INSTITUTT FOR FYSIKK

LØSNINGSFORSLAG/SENSORVEILEDNING
EKSAMEN I EMNE TFY 4125 FYSIKK
Eksamen Aug 2021
Tid: kl. 0900 – 1300.

I dette løsningsforslaget er oppgavene organisert i samme rekkefølge som angitt i pdf av oppgavesettet.

Oppgave 1

Løsningen finnes ut fra hvor lang tid det tar før raketten har ramlet ned igjen.
Når rakettmotoren har sviktet, har raketten nådd en høyde og har hastighet:

$$z_s = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0.5 \cdot 2,25 \cdot (15,4)^2 \text{ m} = 266,8\,\text{m}$$

$$v_s = v_0 + at = 0 + 2,25 \cdot 15,4\text{m/s} = 34,65\,\text{m/s}$$

Etter at rakettmotoren har sviktet er utviklingen av z som funksjon av t (med referanse tidspunkt for svikt) gitt ved:

$$z(t) = z_s + v_s t - \frac{1}{2}gt^2$$

Tiden det tar etter svikt av rakettmotoren før den krasjer er gitt ved å løse z(t) = 0.

$$z(t) = z_s + v_s t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad => \quad t^2 - \frac{2v_s}{g}t - \frac{2z_s}{g} = 0$$

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{2v_s}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{2v_s}{g}\right)^2 + 4\frac{2z_s}{g}}\right)$$

Med numeriske verdier: kun + tegnet som er fysisk mulig; t = 11,7 s
Total tid etter oppskyting: 11,7s+15,4 s = 27,1 s

Oppgave 2

Vi har at

$$a = \frac{dv}{dt} = v_0 \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = v_0 \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Maks akselerasjon ved t=0;

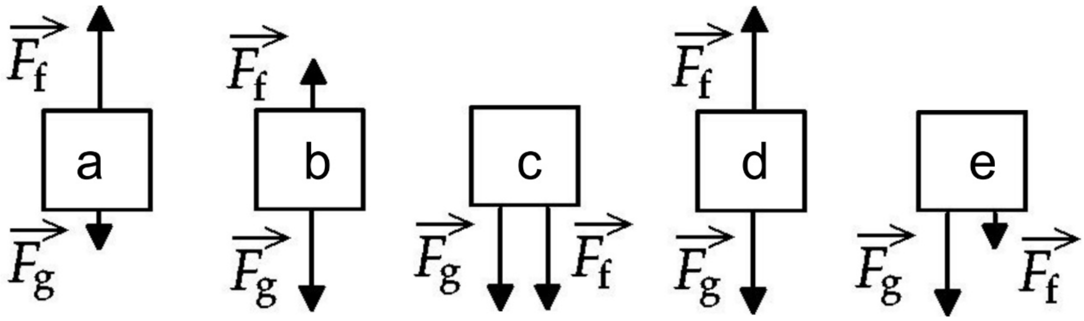
$$a_{\max} = \frac{v_0}{\tau}$$

Akselerasjon ved t=1,5s:

$$a = v_0 \frac{1}{\tau} e^{-1.5s/1,4s} = a_{\max} e^{-1.5s/1,4s} = a_{\max} \cdot 0,343$$

Dvs 34.3% av initiell aksellerasjon

Oppgave 3



Fri legeme diagram

Tyngdens aksellerasjon er mg, rettet nedover, mens summen av denne og kraften fra gulvet gir en kraft som er rettet nedover, men noe mindre enn det som tilsvarer tyngdekraften alene.

Av de 5 mulige: a og d: nettokraft opp – utelukket; c og e: nettokraft nedover, men større enn det som tilsvarer fra g alene; b: nettokraft ned, mindre i størrelse enn det som gjelder g alene.

