**TFY4125 Fysikk Løsningsforslag til eksamen 23. mai 2023**

**1F)** $a/g = (100 \cdot 1000)/(3600 \cdot 6.9 \cdot 9.81) = 0.41$.

**2C)** $\alpha = d\omega/dt = \omega_0 \exp(-t/5\tau)(2t/\tau^2 - t^2/5\tau^3)$, så $\alpha = 0$ ved $t = 0$.

**3A)** $\alpha = d\omega/dt = \omega_0 \exp(-t/5\tau)(2t/\tau^2 - t^2/5\tau^3)$, så $\alpha = 0$ ved $t = 10\tau$, og her er $\omega$ maksimal og lik $\omega_0(10^2 \cdot \exp(-2)) = 1.00 \cdot 100 \cdot 0.135°/\text{s} = 13.5°/\text{s}$.

**4D)** Total rotert vinkel er

$$\phi = \int_0^\infty \omega(t)dt = \omega_0 \int_0^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 e^{-t/5\tau}\, dt.$$

Vi substituerer $z = t/\tau$, og dermed $dt = \tau dz$, og får

$$\phi = \omega_0 \tau \int_0^\infty z^2\, e^{-z/5}\, dz.$$

Vi bruker oppgitt integral med $\alpha = 1/5$ og får $\phi = \omega_0 \tau \cdot 250 = 1250°$. Dette er 3.47 runder, dvs 3 hele runder.

**5E)** $\tan\beta = dy/dx = (y_0/x_0)(1 - 3\xi^2)$, som i startposisjonen $\xi = -2$ er $(5/100) \cdot (-11) = -11/20$. Dermed er $|\beta| = \arctan(11/20) = 29°$.

**6F)** Maksimal fart i banens bunnpunkt der $dy/dx = (y_0/x_0)(1 - 3\xi^2) = 0$, dvs ved $\xi = x/x_0 = -1/\sqrt{3}$. (Lokalt topp-punkt ved $\xi = +1/\sqrt{3}$.) I bunnpunktet er $y_b = y_0 \cdot (-1/\sqrt{3} + 1/3\sqrt{3}) = -2y_0/3\sqrt{3} = -0.019$ m. I startposisjonen er $y_s = y_0 \cdot (-2 + 8) = 6y_0 = 0.30$ m. Energibevarelse gir $mg(y_s - y_b) = 7mv^2/10$, dvs $v = \sqrt{10g(y_s - y_b)/7} = \sqrt{10 \cdot 9.81 \cdot 0.319/7}$ m/s $= 2.12$ m/s $= 212$ cm/s.

**7A)** Ved $x = 0$ er banens krumning null (dvs krumningsradien er uendelig stor), og helningsvinkelen er $\beta = \arctan(dy/dx) = \arctan(y_0/x_0) = \arctan(1/20) = 2.86°$. Newtons 1. lov normalt på banen gir $N = mg\cos\beta = 0.025 \cdot 9.81 \cdot 0.9987 = 0.24$ N. Banen er her nesten flat, og normalkraften og tyngden er praktisk talt like store.

**8E)**

$$\begin{aligned} I_0 &= \int dI_0 = \int_0^R \frac{2}{3} \cdot 4\pi\rho_0 \left(r^4 - \frac{3r^5}{4R}\right) dr \\ &= \frac{8\pi\rho_0}{3} \cdot R^5 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{\pi}{5}\rho_0 R^5. \end{aligned}$$

**9F)** Både tyngdens komponent $mg\sin\beta$ langs skråplanet og friksjonskraften $\mu N = \mu mg\cos\beta$ er rettet nedover, dvs mot klossens bevegelse. Dette er altså lineær bevegelse med konstant akselerasjon $a = -g(\sin\beta + \mu\cos\beta)$, starthastighet $v_0 = 2.2$ m/s og startposisjon $x_0 = 0$. Da er $x(t) = v_0 t + at^2/2$ og $v(t) = v_0 + at$. Klossen snur ved tidspunktet $t_s = -v_0/a$, som gir

$x(t_s) = -v_0^2/a + v_0^2/2a = -v_0^2/2a = v_0^2/[2g(\sin\beta + \mu\cos\beta)] = 2.2^2/[2 \cdot 9.81 \cdot (0.1736 + 0.15 \cdot 0.9848)]$ m $= 0.77$ m $= 77$ cm.

