = y = 0$ har vi ligningene for konstant akselerasjon: $x = v_x t = v_0 t \cos 30°$ og $y = v_y t + at^2/2 = v_0 t \sin 30° - gt^2/2$. Kula lander ved $y = 0$, som gir tidspunktet $t = v_0/g$ siden $\sin 30° = 0.5$. Horisontal landingsposisjon blir da $x = \sqrt{3}v_0^2/2g$ siden $\cos 30° = \sqrt{3}/2$. Starthastigheten er da $v_0 = \sqrt{2xg/\sqrt{3}} = 16$ m/s.

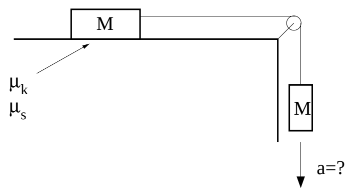


Figur 1: Oppgave 4

4. Figur 1 viser en parabolsk bane fra 1 til 5 for en ball som kastes i jordas tyngdefelt, men i fravær av luftfriksjon. Hva er retningen til ballens akselerasjon i punkt 2?

   A. Oppover og til høyre.
   B. Nedover og til venstre.
   C. Rett opp.
   D. Rett ned.
   E. Akselerasjonen er null.

Solution: Det er bare gravitasjonskraften som virker og denne peker rett ned som blir samme retning som akselerasjonen.

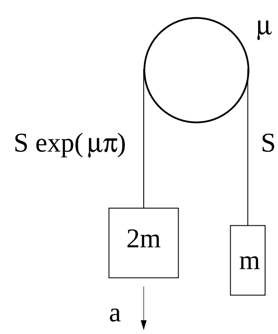


Figur 2: Oppgave 5

5. En masse M ligger på et bord og er via ei tilnærmet masseløs snor og friksjonsfri trinse bundet sammen med en like stor masse M. Koeffisienter for statisk og kinetisk friksjon mellom M og bordet er $\mu_s = \mu_k = 0.4$. Hva blir massenes akselerasjon a?

   A. $a = 0$ **B.** $a = 0.3g$ C. $a = 0.5g$ D. $a = 0.7g$ E. $a = g$

Solution: Netto kraft som akselererer de to massene er $Mg - f = Mg - \mu_k Mg = (1 - \mu_k)Mg$, slik at $2Ma = (1 - \mu_k)Mg$, dvs $a = 0.3g$.

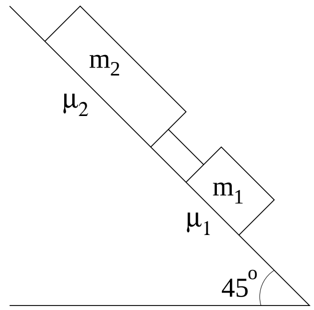


Figur 3: Oppgave 6

6. Kinetisk friksjonskoeffisient mellom snor og sylinder i figur 3 er $\mu = 0.170$. Sylinderen er fast og kan ikke rotere. Snora går *en* gang over sylinderen (kontaktvinkel 180°), slik at snordraget endrer seg med faktoren $\exp(\mu\pi)$ fra den ene til den andre siden. De to loddene har masse hhv 2.00 og 4.00 kg. Hva blir loddenes akselerasjon a?

   A. 0.78 m/s^2 B. 1.78 m/s^2 C. 2.78 m/s^2 D. 3.78 m/s^2 E. 4.78 m/s^2

Solution: Snordraget er størst der den største massen henger. N2 for de to massene er da (med $m = 2.00$ kg) $ma = S - mg$ og $2ma = 2mg - S\exp(\mu\pi)$. Vi ganger den første av disse med $\exp(\mu\pi)$, legger sammen ligningene, og eliminerer dermed S. Løsning mhp a gir så $a = g(2 - \exp(0.17\pi))/(2 + \exp(0.17\pi)) = 0.78$ m/s^2. (Der bare masse-*forholdet*, ikke selve masseverdiene, hadde betydning.)



Figur 4: Oppgave 7

7. To klosser ligger på et skråplan med helningsvinkel 45° og er forbundet med ei stiv og tilnærmet masseløs stang. Klossene har masse hhv $m_1 = 80$ g og $m_2 = 160$ g. Statiske friksjonskoeffisienter er hhv μ_1 og μ_2 (se figur 4). Hvilken ulikhet må være oppfylt for at de to klossene skal bli liggende i ro?

   A. $\mu_1 + \mu_2 \geq 1/\sqrt{2}$

   B. $\mu_1 + 2\mu_2 \geq 3/\sqrt{2}$

   C. $\mu_1 + 2\mu_2 \geq 3$

   D. $2\mu_1 + \mu_2 \geq 1$

   E. $2\mu_1 + \mu_2 \geq \sqrt{2}$

Solution: Klossene blir liggende i ro dersom summen av maksimal statisk friksjonskraft, $\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 = \mu_1 m_1 g \cos\theta + \mu_2 m_2 g \cos\theta$, er minst like stor som summen av tyngdekomponentene parallelt med skråplanet, $m_1 g \sin\theta + m_2 g \sin\theta$. Dermed:

$$(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) g \cos\theta \geq (m_1 + m_2) g \sin\theta.$$

Med oppgitte tallverdier blir dette $\mu_1 + 2\mu_2 \geq 3$.