Dvs: skisse b) rett mulighet

Oppgave 4

Vi har at $F = ax + bx^3$, med a= -4,0 N/m og b=2,0 N/m^3

Potensiell energi knyttet til denne kraften:

$$U(x) = -\int F dx = -\int (ax + bx^3)dx = -\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{4}bx^4 + konst$$

Det er knyttet en endring i potensiell energi til forflytning fra x=1,0 m til x= 2,0m som gitt:

$$\Delta U = U(x = 2m) - U(x = 1m) = -2a\mathrm{m}^2 - 4b\mathrm{m}^4 + \frac{1}{2}a\mathrm{m}^2 + \frac{1}{4}b\mathrm{m}^4 = -\frac{3}{2}a\mathrm{m}^2 - \frac{15}{4}b\mathrm{m}^4 = +\frac{3}{2}4\mathrm{Nm} - \frac{15}{2}\mathrm{Nm} = -1{,}5\ \mathrm{Nm} = \text{-1.5 J}$$

Oppgave 5

Friksjonskrafta er konstant så lenge kula glir. I dette regimet er

$$F_f = -\mu_k mg$$

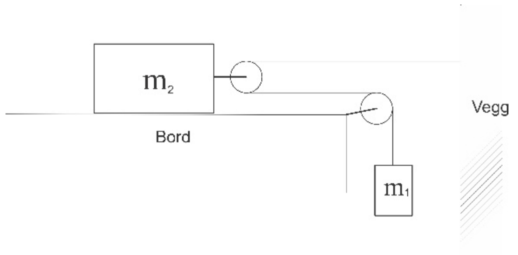
(retning: mot bevegelseretningen, dvs mot venstre i figuren)

Friksjonskraften er eneste kraften i horisontal retning, og bruk av N2 gir:

$$F_f = -\mu_k mg = ma$$

$$a = -\mu_k g$$

Oppgave 6



Draget i festet til kloss 2 gir akselerasjon til kloss 2:

$T_2 = m_2 a_2$

Netto kraft på kloss 1 gir opphav til akselerasjon av denne:

$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$

Netto drag på festet til kloss 2 er balansert av to like store drag i tauet – den ene enden festet via sylinderen til kloss 1 og den andre til veggen:

$T_2 = 2T_1$

Når kloss 1 beveger seg vil den dra med seg kloss 2, men med halve distansen på grunn av festeanordningen. Det gir følgende sammenheng mellom de to akselerasjonene:

$a_1 = 2a_2$

Vi har nå 4 likn for de 4 ukjente ($T_1, T_2, a_1,$ og a_2) og likningssettet kan løses.

$T_2 = m_2 a_2$ => $2T_1 = m_2 a_2$

$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$ => $m_1 g - T_1 = 2m_1 a_2$

Eliminerer T1:

$2m_1 g = 4m_1 a_2 + m_2 a_2$

Og omarbeider:

$$a_2 = \frac{2m_1 g}{4m_1 + m_2}$$

Med de oppgitte numeriske verdier: a = 3,46 m/s^2

Oppgave 7

Ved ren rulling er akselerasjonen $a = \alpha R$. Vinkelakselerasjonen av sylinderen kommer fra friksjonskraften (mellom sylinderen og bordet), F_f. – denne har retning mot venstre i figur til oppgaven. Bruk av Newtons 2lov for translasjon:

$Mg - F_f = 2Ma$

og for rotasjonsbevegelsen av sylinderen:

$\tau = I\alpha$ => $\tau = RF_f = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R}$

Gir sammenheng mellom friksjonskraft og akselerasjon:

$F_f = \frac{1}{2}Ma$

Eliminerer Ff ved å sette inn i uttrykket for N2 for translasjon:

$Mg - F_f = Mg - \frac{1}{2}Ma = 2Ma$

Som gir:

$a = \frac{2}{5}g$

Oppgave 8
Mgh: potensiell energi; hvor mye masse (av vann) faller i løpet av 1s?
Volum av vann som går ut over fossen pr s:
$4.0\text{m}\cdot 0.75\text{m}\cdot 1.6\,\text{m/s} = 4.8\text{m}^3/\text{s}$
Endring i potensiell energi pr tidsenhet:
$$P_{inn} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t} = 4800\,kg^3/s\,9.81m/s^2\,4.0m = 188,4\cdot 10^3\,kgm^2s^{-2}\,m/s = 188,4kW$$
Med 20% virkningsgrad:
$$P_{ut} = 0.2\cdot P_{inn} = 0.2\cdot 188,4\cdot 10^4\,W = 37,7kW$$