**10F)** Pga impulsbevarelse er farten $v_1 = mv_0/(m+2m) = v_0/3$ like etter kollisjonen. Kinetisk energi like etter kollisjonen er $K_1 = 3mv_1^2/2 = mv_0^2/6$. Dette tilsvarer (det negative) friksjonsarbeidet som bordplata gjør på klossene, dvs $W_f = f \cdot s = \mu N \cdot s = \mu \cdot 3mg \cdot s$, der $s$ er lengden de to klossene glir etter kollisjonen. Dermed: $s = v_0^2/(18\mu g) = [2.2^2/(18 \cdot 0.15 \cdot 9.81)]$ m $= 0.18$ m $= 18$ cm.

**11C)** Ballens impuls reduseres fra $mv_0$ til null mellom $t = 0$ og $t = \tau$:

$$mv_0 = \int_0^\tau F(t)dt = \frac{1}{2}F_0\tau,$$

dvs $F_0\tau = 2mv_0$. Impulsøkningen mellom $t = \tau$ og $t = 2\tau$ er:

$$\int_\tau^{2\tau} \left(\frac{t-2\tau}{\tau}\right)^2 dt = \frac{1}{3}F_0\tau = \frac{2mv_0}{3}.$$

Ballens slutthastighet er dermed $2v_0/3 = 5.6$ m/s.

**12A)** En liten bit av stanga i posisjon $x$ og med lengde $dx$ har masse $dm = \lambda(x)\,dx$ og dermed treghetsmoment $dI = dm\,x^2 = \lambda_0 x^3 dx/L$, slik at

$$I = \int dI = \frac{\lambda_0}{L}\int_0^L x^3 dx = \frac{1}{4}\lambda_0 L^3.$$

**13C)** Avstanden fra hver av massene til massesenteret (CM) midt i trekanten er $d = L/(2\cos 30°) = L/\sqrt{3}$ slik at $I_0 = 3 \cdot md^2 = 3mL^2/3 = mL^2$.

**14F)** $I = 2 \cdot mL^2$.

**15D)** Total dreieimpuls er $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_s + \boldsymbol{L}_b$ med indre dreieimpuls (spinn) $\boldsymbol{L}_s = -I_0\omega_0\hat{x} = -(md^2\omega_0/10)\hat{x}$ og banedreieimpuls $\boldsymbol{L}_b = \boldsymbol{R}_{CM} \times m\boldsymbol{V}_0 = bmV_0\hat{z}$. Dermed er $L = |\boldsymbol{L}| = \sqrt{L_s^2 + L_b^2}$. Med aktuelle tallverdier innsatt: $L_s = 0.140 \cdot 0.052^2 \cdot 78/10$ Js $= 0.00295$ Js og $L_b = 1.78 \cdot 0.140 \cdot 1.40$ Js $= 0.349$ Js. Her er $L_s$ så mye mindre enn $L_b$ at vi kan sette $L \simeq L_b = 0.35$ Js.

**16F)** Kula har en vinkelhastighet $\omega_0 = 78$ rad/s som er betydelig større enn det som tilsvarer ren rulling, $2V_0/d = 53.8$ rad/s. Det betyr at kulas kontaktpunkt mot underlaget har en fart i negativ $y$-retning, med absoluttverdi $\omega_0 d/2 - V_0 = (78 \cdot 0.026 - 1.40)$ m/s $= 0.63$ m/s $= 63$ cm/s.

