Løsningsforslag TFY4125 Fysikk Eksamen 27. mai 2022

Det var hjemmeeksamen med 6 varianter (ulike tallverdier) av hver oppgave. Svarene nedenfor gjelder for (den tilfeldige) varianten `E_TFY4125_220527.pdf`.

1) Middelverdien av $\sin^2 \omega t$ over en eller flere hele perioder er 1/2. Gjennomsnittsfarten er derfor:

$$\boxed{\langle v \rangle = v_0/2.}$$

Eks: Hvis $v_0 = 7.0$ km/h er $\langle v \rangle = 7.0/(2 \cdot 3.6)$ m/s $= 0.97$ m/s.

2) På et lite tidsintervall dt tilbakelegges en strekning $ds = v(t)\,dt$. Integrasjon fra $t = 0$ til $t = \pi/\omega$ gir deretter avstanden mellom to poster. Eller rett og slett:

$$\boxed{s = \langle v \rangle \cdot \pi/\omega.}$$

Eks: Med $\omega = 0.0020$ s^{-1} er $s = 0.97\pi/0.0020$ m $= 1.53$ km.

3) Akselerasjonen er $a(t) = dv/dt = 2\omega v_0 \sin \omega t \cos \omega t = \omega v_0 \sin 2\omega t$, som har maksimal verdi:

$$\boxed{a_{\text{max}} = \omega v_0.}$$

Eks: Med v_0 som over er $a_{\text{max}} = 0.0020 \cdot 1.944$ m/s^2 $= 0.39$ cm/s^2.

4) Agentens baneakselerasjon: $a = dv/dt = (v_0/\tau)\exp(-t/\tau)$. Denne er maksimal helt i starten, ved $t = 0$:

$$\boxed{a_{\text{max}} = v_0/\tau.}$$

Eks: Med $v_0 = 11$ m/s og $\tau = 26$ s er $a_{\text{max}} = 11/26$ m/s^2 $= 0.42$ m/s^2.

5) Etter lang tid er farten v_0, og sentripetalakselerasjonen:

$$\boxed{a_\perp = v_0^2/r.}$$

Eks: $v_0 = 11$ m/s og $r = d/2 = 3.5$ m gir $a_\perp = 11^2/3.5$ m/s^2 $= 34.57$ m/s^2 $= 3.52g$.

6) Omløpt vinkel i løpet av en tid dt er $d\phi = \omega\, dt = v\, dt/r$. I løpet av en tid t:

$$\phi(t) = \frac{v_0}{r}\int_0^t \left(1 - \exp(-t/\tau)\right) dt = \frac{v_0}{r}\left(t + \tau\exp(-t/\tau) - \tau\right).$$

Antall hele runder er heltallsverdien av $\phi/2\pi$:

$$\boxed{N = \left[\frac{v_0}{2\pi r}\left(t + \tau\exp(-t/\tau) - \tau\right)\right].}$$

Eks: Med $v_0 = 11$ m/s, $r = 3.5$ m, $\tau = 26$ s og $t = 60$ s er $\phi = 115.0$ rad eller 18.3 runder, dvs 18 hele runder.

7) Farten til M like før kollisjonen med m finner vi med energibevarelse: $MgL = MV_0^2 \;\Rightarrow\; V_0 = \sqrt{2gL}$. Impuls- og energibevarelse i kollisjonen gir ligningene $MV_0 = mv_1 + MV_1$ og $MV_0^2/2 = mv_1^2/2 + MV_1^2/2$ som gir:

$$\boxed{V_1 = V_0 \cdot (M - m)/(M + m)}$$

og $v_1 = V_0 \cdot 2M/(M + m)$.
Eks: Med $M = 70$ g, $m = 45$ g og $L = 0.50$ m blir $V_0 = 3.132$ m/s og $V_1 = 0.68$ m/s.