Oppgave 9

Flaggstangas totale mekaniske energi i vertikal posisjon (der vi velger potensiell energi U = 0 på bakkenivå):
$E_{vertikal} = MgL/2$
Når stanga er horisontal er den potensielle energien redusert, og i tillegg er det en kinetisk energi knyttet til rotasjonen:
$U_{horisontal} = MgL/5$; som gir: $K_{horisontal} = E_{vertikal} - U_{horisontal} = \frac{1}{2}MgL - \frac{1}{5}MgL = \frac{3}{10}MgL$
Vi finner omega ved å benytte :
$$K_{horisontal} = \frac{1}{2}I_A\omega^2 = \frac{3}{10}MgL$$
Hvor I_A er treghetsmomentet for flagstanga rundt aksen A.
Fra Steiners sats:
$$I_A = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{3L}{10}\right)^2 = \frac{13}{75}ML^2$$
$$\omega^2 = \frac{3MgL}{5I_A} = \frac{3MgL\cdot 75}{5\cdot 13ML^2} = \frac{45g}{13L}$$
Med L = 5.0 m, gir dette ω=2,606 rad/s. Toppen av stanga roterer om A langs en sirkelbane med radius 4 m, som gir v = 2,606 /s 4,0 m = 10,4 m/s

Oppgave 10

Da ingen ytre krefter virker er spinnet *L* konstant: $L = I\omega$. Siden det ikke er noe endring av L:
$L = I\omega = I_{før}\omega_{før} = I_{etter}\omega_{etter}$.

Den kinetisk energien er gitt av rotasjonsenergien: $E_k = \frac{1}{2}I_{før}\omega^2{}_{før} = L_{før}\omega_{før}$

Og etter: $E_{k,etter} = \frac{1}{2}I_{etter}\omega^2{}_{etter} = L_{etter}\omega_{etter}$

Siden L er den samme: $E_{k,etter} = L_{før}\omega_{etter}$ og siden $\omega_{etter} > \omega_{før}$ på grunn av L = konstant og I blir mindre, vil den kinetiske energien øke. (det gjøres arbeide ved å trekke bøkene nærmere kroppen slik at energien øker).

Rett mulighet: L = konstant, E_k øker

Oppgave 11
Dette er et støt mellom to roterende skiver. Spinnet (dreieimpulsen), L_{tot}, er bevart i alle støt. Dermed halveres vinkelhastigheten etter støtet.

Total kinetisk (rotasjons)energi etter støtet:

$$E_{etter} = 2\frac{1}{2}I\omega_{etter}^2 = I\left(\frac{\omega_{før}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}I\omega_{før}^2 = \frac{1}{2}E_{før}$$

Oppsummert: L er uendra mens E er redusert til halvparten av opprinnelig verdi

Oppgave 12 – fysisk pendel – gulvur

Svingetiden for en fysisk pendel er:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

I dette uttrykket er m pendelens totale masse, I er treghetsmoment omkring svingeaksen, og d er avstanden fra svingeaksen til massesenteret.
I det aktuelle tilfellet:

m = 2M; d = 3L/4; og I er gitt ved (fra Steiners sats): $I = ML^2 + ML^2/3 = \frac{4}{3}ML^2$

Settes dette inn i uttrykket for T:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4ML^2\cdot 4}{3\cdot 2Mg\cdot 3L}} = 2\pi\sqrt{\frac{8L}{9g}}$$

Løst mhp L:

$$L = \frac{9g}{8}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

Med numeriske verdier: L = 1,12 m

Oppgave 13

Summen av kreften gir opphav til sentripetalakselIerasjon:

$$\sum\left|\vec{F}\right| = \left|\vec{F}_g\right| + \left|\vec{N}\right| = m\left|\vec{a}\right| = m\frac{v^2}{r}$$

Anvendt på situasjonen at total masse er M+m:

$$(m+M)g + N = (m+M)\frac{v^2}{r}$$

Minste hastighet på kula som skal skytes inn: normalkraft fra banen på kula ved toppunkt: N = 0:

Dette gir følgende uttrykk for hastighet til kula+kloss ved toppunkt:

$$(m+M)g = (m+M)\frac{v^2}{r} \quad => \quad v_{topp} = \sqrt{gr}$$

Bevaring av mekanisk energi ved topp i forhold bunn rett etter at kula har blitt skutt inn, gir et uttrykk for hastighet til kula+kloss ved bunn (etter fullstentig uelastisk støt:)

$$E_{topp} = \frac{1}{2}(m+M)v_{topp}^2 + (m+M)g\cdot 2r$$

hvor potensiell energi er regnet relativt bunn av vertikal sirkulær bane.

$$E_{topp} = \frac{1}{2}(m+M)v_{topp}^2 + (m+M)g\cdot 2r = \frac{1}{2}(m+M)g\cdot r + 2(m+M)g\cdot r = \frac{5}{2}(m+M)g\cdot r$$

Mekanisk energi ved bunn av banen rett etter støt:

$$E_{bunn} = \frac{1}{2}(m+M)v_{bunn}^2 + (m+M)g\cdot 0 = \frac{1}{2}(m+M)v_{bunn}^2$$

Energibevaring gir: $E_{bunn} = E_{topp}$ => $v_{bunn} = \sqrt{5gr}$

Beregner minste hastighet til kula ved å bruke bevaring av bevegelsesmengde i støtet:

$$mv_{kule} + Mv_M = (m+M)v_{bunn}$$

hvor v_M er hastighet til kloss med masse M før kula skytes inn, og siden den er i ro: $v_M = 0$.

Løst mht kula's hastighet:

$$v_{kule} = \frac{m+M}{m} v_{bunn} = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gr}$$

Med numeriske verdier: m = 10g, M = 1,5 kg, r= 20 cm: vkule = 473 m/s

OPPGAVE 14

Vertikalkomponenten av krafta fra hengslingen, F_y, finnes enklest fra momentbalanse om høyre endepunkt av bjelken: $F_y \cdot L = m_b\, g \cdot L/2$

$F_y = m_b g /2 = 0{,}5\ 150\text{N} = 75\text{N}$.

Oppgave 15

Likn som beskriver dempede svingninger:

$$x(t) = Ae^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)$$

Observasjonene om at amplituden til svingninene reduseres fra 10 til 5 mm kan vi angi som:

$$A = 10{,}0\,\text{mm}$$

$$Ae^{-15\text{s}b/2m} = 5{,}0\text{mm}$$

$$e^{-15\text{s}b/2m} = 5{,}0\text{mm}/10{,}0\text{ mm} = 0{,}5$$

$$b = -\frac{2m}{15\text{s}}\ln(0,5)$$

Med numeriske verdier: b= 0.00693 kg/s

Oppgave 16

Resonansfrekvensen er:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2{,}5}{0{,}100}}s^{-1} = 5{,}0\,s^{-1}$$

Dempingsfaktor

$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{100}{0{,}200}s^{-1} = 500\,s^{-1}$$

Systemet: er sterkt dempet. Med dette utgangspunktet vurderer vi de to komponentene av den generelle løsningen:

$$x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$$

hvor: $\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ og $\alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

For α_1: $\alpha_1 = 2\gamma$ siden $\gamma^2 >> \omega_0^2$

For α_2: $\alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \gamma - \gamma\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}\right)^{1/2} = \gamma - \gamma\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} + +\right) \cong \frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{\gamma} = \frac{k}{b}$

Siden $2\gamma = 1000\,s^{-1} >> k/b = 0{,}025\,s^{-1}$ er det komponenten med α_2 som blir bestemmende.

Dvs: $x(t) = x_0 e^{-\alpha_2 t} = x_0 e^{-kt/b}$

hvor initialverdien er gitt ved: $x_0 = x(t=0) = 15cm$

Tiden det tar før x er redusert til 5,0cm er bestemt av:

$x_0 e^{-kt/b} = 5cm$; $15/5 = e^{kt/b}$ => $t = \frac{b}{k}\ln 3 = 40\ln 3 s = 44s$

Oppgave 17

Figuren viser avbøyning av en ladet dråpe ved hjelp av et elektrisk felt mellom to plater. En dråpe blekk med masse m = 1.3 10^{-7} g og ladning Q = -1.5 10^{-13} C kommer inn langs x-aksen med hastighet v = 20 m/s ved inngangen til avbøyningsplatene. Lengden på avbøyningsplatene er L = 1.5 cm. Det elektriske feltet mellom avbøyningsplatene er $\vec{E} = -1.4\cdot 10^{6}\,\mathrm{N/C}\,\vec{j}$

Hva er den vertikale posisjonen til dråpen med blekk ved utgangen av avbøyningsplatene?