8. En tynn stang har en massetetthet (masse/lengde) som er gitt av $\rho(x) = 0{,}2\,\mathrm{kg\,m^{-1}} + 0{,}1\,\mathrm{kg/m^3}$, hvor x er et punkt på stangen målt fra den ene enden. Lengden av stangen er 1.0 m. Stangen er festet til en akse i den enden som er lettest. Hva er stangens treghetsmoment med hensyn på denne aksen?

   A. 0.012 kgm^2 B. 0.045 kgm^2 C. 0.062 kgm^2 **D.** 0.087 kgm^2 E. 0.13 kgm^2

Solution: Treghetsmoment er definert av $I = \sum m_i r_i^2$. Dersom vi har en kontinuerlig massefordeling får vi $I = \int r^2 dm$. Vi kan skrive $dm = \rho(r)dr$. Så setter man inn uttrykket for $\rho(r)$ og integrerer og får

$$I = \int_0^1 r^2(a + br^2)dr = \left[\frac{ar^3}{3} + \frac{br^5}{5}\right]_0^1$$

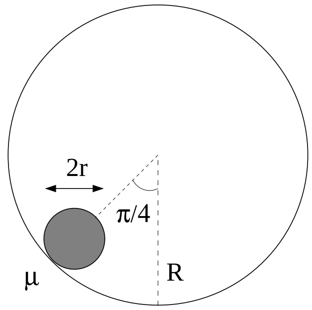
Setter inn tall og får

$$\frac{0.2\text{ kg/m} \cdot 1\text{ m}^3}{3} + \frac{0,1\text{ kg/m}^3 \cdot 1\text{ m}^5}{5} = 0,087\text{ kgm}^2$$

9. Vi har en taperull med masse $m = 70$ g, ytre radius $r = 3.75$ cm og indre radius 1.25 cm (dvs ei kompakt skive med et hull med diameter 2.50 cm i midten). Hva er et rimelig estimat for taperullens treghetsmoment I_0 med hensyn på symmetriaksen gjennom dens massesenter? Treghetsmomentet for en kompakt sylinder om symmetriaksen er $I = \frac{1}{2}mr^2$

   A. $I_0 = mr^2/9$ B. $I_0 = 2mr^2/9$ C. $I_0 = 3mr^2/9$ D. $I_0 = 4mr^2/9$ **E.** $I_0 = 5mr^2/9$

Solution: For ei kompakt skive med masse m og radius r er $I_0 = mr^2/2$. Med et hull i midten må I_0 bli større enn dette, og da er bare E et mulig alternativ.
(Med litt regning: Taperullens treghetsmoment er lik differansen mellom treghetsmomentene til kompakte skiver med radius hhv r og $r/3$ og masse hhv $9m/8$ og $m/8$: $I_0 = (9m/8)r^2/2 - (m/8)(r/3)^2/2 = 5mr^2/9$.)

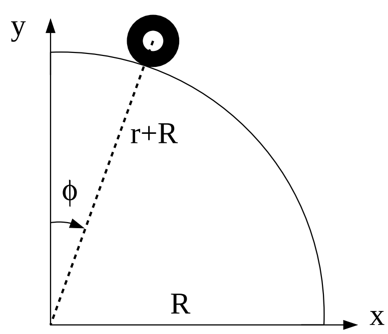


Figur 5: Oppgave 10

10. Ei kompakt kule med masse m og radius r kan rulle på innsiden av et kuleskall med radius $R > r$. Hvis kula starter ved en vinkel på 45° (se figur 5), med null starthastighet, hvor stor må da den statiske friksjonskoeffisienten μ mellom kule og kuleskall minst være for at kula fra starten av skal rulle rent (uten å gli)? Treghetsmoment kompakt kule: $I = \frac{2}{5}mr^2$ (Tips: Newtons 2. lov for translasjon og rotasjon.)

A. 1/7 **B.** 2/7 C. 1/5 D. 2/5 E. 1/3

Solution: Vi har $\sin 45° = \cos 45° = 1/\sqrt{2}$. N2 rotasjon (om kulas CM): $fr = I_0\alpha = (2mr^2/5) \cdot a/r$, dvs $f = 2ma/5$. N2 translasjon (av kulas CM): $mg/\sqrt{2} - f = ma$. Disse ligningene kombinert gir akselerasjon $a = 5g/7\sqrt{2}$. Maksimal friksjonskraft er $f = \mu N = \mu mg/\sqrt{2}$. Vi setter maksimal f lik utregnet $f = 2ma/5$, setter inn utregnet verdi for a og finner minimal $\mu = 2/7$.