8) Konstant akselerasjon $-g$ vertikalt, konstant fart v_1 horisontalt, startposisjon $(x_1, y_1) = (0, L)$, landingssted $(x_2, 0)$ gir $x_2 = v_1 t_2$ og $0 = L - g t_2^2/2$. Fra siste ligning finner vi $t_2 = \sqrt{2L/g}$ og dermed, med oppgitt uttrykk for v_1:

$$\boxed{x_2 = L \cdot 4M/(M+m).}$$

Eks: Med tallverdier som i oppgave 7 blir $x_2 = 1.22$ m.
(Kommentar: Med oppgitt v_1 kombinert med V_0 fra energibevarelse kan V_1 enkelt regnes ut med bare ligningen for impulsbevarelse i oppgave 7.)

9) Trinsa endrer her kun snordragets retning og $S = s$. Akselererende kraft er tyngden mg, og total masse er $M + m$. Newtons 2. lov (N2) gir:

$$\boxed{a = mg/(M+m).}$$

Eks: Med $m = 70$ g og $M = 120$ g er $a = 3.61$ m/s^2.

10) N2 for m: $mg - s = ma$. N2 for M: $S = Ma$. N2 for rotasjon om CM til trinsa: $(s - S)R = I_0 \alpha = (mR^2/2)(a/R)$, dvs $s - S = ma/2$. De to siste ligningene gir $s = S + ma/2 = (M + m/2)a$, dvs $a = s/(M + m/2)$, som innsatt i den første ligningen gir $mg - s = s \cdot m/(M + m/2)$. Fra denne har vi endelig:

$$\boxed{s = mg \cdot (M + m/2)/(M + 3m/2).}$$

Eks: $m = 70$ g og $M = 120$ g gir $s = 0.47$ N.

11) Trinsa oppnår en vinkelhastighet som vi kan bestemme med bruk av energibevarelse like før massen m treffer gulvet: $mgh = (M+m)v^2/2 + I_0\omega^2/2$. Med $v = \omega R$ og $I_0 = mR^2/2$ blir $\omega = \sqrt{gh/(3/4 + M/2m)}/R$, og siden $T = 2\pi/\omega$ er omløpstida:

$$\boxed{T = 2\pi R \sqrt{(3/4 + M/2m)/gh}.}$$

Eks: Med $R = 0.050$ m, $h = 0.65$ m og tallverdier for M og m som i oppgave 9 og 10 finner vi $T = 0.16$ s.

12) N2 gir:

$$\boxed{F = mV_0/\tau.}$$

Eks: Med $V_0 = 0.43$ m/s og $\tau = 0.0018$ s er $F = 34$ N.

13) Kulas kinetiske energi (sum av translasjons- og rotasjonsenergi):

$$\boxed{K = 7mV_0^2/10.}$$

Eks: $V_0 = 0.43$ m/s og $m = 0.141$ kg gir $K = 18$ mJ.

14) Hvis kula ruller i positiv x-retning (retning nr 1), peker "spinnet" $\boldsymbol{L}_s = I_0 \boldsymbol{\omega}$ i positiv y-retning mens banedreieimpulsen $\boldsymbol{L}_b = \boldsymbol{R}_{\mathrm{CM}} \times m\boldsymbol{V}_0$ peker inn i planet, dvs i negativ z-retning. Riktig angivelse av fortegn på komponentene av kulas totale dreieimpuls $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_s + \boldsymbol{L}_b$ er dermed $(0, +, -)$.
Tilsvarende betraktninger gir for de seks retningene:

$$\boxed{L_1 : (0 + -) \;\; L_2 : (- + 0) \;\; L_3 : (-0+) \;\; L_4 : (0 - +) \;\; L_5 : (+ - 0) \;\; L_6 : (+0-).}$$

15) Så lenge kula glir, virker en kinetisk friksjonskraft $f = \mu N = \mu mg$ mot venstre. N2 gir da ligningen $V(t) = V_0 - \mu gt$ (for CMs bevegelse) mens N2 for rotasjon om aksen gjennom kulas CM gir $\omega(t) = \omega_0 + 5\mu gt/2r$, dvs $r\omega(t) = r\omega_0 + 5\mu gt/2 = -V_0 + 5\mu gt/2$. Ren rulling tilsvarer $V(t_r) = r\omega(t_r)$, som gir:

$$\boxed{t_r = 4V_0/7\mu g.}$$

Eks: Med $V_0 = 0.43$ m/s og $\mu = 0.1$ har vi $t_r = 0.25$ s.