Det elektriske feltet setter opp en kraft langs y-retningen, som gir opphav til akselerasjon av partikkelen i y-retningen:

$$a_y = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m}$$

Siden dråpen er negativt ladet og E er i negativ y-retning, vil kraften peke i positiv y retning. Vi angir tiden det tar for dråpen til å passere avbøyingsplatene med *t*. Denne parameteren er gitt ved fra L = v t.
Avbøyning langs y-aksen ved utgangen:

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2}\frac{QE}{m}\left(\frac{L}{v}\right)^2$$

med numeriske verdier:

$$y = \frac{1}{2}\frac{QE}{m}\left(\frac{L}{v}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{1.5\cdot 10^{-13}\,1.4\cdot 10^{6}\,\mathrm{N}}{1.3\cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg}}\left(\frac{1.5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{m/s}}\right)^2 = 0.45\mathrm{mm}$$

Oppgave 18

Det elektriske feltet satt opp av ringen i et punkt på aksen er gitt av:

$$E_z = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

En finner fram til dette ved et bueelement ds med total ladning λds gir et bidrag dE cosθ til det elektriske feltet på z-aksen i en avstand r fra ds. Her er λ lineær ladningstetthet til ringen. Videre gjelder: $r^2 = R^2 + z^2$ og

$$\cos\theta = z/r = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$dE_z\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\lambda ds}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Det totale elektriske feltet i avstand z finnes ved å integrere ds rundt ringen:

$$E_z = \int dE_z\cos\theta = \int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\lambda ds}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\lambda}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\lambda 2\pi R}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Den totale ladningen til ringen er relatert til ladningstettheten ved: , som gjør at vi finner gitt uttrykk for Ez.

For et elektron plassert på z-aksen gir dette en kraft:
F = eE_z
Med retning mot z=0. Dette fører til en akselerasjon i retning av kraften: $m_e a_z = \frac{|e|Qz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$

Kan da innføre den deriverte av posisjonen og samle leddene på samme side av likn:

$$m_e \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{|e|Q}{4\pi\varepsilon_0 \left(z^2+R^2\right)^{3/2}} z = 0$$

Vi har videre gitt att z<<R i utgangsposisjonen. Dette innebærer at vi

$$m_e \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{|e|Q}{4\pi\varepsilon_0 \left(z^2+R^2\right)^{3/2}} z = m_e \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{|e|Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} z = 0$$

Når en sammenholder med likn for harmonisk oscillasjon: $m\frac{d^2z}{dt^2} - kz = 0$ hvor løsningen gir vinkelfrekvens

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Ser en samlet sett at elektronet vil gjennomgår harmoniske svingninger med vinkelfrekvens:

$$\omega = \sqrt{\frac{|e|Q}{4\pi\varepsilon_0 m_e R^3}}$$

Oppgave 19

Når ionene akselereres ved hjelp av potensialet V mellom elektrodeparet (A-B), vil de oppnå en kinetisk energi lik qV (endring i potensiell energi). Dette gir følgende likn for hastigheten til ionene (bruker indeks i, og i=1,2)

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = q_1V \,;\; \frac{1}{2}mv_2^2 = q_2V$$