Figur 6: Oppgave 11

11. Anta at et generelt legeme med masse m, radius r og treghetsmoment $I_0 = cmr^2$ ruller på utsiden av en kvartsirkel med radius R (se figure 6). Legemet starter med null hastighet praktisk talt på toppen (ved ϕ bittelitt større enn null) og ruller rent (dvs uten å gli) nedover kvartsirkelen. Hva er da legemets hastighet V ved vinkelen ϕ? (Tips: Energibevarelse.)

A. $\sqrt{2g(r+R)(1+\cos\phi)/(c+1)}$

B. $\sqrt{2g(r+R)(1-\cos\phi)/(c+1)}$

C. $\sqrt{g(r+R)(1+\cos\phi)/(c+1)}$

D. $\sqrt{g(r+R)(1-\cos\phi)/(c+1)}$

E. $\sqrt{2g(r+R)(1+\cos\phi)/(c+3)}$

Solution: Total energi er bevart, og er lik potensiell energi på toppen: $E = U(0) = mg(r+R)$. Ved vinkelen ϕ, med ren rulling hele veien, er $U(\phi) = mg(r+R)\cos\phi$ og $K = K_{\text{rot}} + K_{\text{trans}} = m(c+1)V^2/2$. Vi setter $K = U(0) - U(\phi)$, løser mhp V og finner $V = \sqrt{2g(r+R)(1-\cos\phi)/(c+1)}$.

12. En kloss med masse 20 g er festet til ei fjær med fjærkonstant 20 N/m. Fjæra strekkes med 2.0 cm og klossen slippes, med null starthastighet. Klossen utfører deretter dempede svingninger, der dempingskraften er proporsjonal med klossens hastighet, med dempingskoeffisient $b = 0.020$ Ns/m. Hvor mange hele perioder svinger klossen før utsvingsamplituden er redusert til 0.4 cm?

A. 6 **B. 16** C. 26 D. 36 E. 46

Solution: Utsvingsamplituden avtar eksponentielt med tiden, $x_0 \exp(-\gamma t)$, der $\gamma = b/2m$. Med $x_0 = 2.0$ cm blir amplituden redusert til 0.4 cm etter en tid t bestemt av $\exp(-\gamma t) = 1/5$, dvs $\exp(\gamma t) = 5$, dvs $t = (\ln 5)/\gamma = (\ln 5)\cdot 2m/b = (\ln 5)\cdot 0.040/0.020 = 3.219$ s. Perioden er $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{k/m - b^2/4m^2} \simeq 2\pi/\sqrt{k/m} = 2\pi/\sqrt{20/0.020} = 0.199$ s. (Dempingen er svak.) Forholdet t/T blir da ca 16.17, dvs 16 hele perioder før amplituden er redusert til 0.4 cm.

13. Sisyfos dytter en stor stein (tilnærmet som en rund kompakt kule, $I = \frac{2}{5}mR^2$) med masse $m = 6000$ kg og radius $R = 1,0$ m opp en bakke (sterk kar). Helningen på bakken er 25°. Anta at kraften F_s han dytter med virker parallelt med bakken og langs en linje gjennom senter på kula (altså ingen friksjon mellom hendene og kula som kan gi opphav til et dreiemoment når kula roterer). Statisk friksjonskoeffisienten mellom kula og bakken er $\mu = 0,20$. Hvor stor kraft kan Sisyfos dytte med uten at kula begynner å skli?

A. 62 kN B. 32 kN C. 54 kN D. 112 kN E. 19 kN

Solution: Definer et koordinatsystem med x-aksen oppover, parallelt med bakken og y-aksen vertikalt på bakken. Vi setter opp Newtons 2. lov for translasjon og rotasjon

$$\begin{aligned} ma &= \quad F_s - mg\sin\theta - f \\ I\alpha &= \quad \tau = fr \end{aligned}$$

Om vi antar at kulen ruller uten å skli må vi ha at

$$a = \alpha r = \frac{fr^2}{I}$$

Vi setter så dette inn i første likningen og løser med hensyn på F_s

$$F_s = mg\sin\theta + f(\frac{mr^2}{I} + 1) = mg\sin\theta + 7f/2$$

For friksjonen gjelder det at $f < \mu mg\cos\theta$ og vi finner dermed til slutt at

$$F \leq mg(\mu\cos\theta\frac{7}{2} + \sin\theta) = 6000\text{ kg}\cdot 9,81\text{ m/s}^2\left(0,20\cos(25^\circ)\frac{7}{2} + \sin(25^\circ)\right) = 62\text{ kN}$$

14. En 3,2 m, tilnærmet masseløs, stang har tre masser festet til seg. $m_1 = 13,3$ kg på den ene enden, $m_2 = 16,2$ kg på midten og $m_3 = 32,0$ kg på den andre enden. Hvor langt fra enden med massen m_1 er massesenteret til stangen?