**17B)** Newtons 2. lov for translasjon og rotasjon (om kulas massesenter) gir hhv $F\Delta t = mV_0$ og $F\Delta t \cdot z = (md^2/10) \cdot \omega_0$. Her er $z$ høyden til kraftens angrepspunkt, dvs kraftens arm. Det gir $z = d^2\omega_0/10V_0 = (0.052^2 \cdot 78)/(10 \cdot 1.40)$ m $= 0.015$ m $= 15$ mm. Til dette må vi legge kulas radius 26 mm, som betyr at kraften virket 41 mm over bordflaten.

**18B)** $f_0 = \omega_0/2\pi = \sqrt{k/m}/2\pi = \sqrt{400/4.00}/2\pi$ Hz $= 1.59$ Hz.

**19B)** Loddet svinger harmonisk med eksponentielt avtagende amplitude $A(t) = A(0)\exp(-\gamma t)$ med $\gamma = b/2m$. Tiden vi skal finne fastlegges derfor av ligningen $\exp(-\gamma t) = 1/3$ eller $t = \ln 3/\gamma =$

$\ln 3 \cdot (2m/b) = 2\ln 3 \cdot 4.00/0.020$ s $= 439$ s.

**20C)** Systemet drives på resonans, dvs med en ytre kraft med $\omega = \omega_0 = 10\ \mathrm{s}^{-1}$. Da er utsvingsamplituden $x_0 = F_0/(2m\gamma\omega_0)$ slik at hastighetsamplituden er $v_0 = \omega_0 x_0 = F_0/(2m\gamma) = F_0/b = 0.040/0.020$ m/s $= 2.0$ m/s.

**21E)** Symmetrisk ladningsfordeling gir null elektrisk dipolmoment.

**22A)** $V = (Q/4\pi\varepsilon_0 d) \cdot (1/2 + 1/8 - 1/4 - 1/6)$, dvs $A = 5/24$.

**23D)** De to negative ladningene bidrar mer enn de to positive til totalt elektrisk felt på $y$-aksen, slik at $\boldsymbol{E}$ peker i negativ $y$-retning.

**24C)** Alle bidrag peker i $x$-retning, så med like store ladninger holder det å addere $1/r^2$ med fortegn: $E_x \sim 1/2^2 + 1/8^2 - 1/4^2 - 1/6^2 = (144 + 9 - 36 - 16)/576 = 101/576 > 0$.

**25F)** Vi summerer opp $U_{ij}$ for de 6 unike ladningsparene: $U = (Q^2/4\pi\varepsilon_0 d) \cdot (1 \cdot 1/2 - 2 \cdot 1/2 - 2 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/6)$, dvs $B = (6 - 12 - 6 + 2)/12 = -10/12 = -5/6$.

**26D)** $p = \int dp = \int_0^L 2x\lambda(x)dx = (2\lambda_0/L^2)\int_0^L x^3 dx = (2\lambda_0/L^2) \cdot L^4/4 = \lambda_0 L^2/2$.

**27B)** Vi kaller det ytre feltet $E_0$. Da er feltet inne i den dielektriske plata for det første $E = E_0/\varepsilon_r$ og for det andre $E = E_0 - E_i$. Her er $E_i = \sigma_i/\varepsilon_0$ det induserte feltet pga den induserte overflateladningen $\pm\sigma_i$ pr flateenhet på platas overflater. Kombinerer vi alt dette, får vi $\sigma_i = \varepsilon_0 E_i = \varepsilon_0(E_0 - E) = \varepsilon_0 E_0(1 - 1/\varepsilon_r)$, som med $E_0 = 5500$ V/m og $\varepsilon_r = 3.5$ blir $\sigma_i = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 5500 \cdot (1 - 1/3.5)\ \mathrm{C/m^2} = 3.48 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C/m^2} = 35\ \mathrm{nC/m^2}$.