16) Energibevarelse gir $v^2 = v_0^2 + 20gy_0/7$, dvs:

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 20gy_0/7}.}$$

Eks: Med $v_0 = 0.15$ m/s og $y_0 = 0.030$ m er $v = 0.93$ m/s.

17) I et topp-punkt har kula sentripetalakselerasjon $a = v_0^2/R$ med retning nedover. Her er R banens krumningsradius, som i et topp-punkt er $R = 1/|y''|$, med $y'' = d^2y/dx^2 = -k^2 y_0 \cos kx = -k^2 y_0$, siden $\cos kx = 1$ på toppen. (Minustegnet tilsvarer at banen her krummer nedover.) N2 gir $mg - N = mv_0^2/R$ slik at:

$$\boxed{N = mg - mv_0^2/R = m(g - v_0^2 k^2 y_0).}$$

Eks: Med $m = 0.010$ kg, $k = 2\pi/0.8$ m^{-1} og v_0 og y_0 som i forrige oppgave er $N = 0.10$ N.

18) Posisjonen $x = 0.6$ m tilsvarer et vendepunkt. Friksjonskraften er:

$$\boxed{f = (2/7)mg\sin\beta,}$$

der banens helningsvinkel bestemmes av $\tan\beta = dy/dx = -ky_0 \sin kx$. I vendepunktet ved $x = 0.6$ m er $\sin kx = -1$ slik at $\beta = \arctan(ky_0) = 13.26°$ når $y_0 = 0.030$ m. Det gir en friksjonskraft $f = (2/7)\cdot 0.010 \cdot 9.81 \cdot 0.229\,\mathrm{N} = 6.4$ mN.

19) Farten ved vilkårlig x, fra energibevarelse:

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 + (10/7)gy_0(1 - \cos kx)}.$$

Vertikalkomponenten:

$$v_y(x) = v(x)\sin\beta(x).$$

Helningsvinkelen:

$$\beta(x) = \arctan(dy/dx) = -\arctan(ky_0 \sin kx).$$

Dermed:

$$\boxed{v_y(x) = -\sqrt{v_0^2 + (10/7)gy_0(1 - \cos kx)}\,\sin(\arctan(ky_0 \sin kx)).}$$

Eks: Ved $x = 0.26$ m er, med tallverdier som i 16-18 (og i absoluttverdi), $\beta = 11.86°$ og $v_y = 0.16$ m/s.

20) I topp- og bunnpunktene er $R = 1/y_0k^2$. Da er:

$$\boxed{\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\Delta y_0}{y_0}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta k}{k}\right)^2}.}$$

Eks: Med $\Delta y_0/y_0 = 1.5\%$ og $\Delta k/k = 2.5\%$ er $\Delta R/R = 5.2\%$.

21) Feltbidraget fra $2q$ peker mot høyre (positiv retning) mens bidragene fra de to negative $-q$ peker mot venstre. Dermed:

$$\boxed{E(2d) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(3d)^2} = -\frac{11q}{18\cdot 4\pi\varepsilon_0 d^2}.}$$

Eks: Med $q = 0.271\,e$ og $d = 116.3$ pm er feltstyrken 17.6 V/nm. Feltet peker mot venstre. De to negative ladningene "vinner" med andre ord over den ene positive.

22) Potensialbidraget fra $2q$ er positivt og fra de to $-q$ negativt:

$$\boxed{V(2d) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2d} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\cdot 3d} = -\frac{q}{3\cdot 4\pi\varepsilon_0 d}.}$$

Eks: Med $q = 0.271\,e$ og $d = 116.3$ pm er $V(2d) = -1.12$ V.