A. 3,0 m **B. 2,1 m** C. 2,6 m D. 1,1 m E. 1,9 m

Solution: Massesenterets posisjon er gitt av $r_{\text{cm}} = \dfrac{1}{M}\sum r_i m_i$.

$$M = 13,3\text{ kg} + 16,2\text{ kg} + 32,0\text{ kg} = 61,5\text{ kg}.$$

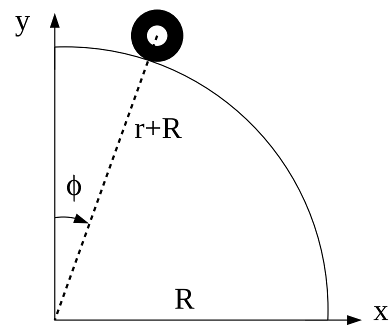
Summerer opp alle delene

$$\frac{1}{M}\sum r_i m_i = 1/61,5\ \text{kg}\sum 0\ \text{m}\cdot 13,3\ \text{kg} + 1,6\ \text{m}\cdot 16,2\ \text{kg} + 3.2\ \text{m}\cdot 32,0\ \text{kg} = 2,1\ \text{m}$$

Flere av verdiene har bare to signifikante tall og dermed bør svaret også ha det.

t (s)	x (cm)	y (cm)
1.101	42.400	70.749
1.118	44.142	69.668
1.134	45.901	68.559
1.151	47.683	67.272
1.168	49.575	65.799
1.185	51.422	64.259
1.201	53.396	62.550
1.218	55.474	60.782
1.235	57.587	58.804
1.251	59.698	56.570
1.268	61.834	54.088
1.285	63.992	51.421
1.301	66.162	48.545
1.318	68.331	45.362
1.335	70.501	41.989
1.351	72.681	38.260
1.368	74.858	34.323
1.385	77.054	30.139
1.401	79.246	25.593

Tabell 1: Data for oppgave 15



Figur 7: Oppgave 15

15. Tabell 1 viser posisjon (x, y), målt i enheten centimeter (cm), og tid t, målt i enheten sekunder (s), for massesenteret til en taperull med masse $m = 70$ g, ytre radius $r = 3.75$ cm og indre radius 1.25 cm (dvs ei kompakt skive med et hull med diameter 2.50 cm i midten), som ruller på utsiden av en kvartsirkel med radius $R = 79.5$ cm. Hva er taperullens hastighet ved $t = 1.201$ s (basert på tallene i tabellen)?

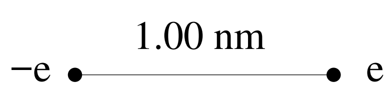
A. 0.7 m/s B. 1.0 m/s C. 1.3 m/s **D. 1.6 m/s** E. 1.9 m/s

Solution: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}/\Delta t$. Her kan vi bruke $\Delta t = 1.218 - 1.201$ s, $1.218 - 1.185$ s eller $1.201 - 1.185$ s, med tilørende Δx og Δy. Alle tre muligheter gir ca 1.6 m/s. (Hhv 1.60, 1.62 og 1.63)

16. Foucaultpendelen i Realfagbygget kan med svært god tilnærmelse betraktes som en matematisk pendel (kan se bort fra snoras masse og se på loddet som en punktmasse) med lengde $L = 25$ m. Metallkula som svinger fram og tilbake med små utsving fra likevekt, har masse $M = 40$ kg. Kulas maksimale horisontale utsving fra likevekt er $x_0 = 1.0$ m. Hva er pendelens svingetid (periode)? Se bort fra demping

A. $T = 4$ s B. $T = 6$ s C. $T = 8$ s D. $T = 10$ s E. $T = 12$ s

Solution: $T = 2\pi\sqrt{L/g} = 2\pi\sqrt{25/9.81} = 10\,\text{s}$.

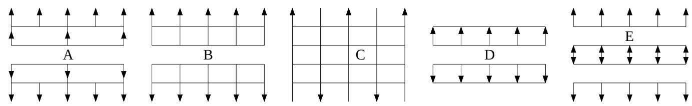


Figur 8: Oppgave 17

17. En elektrisk dipol består av to punktladninger $\pm e$ i innbyrdes avstand 1.00 nm. Hva er da elektrisk feltstyrke $|\mathbf{E}|$ i avstand 2.00 nm fra hver av de to punktladningene?