**28B)** $C = (1/2.0 + 1/5.0 + 1/7.0)^{-1}$ nF $= 1.2$ nF.

**29E)** $C = (2.0 + 5.0 + 7.0)$ nF $= 14$ nF.

**30D)** $Q = CV = 5.0 \cdot 10^{-9} \cdot 30 \cdot 10^3$ C $= 0.15$ mC.

**31E)** Ladning på kondensatoren: $Q(t) = Q_0(1 - \exp(-t/RC))$. Gir strøm $I(t) = dQ/dt = (Q_0/RC)\exp(-t/RC)$. Her er $Q_0 = V_0 C$ siden $I = 0$ for $t \gg RC$, slik at da er spenningen over kondensatoren lik den påtrykte spenningen $V_0$. Vi må derfor finne tidspunktet $t$ som tilsvarer at $12 = 30\exp(-t/RC)$, dvs $t = RC\ln(30/12) = 1000 \cdot \ln 2.5$ s $= 916$ s.

**32E)** Energibevarelse gir farten $v$ etter akselerasjon med spenning $V = 38$ kV: $mv^2/2 = 2eV$, dvs $v = \sqrt{4eV/m} = \sqrt{(4 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 38000)/(40 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27})}$ m/s $= 6.21 \cdot 10^5$ m/s. Newtons 2. lov, med kraft $F = qvB$ og sentripetalakselerasjon $v^2/r$, gir deretter baneradius $r = mv/2eB = (40 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \cdot 6.21 \cdot 10^5)/(2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.7)$ m $= 0.18$ m $= 18$ cm.

**33C)** Bruker uttrykk fra formelark og finner $B = \mu_0 I R^2/[2(z^2 + R^2)^{3/2}]$ som med $z = 2R$ blir $B = \mu_0 I/[2R \cdot 5^{3/2}] = (4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.5)/(2 \cdot 0.15 \cdot 11.18)$ T $= 0.56\ \mu$T.

**34A)** Magnetisk dipolmoment er $m = IA = 1.5 \cdot \pi \cdot 0.15^2$ Am$^2$ $= 0.106$ Am$^2$, i positiv $z$-retning. Med et ytre magnetfelt $B_0$ med feltstyrke 5.0 T langs $x$-aksen er dreiemomentet på lederen $\tau = mB_0 = 0.53$ Nm.

**35B)** Tidsavhengig omsluttet magnetisk fluks er $\phi(t) = B_0 \pi R^2 \cos \omega t$, og indusert spenning blir $V(t) = -d\phi/dt = \omega B_0 \pi R^2 \sin \omega t$, med amplitude $\omega B_0 \pi R^2 = (2\pi/0.026) \cdot 0.7 \cdot \pi \cdot 0.15^2$ V $= 12$ V.

**36A)** Kretsens totale motstand er $(1/R + 1/R)^{-1} = R/2$ med $R = 21\ \Omega$, så strømmen blir $I(t) = I_0 \sin \omega t$ med $I_0 = 2V_0/R$. Midlere effekt blir $\langle P \rangle = V_0 \cdot (2V_0/R) \cdot \langle \sin^2 \omega t \rangle = V_0^2/R$ da middelverdien av $\sin^2 \omega t$ er 1/2. Med tallverdier: $\langle P \rangle = 25^2/21$ W $= 30$ W.

**37C)** $V_2 - V_1 = V_0[\sin(\omega t + \pi/6) - \sin \omega t]$ som med oppgitt formel kan skrives som $V_2 - V_1 = 2V_0 \cos(\omega t + \pi/12) \cdot \sin(\pi/12) = 2 \cdot 25 \cdot 0.2588 \cdot \cos(\omega t + \pi/12)$. Amplituden er derfor 13 V.

**38B)** $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi \cdot 10$ ms $= 63$ ms.

**39A)** Ladningsamplituden avtar eksponentielt med tiden, $Q_0(t) = A \exp(-\gamma t)$, med $\gamma = R/2L$. Dermed er $Q_0(80) = 2.50 \cdot \exp[-(0.020 \cdot 80)/(2 \cdot 0.400)]$ mC $= 0.34$ mC.

**40D)** Svingekretsen drives på resonans, med $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 100\ \mathrm{s}^{-1}$. Da er strømamplituden $I_0 = \omega_0 Q_0 = (\omega_0 V_0/L)/(2\gamma\omega_0) = V_0/R = 50/20$ A $= 2.5$ A.