23) Potensialet V i avstand r fra en punktladning e er $V = e/4\pi\varepsilon_0 r$. Kuleflaten med potensial V har dermed radius:

$$\boxed{r = e/4\pi\varepsilon V.}$$

Eks: Med $V = 3.6$ nV er $r = 0.40$ m $= 40$ cm.

24) Feltstyrken i de to luftfylte volumene med tykkelse $d/3$ er $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/\varepsilon_0 A$. Feltstyrken inni metallskiva er null. Potensialforskjellen mellom de to ladde planene er da:

$$\boxed{V = E\cdot 2d/3 = 2Qd/3\varepsilon_0\pi r^2.}$$

Eks: Med $Q = 60$ nC, $d = 3.0$ mm og $r = 10$ cm blir $V = 432$ V.

25) Seriekoblingen av de to helt til høyre har kapasitans $(1/C + 1/C)^{-1} = C/2$. Denne er parallellkoblet med den i midten, slik at disse tre har kapasitans $C + C/2 = 3C/2$. Denne er igjen seriekoblet med de to siste, slik at total kapasitans blir:

$$\boxed{C_{\mathrm{TOT}} = (1/C + 1/C + 2/3C)^{-1} = 3C/8.}$$

Eks: Med $C = 72$ nF er $C_{\mathrm{TOT}} = 27$ nF.

26). Hver av de tre seriekoblede "enhetene" C, $3C/2$ og C må ha like mye ladning, gitt ved $Q = V_0 C_{\mathrm{TOT}} = 3V_0 C/8$. Denne fordeler seg med 2/3 på C midt i figuren og 1/3 på seriekoblingen helt til høyre. Dermed er spenningen over C midt i figuren:

$$\boxed{V = (2/3)Q/C = V_0/4.}$$

Eks: Med $V_0 = 92$ V er $V = 23$ V.

27) Seriekoblingen av de to lengst til høyre har motstand $2R$. Parallellkoblingen av denne med R i midten har motstand $(1/R + 1/2R)^{-1} = 2R/3$. Seriekoblingen av denne med de to til venstre resulterer i en total motstand:

$$\boxed{R_{\mathrm{TOT}} = 8R/3.}$$

Eks: Med $R = 30\ \Omega$ er $R_{\mathrm{TOT}} = 80\ \Omega$.

28) Total strøm i kretsen blir $I = V_0/R_{\mathrm{TOT}} = 3V_0/8R$. Av dette passerer 2/3 gjennom motstanden midt i figuren, slik at:

$$\boxed{V = V_0/4.}$$

Eks: Med $V_0 = 44$ V er $V = 11$ V.

29) Det går ingen likestrøm gjennom kondensatoren. Påtrykt spenning V_0 tilsvarer spenningsfall over en seriekobling av 3 motstander med samlet motstand $3R$. Dermed:

$$\boxed{I = V_0/3R.}$$

Eks: Med $V_0 = 40$ kV og $R = 23$ MΩ er $I = 0.58$ mA.

30) Samme spenning Q/C over kondensatoren som spenning $RI = V_0/3$ over motstanden som er parallellkoblet med kondensatoren:

$$\boxed{Q = RIC = V_0C/3.}$$

Eks: Med $C = 2.0 \cdot 10^{-6}$ F og V_0 som over er $Q = 27$ mC.

31) Umiddelbart etter at spenningskilden er koblet til har kondensatoren ingen ladning, og dermed heller ingen spenning over seg. Da har den parallellkoblede motstanden heller ingen spenning over seg, og ifølge Ohms lov heller ingen strøm gjennom seg. Med andre ord, $I_2 = 0$. Den påtrykte spenningen V_0 må da ifølge Kirchhoffs spenningsregel finnes igjen som spenningsfall over de to andre motstandene, med total motstand $2R$. Ohms lov gir nå:

$$\boxed{I = V_0/2R.}$$

Eks: Med V_0 og R som over er $I = 0.87$ mA.