A. 80 MV/m B. 130 MV/m **C. 180 MV/m** D. 230 MV/m E. 280 MV/m

Solution: Med avstand 2.00 nm fra hver av ladningene befinner vi oss i planet som halverer linjen mellom de to. Retningen på **E** er her horisontalt mot venstre, når vi adderer bidragene fra de to ladningene. Feltstyrken til hvert av de to bidragene er $e/4\pi\varepsilon_0 r^2$, med $r = 2.00$ nm. Vi trenger komponentene horisontalt, og må derfor gange dette med cosinus til vinkelen mellom horisontallinjen og linjen fra e til den aktuelle posisjonen 2.00 nm unna. Det gir en faktor 1/4. Dermed: $E = 2 \cdot (e/4\pi\varepsilon_0 r^2) \cdot (1/4) = 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^9/(4 \cdot 10^{-18} \cdot 4) = 1.80 \cdot 10^8$ V/m = 180 MV/m.



Figur 9: Oppgave 18

18. Fire svært store parallelle plan, alle med positiv uniform ladning σ pr flateareal, er plassert med fast innbyrdes avstand (se figur 9). Hvilken figur viser elektriske feltlinjer for dette systemet? (Tips: Superposisjonsprinsippet.)

A. B. C. D. E.

Solution: Alle de fire planene bidrar til det totale elektriske feltet med $\sigma/2\varepsilon_0$, med retning bort fra planet. Når vi legger sammen de fire bidragene i de fem ulike områdene, blir feltstyrken lik null i midten, σ/ε_0 mellom de to øverste og mellom de to nederste, og $2\sigma/\varepsilon_0$ helt på utsiden. Figur A passer med dette.

19. Etter at du gnir en ballong mot håret ditt og holder den mot veggen, hva er det som gjør at den sitter fast når du slipper den?

    A. Vekselvirkning med håret skaper eddy-strømmer i ballongen som induserer strømmer i veggen slik at man får magnetisk tiltrekning.

    B. Ladning på ballongen polariserer molekylene i veggen slik at man får elektrostatisk tiltrekning.

    C. Gnikkingen lager små hakk i ballongen som øker friksjonskoefisienten mellom ballong og vegg.

    D. Den nære kontakten mellom vegg og ballong gir et sterkt elektrisk felt som skaper dielektrisk brudd i luften og påfølgende kjemiske reaksjoner som "limer" ballongen til veggen

    E. Dielektrisk brudd rundt ballongen skaper økt temperatur og dermed oppdrift som følge av konveksjonsstrømmer i luften. Det gjør at ballongen ikke detter ned.

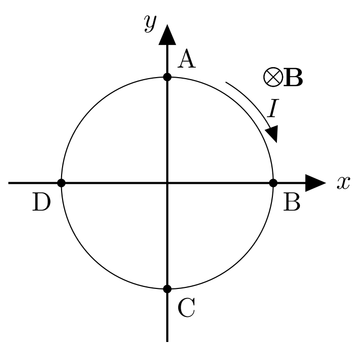
20. To punktladninger med lik ladning q er plassert med en avstand d. Hva er det elektriske potensialet (relativt til $V(r \to \infty) = 0$, der r er avstand fra partikkelen) midt mellom dem?

    A. 0 B. $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$ C. $\frac{q}{2\pi\epsilon_0 d}$ **D.** $\frac{q}{\pi\epsilon_0 d}$ E. $\frac{2q}{\pi\epsilon_0 d}$

Solution: Det elektriske potensialet fra en av de to punktladningene er

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(d/2)}. \tag{1}$$

Siden elektrisk potensial er en skalar kan potensialet fra de to punktladningene adderes for å få det totale elektriske potensial.



Figur 10: Oppgave 21

21. En strømsløyfe ligger i ro i xy-planet (se figur 10). Et homogent magnetfelt peker i negativ z-retning (inn i planet i figuren). En konstant strøm I går i sløyfen som angitt i figuren. Hvilket av følgende utsagn er sanne?

    A. Sløyfen vil rotere slik at punkt A beveger seg ut av planet.

    B. Sløyfen vil rotere slik at punkt B beveger seg ut av planet.

    C. Sløyfen vil rotere slik at punkt C beveger seg ut av planet.

    D. Sløyfen vil rotere slik at punkt D beveger seg ut av planet.

    E. Sløyfen vil bli liggende i ro.

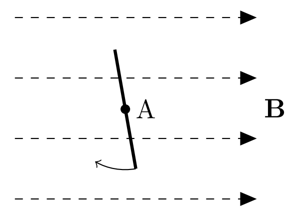
Solution: Det magnetiske momentet til sløyfen ligger i samme retning som magnetfeltet slik at $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = 0$

22. Magnetfeltet i en strømsløyfe med areal $A = 1{,}0\,\mathrm{m}^2$ er uniformt og vinkelrett på arealet omsluttet av sløyfen. Feltet endrer seg som $B = (3{,}0\,\mathrm{T\,s^{-1}})t$. Hva blir absoluttverdien av den genererte elektromotoriske spenningen i sløyfen?