Dette gir: $v_1 = \sqrt{\frac{2q_1V}{m_1}}$ og $v_2 = \sqrt{\frac{2q_2V}{m_2}}$

for hver av ionene når de kommer ut av spalten av elektrode B og starter på området hvor det er et magnetfelt. Kraften på ionene når de kommer inn i magnetfeltet er gitt ved:

$$F_i = qv_iB_0$$

Retningen på kraften fra magnetfeltet på ionene er vinkelrett på bevegelsesretningen til ionene. Dette gir opphav til sentripetalkraft som er lik

$$\frac{m_iv_i^2}{r_i}$$

Løst mht radiene:

$$F_i = qv_iB_0 = \frac{m_iv_i^2}{r_i} \qquad \Rightarrow r_1 = \frac{m_1v_1}{q_1B_0} = \frac{m_1}{q_1B_0}\sqrt{\frac{2q_1V}{m_1}} = \frac{1}{B_0}\sqrt{\frac{2m_1V}{q_1}};$$

$$r_2 = \frac{1}{B_0}\sqrt{\frac{2m_2V}{q_2}}$$

Forhold mellom de to radiene blir da:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{B_0}\sqrt{\frac{2m_1V}{q_1}}\frac{B_0\sqrt{q_2}}{\sqrt{2m_2V}} = \sqrt{\frac{m_1\,q_2}{q_1\,m_2}}$$

For den aktuelle situasjonen er m2 = 4m1:

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{m_1\,q_2}{q_1\,m_2}} = \sqrt{\frac{m_1\,q_2}{q_1\,4m_1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}$$

Oppgave 20

potensial til endelig lang leder

Ladning for et lite stykke av lederen med lengde dx: $dq = \lambda dx$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{(x^2+d^2)^{1/2}}$$

Det totale potensial finnes ved å integrere bidragene langs staven fra x=0 til x=L:

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x=0}^{L}\frac{\lambda dx}{(x^2+d^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(x+(x^2+d^2)^{1/2}\right)\right]_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(L+(L^2+d^2)^{1/2}\right)-\ln d\right]$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{L+(L^2+d^2)^{1/2}}{d}\right]$$

(integralet: Oppslag i tabell – Rothman; det er også et lignende eksempel i læreboka (men fra -a<x<a; dvs P er symmetrisk i forhold til lengdeaksen til staven

OPPGAVE 21

Alternativ 3

Oppgave 22

Omsluttet magnetisk fluks endres ikke dersom spolen trekkes i y-retning, dvs parallelt med den lange strømførende lederen.

Oppgave 23

$$B = \frac{\mu_0 I n}{L}$$

Den gjensidige induktansen M er definert av $\varepsilon_2 = -M\frac{dI_1}{dt}$

Vi lar indeks 1 referere til spolen og 2 til lederen rundt spolen. Faradays lov gir at den induserte induserte emf i lederen i spolen er gitt av

$\varepsilon_2 = -N\frac{d\Phi_{B2}}{dt}$ hvor Φ_{B2} er magntisk fluks gjennom lederen rundt spolen. I oppgaven er det antatt at magnetfeltet er neglisjerbart utenfor spolen, og vi har da $\Phi_{B2} = \Phi_{B1} = BA$

$$M = \frac{-\varepsilon_2}{dI_1/dt} = \frac{N\,d\Phi_{B2}/dt}{dI_1/dt} = \frac{N\,AdB/dt}{dI_1/dt} = \frac{N\,A\mu_0 n\,dI_1/dt}{LdI_1/dt} = NA\mu_0 n/L$$

Oppgave 24

Tverrsnitt av en vegg bestående av lag med furupanel (lag a), to lag med ukjent materiale, men kjente tykkelser, og et utvendig lag med murstein (lag d) med tykkelse L_d. Arealet er A på alle disse.

På en vinterdag med konstant utetemperatur T_5 = -10 °C og innetemperatur T_1 = 25 °C har vi observert at temperaturen T_2 på innsiden av furupanelet er 20 °C.

Hva er temperaturen på innsiden av mursteinsveggen (T_4)?

Ved stasjonær tilstand er varmestrømmen gjennom alle lagene den samme, For lag a og d:

$$\kappa_a = k_a A\left(T_2 - T_1\right)/L_a \text{ og } \kappa_d = k_d A\frac{T_5 - T_4}{L_d}$$

Siden disse er like: $\kappa_a = k_a A\dfrac{T_2 - T_1}{L_a} = \kappa_d = k_d A\dfrac{T_5 - T_4}{L_d}$

Løst mht T4: $T_4 = T_5 + \dfrac{k_a L_d}{k_d L_a}(T_2 - T_1)$

Med numeriske verdier: $T_4 = -10 + \dfrac{k_a 2L_a}{5k_a L_a}(25-20)\,°C = -8°C$

Oppgave 25

Ikke mulig å omgjøre all varme helt til arbeid i en syklisk prosess

Oppgave 26

En ideell to-atomig gass har initielt et trykk p = 2,5 10^5 Pa og et volum 5,0 10^{-6} m^3. Hvor mye arbeid utføres av gassen ved en adiabatisk ekspansjon fra denne initialtilstanden til et dobbelt så stort volum?