32) Med startladning Q_0 er lagret elektrisk energi i utgangspunktet $U_0 = Q_0^2/2C$. Gjenværende energi etter en tid t er $U(t) = Q(t)^2/2C = U_0 \cdot \exp(-2t/RC)$. Tapt energi er derfor:

$$\boxed{U_{\text{tapt}}(t) = U_0 - U(t) = (Q_0^2/2C)(1 - \exp(-2t/RC)).}$$

Eks: Med $Q_0 = 15$ mC, $C = 15\,\mu$F, $R = 15$ MΩ og $t = 40$ s er 2.2 J gått tapt.

33) Her er farten i xy-planet $v = \sqrt{13}v_0$. Med magnetisk kraft evB_0 og sentripetalakselerasjon v^2/r gir N2:

$$\boxed{r = m_p\sqrt{13}v_0/eB_0.}$$

Eks: Med $v_0 = 9.5 \cdot 10^5$ m/s og $B_0 = 0.45$ T er radien i protonets sirkelbane $r = 79$ mm.

34) Magnetisk kraft er evB_0 slik at sentripetalakselerasjonen til protonet er:

$$\boxed{a = evB_0/m_p.}$$

Eks: Med tallverdier som over er $a = 148 \cdot 10^{12}$ m/s^2, eventuelt 148 m/μs^2.

35) En slik sekskant består av 6 likesidete trekanter med sidekanter a og areal $A_1 = \sqrt{3}a^2/4$. Magnetisk dipolmoment blir da, med strømstyrke I:

$$\boxed{m = IA = 6IA_1 = 3\sqrt{3}Ia^2/2.}$$

Eks: Med $a = 24$ cm og $I = 24$ A er $m = 3.59$ Am^2.

36) Svingekretsens Q-faktor er $Q = \omega_0/\Delta\omega = \sqrt{L/C}/R$ og resonansfrekvensen er $f_0 = \omega_0/2\pi$ med $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Disse sammenhengene gir (med gitt Q, R og ω_0):

$$\boxed{C = 1/QR\omega_0 \;\text{ og }\; L = QR/\omega_0.}$$

Eks: Med $Q = 10^3$, $R = 200\,\Omega$ og $f_0 = 98$ kHz blir $C = 8.1$ pF og $L = 0.32$ H.

$37-39$) Kondensatorladningen er $Q(t) = Q_0(\omega)\sin(\omega t + \phi)$. Da er $I(t) = dQ/dt = \omega Q_0 \cos(\omega t + \phi)$ og $dI/dt = -\omega^2 Q_0 \sin(\omega t + \phi)$. Når påtrykt spenning svinger med kretsens resonansfrekvens, er amplituden til kondensatorladningen (se forelesningsnotatene) $Q_0 = V_0\sqrt{LC}/R$. Spenningen over hhv R, C og L har da amplitudene:

$$\boxed{37)\ V_{R0} = R\omega_0 Q_0 = V_0.}$$

$$\boxed{38)\ V_{C0} = Q_0/C = V_0\sqrt{L/C}/R.}$$

$$\boxed{39)\ V_{L0} = L\omega_0^2 Q_0 = V_0\sqrt{L/C}/R.}$$

Eks: Med $V_0 = 5.0$ V, $R = 100\ \Omega$, $C = 10^{-6}$ F og $L = 0.20$ H er $V_{R0} = 5.0$ V, $V_{C0} = V_{L0} = 22.4$ V.

40) Med bruk av oppgitt identitet for differansen mellom to sinusfunksjoner er

$$V_{31}(t) = 2V_0 \sin(2\pi/3)\cos(\omega t + 2\pi/3) = \sqrt{3}V_0 \cos(\omega t + 2\pi/3).$$

Med andre ord, amplituden er:

$$\boxed{V_{31,0} = \sqrt{3}V_0.}$$

Eks: Med $V_0 = 425$ V er amplituden til V_{31} lik 736 V.