    A. 2,1 V **B.** 3,0 V C. 5,2 V D. 9,0 V E. 12 V

Solution: Faradays lov sier at $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$. Vi får da at

$$\mathcal{E} = 3{,}0\,\mathrm{T\,s^{-1}} \times 1{,}0\,\mathrm{m^2} = 3{,}0\,\mathrm{V}$$



Figur 11: Roterende strømsløyfe i magnetfelt sett fra siden. Oppgave 23

23. En strømsløyfe med areal A roterer i et konstant magnetfelt med konstant vinkelhastighet ω. Se figur 11. Motstanden i sløyfen er R. Hvor stor energi $E = \int \mathcal{E}(t)I(t)dt$ blir omsatt i sløyfen i løpet av en periode (Du trenger kanskje at $\int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \pi$)?

A. 0 B. $\dfrac{\omega^2 B^2 A^2 \pi^2}{R^2}$ C. $\dfrac{\omega^2 B A \pi^2}{R^2}$ D. $\dfrac{\omega^2 B^2 A 2\pi}{R^2}$ **E.** $\dfrac{\omega B^2 A^2 \pi}{R}$

Solution: Den induserte spenningen i sløyfen er gitt av

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})}{dt} = BA\frac{d\cos(\omega t)}{dt} = -\omega BA\sin(\omega t)$$

Videre har vi at strømmen er gitt av $I = \mathcal{E}/R$ slik at vi ender opp med

$$E = \int \frac{\mathcal{E}^2}{R}\,\mathrm{dt} = \frac{\omega^2 B^2 A^2}{R}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt = \frac{\omega^2 B^2 A^2}{R}\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\frac{dx}{\omega} = \frac{\omega B^2 A^2 \pi}{R}$$

24. Veggen i et hus har to lag. Lag 1 er dobbelt så tykt som lag 2. Lag 1 har en varmeledningsevne (enhet W/mK) som er dobbelt så stor som lag 2. Begge lagene har samme areal. Anta at temperaturen i huset og omgivelsene er konstante og at vi har nådd en stasjonær tilstand. Hva er varmestrømtettheten (enhet $\mathrm{W/m^2}$) gjennom lag 2 sammenliknet med varmestrømtettheten gjennom lag 1?

A. 4 ganger større B. Dobbelt så stor **C. Lik** D. Halvparten så stor E. En kvart så stor

Solution: For å ha en stasjonær tilstand må varmestrømmen være konstant over tid og lik for alle lag gjennom veggen. Hvis ikke hadde temperaturen blitt endret på flater inni veggen.

25. I en reversibel Carnot-varmekraftmaskin med 3.00 mol ideell gass som arbeidssubstans utvider gassen seg isotermt ved temperatur 1000 K fra et volum $V_0 = 0.100\ \mathrm{m^3}$ til et dobbelt så stort volum. Den isoterme kompresjonen finner sted ved 400 K. Arbeidssubstansen er en gass med adiabatkonstant 1.398. Hva er gassens maksimale volum i den beskrevne kretsprosessen?

A. $0.20\ \mathrm{m^3}$ B. $0.80\ \mathrm{m^3}$ C. $1.40\ \mathrm{m^3}$ **D. $2.00\ \mathrm{m^3}$** E. $2.60\ \mathrm{m^3}$

Solution: Gassen har maksimalt volum etter den adiabatiske utvidelsen (og avkjølingen) fra tilstanden med temperatur $T_2 = 1000$ K og volum $V_2 = 0.200\ \mathrm{m^3}$. I en adiabatisk prosess (med ideell gass) er $TV^{\gamma-1}$ en konstant. Dermed er $T_2 \cdot (2V_0)^{0.398} = T_1 \cdot V_{\max}^{0.398}$, eller

$$V_{\max} = 2V_0 \cdot (T_2/T_1)^{1/0.398} = 0.200 \cdot 2.50^{1/0.398} = 2.00\,\mathrm{m^3}.$$

26. I en reversibel varmekraftmaskin med 3.00 mol ideell gass som arbeidssubstans utvider gassen seg isotermt ved temperatur 1000 K fra et volum $V_0 = 0.100$ m^3 til et dobbelt så stort volum. Hvor stort arbeid W utføres av gassen under den isoterme utvidelsen?

A. 9.3 kJ B. 11.3 kJ C. 13.3 kJ D. 15.3 kJ **E. 17.3 kJ**

Solution:

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} p(V)\, dV = nRT_2 \ln 2 = 3.00 \cdot 8.314 \cdot 1000 \cdot \ln 2 = 17.3 \cdot 10^3\,\mathrm{J} = 17.3\,\mathrm{kJ}.$$

27. I en reversibel Carnot-varmekraftmaskin med 3.00 mol ideell gass som arbeidssubstans utvider gassen seg isotermt ved temperatur 1000 K fra et volum $V_0 = 0.100$ m^3 til et dobbelt så stort volum. Den isoterme kompresjonen finner sted ved 400 K. Hva er varmekraftmaskinens virkningsgrad?