Arbeidet som utføres beregnes fra:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$$

hvor V_1 = 4,0 10^{-6} m^3 og V_2 = 8,0 10^{-6} m^3. Sammenheng mellom trykk og volum langs den adiabatiske prosessen er gitt ved:

$$pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma$$

hvor $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p_1 V_1^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = p_1 V_1^\gamma \frac{1}{-\gamma+1} V^{-\gamma+1}\Big|_{V_1}^{V_2} = p_1 V_1^\gamma \frac{1}{-\gamma+1}\left(V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}\right)$$

For en to-atomig gass er: $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = \dfrac{7}{2}R\left(\dfrac{5}{2}R\right)^{-1} = 1,4$

Dette gir med numeriske verdier som er oppgitt: W = 0,76 J

Oppgave 27

I en isoterm prosess er tilført varme like stor som utført arbeid siden det ikke er noe endring i indre energi (T er konstant); $\Delta U = Q - W = 0$. Dette gjelder både for delprosess 1-> 2 (ekspansjon) og 3->4:

$Q_H = W_H = nRT_H \ln(V_2/V_1)$

$Q_L = W_L = nRT_L \ln(V_4/V_3)$

Her er W_L (Q_L) negativ siden $V_4 < V_3$

$Q_L = W_L = nRT_L \ln(V_4/V_3) = nRT_L \ln(V_1/V_2) = -nRT_L \ln(V_2/V_1)$

Netto nyttbart arbeide blir $W = W_H + W_L = nRT_H \ln(V_2/V_1) - nRT_L \ln(V_2/V_1) = (T_H - T_L) nR \ln(V_2/V_1)$

Virkningsgraden er netto nyttbart arbeide relativt til tilført varmemengde,

$Q_{inn} = Q_{41} + Q_H = nC_V(T_1 - T_4) + nRT_H \ln(V_2/V_1)$

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_{inn}} = \frac{(T_H - T_L) nR \ln(V_2/V_1)}{nC_V(T_1 - T_4) + nRT_H \ln(V_2/V_1)} = \frac{(T_H - T_L) \ln(V_2/V_1)}{(\mathrm{C_V}/R)(T_1 - T_4) + T_H \ln(V_2/V_1)} = \frac{385 \ln(2,5)}{385 \cdot \frac{5}{2} + (273,15 + 460) \ln(2,5)} = 0,22$$

Oppgave 28

En ideell gass befinner seg i en tilstand (1) hvor temperaturen til gassen er T_1. Det tilføres en varmemengde Q_V til gassen når temperaturen til den økes fra T_1 til T_2 i en isokor prosess.

Vi betrakter alternativet av en isobar prosess fra tilstand (1), og tilfører en varme Qp til den samme gassen. Tilførsel av Q_p til gassen fra tilstand (1) i den isobare prosessen fører til en temperaturøkning fra T_1 til T_2.

Påstanden $Q_p > Q_V$; er korrekt

Fra 1. Hovedsetning: $Q = \Delta U + W$.
Temp. øker likt i begger prosessene innebærer at $\Delta U > 0$ og lik i begge prosessene. Konstant volum gir at $W = 0$. Volumet må øke når T skal øke med konstant trykk, dvs. $W > 0$, dermed er Q_p størst. Eller: $Q_p = nC_p T > nC_V T = Q_V$ fordi $C_p > C_V$.