A. 0.50 **B. 0.60** C. 0.70 D. 0.80 E. 0.90

Solution: $\eta = \eta_C = 1 - T_1/T_2 = 1 - 400/1000 = 0.60.$

28. I en reversibel Carnot-varmekraftmaskin med 3.00 mol ideell gass som arbeidssubstans utvider gassen seg isotermt ved temperatur 1000 K fra et volum $V_0 = 0.100$ m^3 til et dobbelt så stort volum. Den isoterme kompresjonen finner sted ved 400 K. Hva er entropiendringen i gassen i den isoterme kompresjonen ved 400 K?

A. -17.3 **J/K** B. -11.3 J/K C. 0 J/K D. $+11.3$ J/K E. $+17.3$ J/K

Solution: Her kan man gå fram på flere vis. Vi kan f eks ta utgangspunkt i den termodynamiske identitet, $TdS = dU + pdV$, som med $dU = 0$ langs en isoterm med ideell gass gir $dS = pdV/T = nRdV/V$. De adiabatiske delprosessene foregår uten utveksling av varme, og dermed uten entropiendring i gassen. Dermed må gassens entropi reduseres like mye i den isoterme kompresjonen ved 400 K som den øker i den isoterme utvidelsen ved 1000 K:

$$\Delta S_1 = -\Delta S_2 = -nR \ln 2 = -3.00 \cdot 8.314 \ln 2 = -17.3\,\mathrm{J/K}.$$

29. En pendel (masse $m = 1,0$ kg, snorlengde $r = 1,0$ m) dras ut til siden med en vinkel $\theta = 20^\circ$ og slippes ved $t = 0$ (pendelen er i ro når den slippes). Kreftene som virker på pendelen er gravitasjonskraften samt en friksjonskraft (luftmotstand) som er gitt av $F_L = -bv(t)$, hvor $v(t)$ er banefarten til massen og $b = 0,050$ Ns/m. Anta at vi har målt vinkelhastigheten i N jevnt fordelte posisjoner fra startpunktet $\theta = 20^\circ$ til bunnpunktet og lagret disse dataene i (python)variabelen `w`. Hvilket av følgende alternativer skal byttest ut med *** i koden nedenfor for at variabelen `W` skal gi en tilnærming for absoluttverdien av arbeidet som blir gjort av *friksjonskraften* i løpet av denne bevegelsen?

```
#Målepunktene er lastet inn i variabelen w
b = 0.05 #Friksjonskoeffisient
N = 10000 #Antall målepunkter
v0 = 20*3.14/180 #startpunkt
dv = v0/(N-1) #Vinkelintervall mellom målepunkter
dW = np.zeros(N-1)
 ***
W = np.sum(dW)
```

A.
```
F = -m/g*np.sin(w)-b*r*w
dW = F[1:N-1]*r*dv
```

B.
```
F = -b*r*w
dW = F[1:N-1]*dv
```

C.
```
F = -b*r*w
dW = F[1:N-1]*N
```

D.
```
F = -b*r*w
dW = F[1:N-1]*r*dv
```

E.
```
F = -m/g*np.sin(w)-b*r*w
dW = F[1:N-1]*r*dv
```

Solution: For å finne arbeidet i et lite intervall tar vi produktet av kraften og lengden på intervallet

$$dW = F\Delta s = Fr\Delta\theta$$

Kraften er gitt av

$$F = -bv = -b\omega r$$

Intervallet finner vi fra å dele den totale forflytningen på antall målepunkter-1. Så er det bare å summere opp alle delarbeidene.

30. En pendel (masse $m = 1,0$ kg, snorlengde $r = 1,0$ m) dras ut til siden med en vinkel $\theta = 20^\circ$ og slippes ved $t = 0$ (pendelen er i ro når den slippes). Kreften som virker på pendelen er gravitasjonskraften samt en friksjonskraft (luftmotstand) som er gitt av $F_L = -bv(t)$, hvor $v(t)$ er banefarten til massen og $b = 0,050$ Ns/m). Hvilken av kode-alternativene skal byttes ut med *** i koden nedenfor for at variabelen `v` gir en riktig gjengivelse av vinkelposisjonen (hint: finn riktig differensiallikning fra Newtons 2. lov, skriv som koblet sett med 1. ordens likninger og diskretiser disse)

```
import numpy as np

g = 9.81  #gravitasjonskonstanten
b = 0.05  #friksjonskoefisient
N = 10000  #Antall datapunkter for diskretisering
T = 10.0  #Totalt tidsintervall
h = T/(N-1) #Tidsinterval mellom hvert datapunkt
m = 1.0  #Massen
r = 1.0  #Pendelens lengde
v = np.zeros(N) # vinkelposisjon
w = np.zeros(N) # vinkelhastighet
v[0] = 20*3.14/180 #Initialbetingelser
w[0] = 0
for n in range(0,N-1):
 ***
```

A. `w[n+1] = (g/r*np.sin(v[n])+b/m*w[n])*h + w[n]`
   `v[n+1] = w[n]*h`

B. `w[n+1] = g/r*np.sin(v[n])*h-b/m*w[n] + w[n]`
   `v[n+1] = w[n]*h + v[n]`

C. `w[n+1] = g/r*np.sin(v[n]*h-b/m*w[n] + w[n]*h`
   `v[n+1] = w[n]*h`

D. `w[n+1] = (g/r*np.sin(v[n])*h-b/m*w[n]*h**2 + w[n]`
   `v[n+1] = w[n]*h + v[n]`

E. `w[n+1] = (-g/r*np.sin(v[n])-b/m*w[n])*h + w[n]`
   `v[n+1] = w[n]*h + v[n]`

Solution: Om vi setter opp Newtons 2. lov for systemet får vi likningen

$$ma = -mg\sin\theta - bv(t)$$

Vi endrer så til vinkelstørrelser, deler på r og m, og får da

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(g/r)\sin\theta - (b/m)\omega$$

Skriver dette som to koblede differensiallikninger

$$\begin{aligned}\tfrac{d\omega}{dt} &= -(g/r)\sin\theta - (b/m)\omega(t)\\ \tfrac{d\theta}{dt} &= \omega(t)\end{aligned}$$

Disse likningene diskretiseres så som

$$\begin{aligned}\omega_{n+1} - \omega_n &= (-(g/r)\sin\theta_n - (b/m)\omega_n)\cdot\Delta t\\ \theta_{n+1} - \theta_n &= \omega_n\cdot\Delta t\end{aligned}$$

Fysiske konstanter

$g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$

$k_\mathrm{B} = 1,3807 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$

$N_\mathrm{A} = 6,02 \cdot 10^{23}$

$R = N_\mathrm{A} k_\mathrm{B} = 8,31\ \mathrm{Jmol^{-1}K^{-1}}$

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2\ N^{-1}\ m^{-2}}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$

$k = 8,99 \cdot 10^{9}\ \mathrm{Nm^2C^{-2}}$

$e = 1,60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$

$m_\mathrm{e} = 9,11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$

$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2/K^4}$

Mekanikk

$\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$

$\mathbf{s}(t) = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$

$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

$\dfrac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$

$W = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$

$K = \frac{1}{2}mv^2$

$W_{tot} = \Delta K$

$\mathbf{F} = -\nabla U$

$F_\mathrm{f} \le \mu_s F_\perp$

$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$b = \theta r,\ v = \omega r,\ a = \alpha r$

$K_\mathrm{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$

$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$

$I = \sum_i m_i \mathbf{r}_i^2$

$I_r = I_0 + Mr^2$

$\mathbf{r_{cm}} = \dfrac{1}{M_\mathrm{tot}} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$

$L = I\omega$

$\mathbf{J} = \Delta\mathbf{p} = \int \mathbf{F}dt$

$\mathbf{F} = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$

Svingninger

$x'' + \omega_0^2 x = 0$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$T = 2\pi/\omega$

$f = 1/T$

Termisk fysikk

n (antall mol)

$N = nN_\mathrm{A}$ (antall molekyler)

$\Delta U = Q - W$

$pV = nRT$

$pV = N\frac{2}{3}K_\mathrm{avg}$

$W = \int pdV$

$dQ = nCdT$

$C_\mathrm{V} = \frac{3}{2}R$ (en-atomig)

$C_\mathrm{V} = \frac{5}{2}R$ (to-atomig)

$C_\mathrm{P} = C_\mathrm{V} + R$

$\gamma = \dfrac{C_\mathrm{P}}{C_\mathrm{V}}$

$PV^\gamma =$ konst (adiabatisk)

$TV^{\gamma-1} =$ konst (adiabatisk)

$\eta = \frac{W}{Q_H}$

$K = \frac{Q_C}{W}$

$\eta_\mathrm{Carnot} = 1 - \frac{T_c}{T_h}$

$dS = \dfrac{dQ_{rev}}{T}$

$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$

$\Delta V = \beta V_0 \Delta T$

$H_c = -kA\dfrac{dT}{dx}$

$H_r = Ae\sigma T^4$

Elektrisitet og magnetisme

$\mathbf{F} = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$

$\mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{F}}{q}$

$\Delta V = -\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds}$

$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{dA}$

$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$

$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$

$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0(I + \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt})$

$d\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I \dfrac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

$d\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} q \dfrac{d\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

$\mathbf{F} = q(E + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

$\boldsymbol{\tau} = \mu \times \mathbf{B}$

$\mu = IA$

$C = \frac{Q}{V}$

$V = RI$

$R = \rho\dfrac{L}{A}$

$M = \frac{N_2 \Phi_2}{i_1}$

$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt}$

Annet

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \cdots}$$

Vedlegg 1: Svarark (riv av og lever med eksamensomslag)
Kandidatnummer:
Fagkode:

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					
25					
26					
27					
28					
29					
30					