Oppgave 29

To like blokker av kopper (spesifikk varme til Cu er 386 J kg^{-1} K^{-1}, begge med samme masse, m = 2.0 kg, befinner seg i to ulike, termisk isolerte områder inndelt i to områder ved hjelp av en lamell. Kopperblokk 1 befinner seg ved romtemperatur, T_1 = 70 °C og kopperblokk 2 ved en temperatur, T_2 = 20 °C. Lamellen mellom de to områdene skyves ut, og de to kobberblokkene kommer etter hvert til en ny termisk likevekt. Hva er den totalt entropiendringen til de to kopperblokkene når de endrer temperaturen til den nye likevektstemperaturen?

Varmeutvekslingen mellom de to kopperblokkene er irreversibel, og for å kunne gjøre en beregning av entropiendringen må den basere seg på en ekvivalent reversibel prosess som bringer systemet fra start til sluttilstanden. I den ekvivalente reversible prosessen som legges til grunn for beregningen knytter vi kopperklossene til et termisk reservoar som vi kan sakte (reversibelt) kan endre temperaturen til.

Vi starter med reservoaret ved T = 70 °C og bringer kloss 1 i termisk kontakt med reservoaret. Siden de har samme temperatur er det ikke noe varmestrøm. Vi reduserer temperaturen sakte til likevektstemperaturen (T_L =45 °C), varmemengden dQ som fjernes (siden T reduseres) fra kloss 1 er

$dQ = m\,c\,dT$ hvor m er massen til Cu-blokken og c er spesifikk varme til Cu,

Entropiendring til kloss 1 ved kjøling fra 70 °C til 45 °C finnes ved:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_L} \frac{m\,c\,dT}{T} = m\,c \int_{T_1}^{T_L} \frac{dT}{T} = mc \ln\left(T_L / T_1\right)$$

På tilsvarende måte: entropiendringen til kloss 2 ved oppvarming fra 20 °C til 45 °C:

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_L} \frac{m\,c\,dT}{T} = m\,c \int_{T_2}^{T_L} \frac{dT}{T} = mc \ln\left(T_L / T_2\right)$$

og den totale entropiendringen er $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$

Numeriske verdier

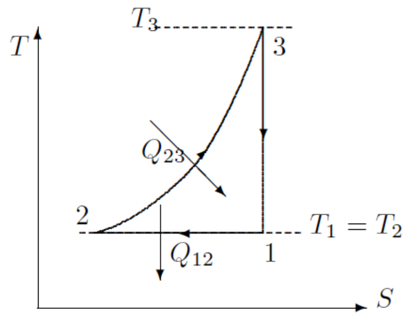
$$\Delta S_1 = mc \ln\left(T_L / T_1\right) = 2.0\,kg\,386\,J\,kg^{-1}\,K^{-1} \ln\left(318.15/343.15\right) = -58.4\,J/K$$

$$\Delta S_2 = mc \ln\left(T_L / T_1\right) = 2.0\,kg\,386\,J\,kg^{-1}\,K^{-1} \ln\left(318.15/293.15\right) = 63.2\,J/K$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 4.8\,J/K$$

En arbeidssubstans av *n* mol gass gjennomgår en syklisk kretsprosess satt sammen av en isoterm, en isobar og en adiabatisk delprosess i ett temperatur – entropi (T-S) diagram (Figur).

Oppgave 30



Hvilken likning beskriver endringen av temperaturen langs delprosessen fra tilstand 2 til 3?

I T-S diagrammet er isotermen en horisontal linje (konstant T) og adiabaten (isoentropisk prosess) en vertikal linje. Isobaren knytter sammen tilstandene 2 og 3. En kan finne fram til sammenhengen mellom T og S:
For isobar delprosess er

$$dQ = TdS \text{ og } dQ = nC_p dT$$

Sammenholdt finner en $dS = nC_p \dfrac{dT}{T}$

Integrasjon av dette ut fra referansetilstand 2:

$\int_{S_2}^{S} dS = nC_p \int_{T_1}^{T} \dfrac{dT}{T}$ $\qquad S - S_2 = nC_p \ln\left(T/T_1\right)$ hvor det er brukt at $T_1 = T_2$

Løst mhp T: (ved en gitt entropi S):

$$T = T(S) = T_1 \cdot \exp\left\{\frac{S - S_2}{nC_p}\right\} = T_1 \cdot \mathrm{e}^{\left((S-S_2)/nC_p\right)}$$