NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Førsteamanuensis Knut Arne Strand
Telefon: 73 59 34 61

EKSAMEN I FAG SIF 4014 BØLGEFYSIKK/FYSIKK 3

Fredag 7. desember 2001

kl. 0900-1400

Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU

Sensuren kan ventes i uke 2, 2002

Oppgave 1

a) Betrakt en lydkilde som når den er i ro i det mediet (f.eks. luft) der lyden forplanter seg, sender ut en harmonisk lydbølge med frekvens f_s og bølgelengde $l_0 = c / f_s$ der c er lydhastigheten i mediet. Argumentér for (figur kan nyttes om ønskelig) at dersom lydkilden beveger seg med konstant hastighet v_s i retning mot en observatør som er i ro i mediet, vil denne observatøren måle frekvensen gitt ved:

$$f_m = \frac{c}{c - v_s} f_s$$

I resten av oppgaven skal vi betrakte to tog som kjører med lik og konstant hastighet v_{tog} = 25,0 m/s (i forhold til bakken) rettlinjet direkte mot hverandre. Begge togene har fløyter som når togene står i ro sender ut lyd med frekvens $f = 4{,}00 \cdot 10^2$ Hz. Vi antar videre for hele resten av oppgaven at lydhastigheten i luft er c = 331 m/s. For punkt b og c antar vi at luften er stillestående.

b) Finn frekvensen f_{ro} en observatør som står i ro på skinnegangen vil måle for fløytelyden fra et av togene !

c) Finn frekvensen f_{tog} togføreren på det ene toget vil måle for fløytelyden fra det andre !

Vi antar nå det tenkte tilfellet at det blåser en stødig vind langs skinnegangen med hastighet 10,0 m/s på hele strekningen mellom togene.

d) Finn i dette tilfellet den frekvensen f_{med} togføreren som kjører i medvind vil måle for fløytelyden fra toget som kjører i motvind !

Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven betrakte overflatebølger som forplanter seg på grenseflaten luft/vann. Vi skal i hele oppgaven betrakte bølger med bølgelengde i området 5 µm til 5 mm og med så liten amplitude at vi for hele oppgaven kan anta at for fasehastigheten v_{f} gjelder med brukbar tilnærmelse:

$$v_{\mathrm{f}} = \left(\frac{2p\, g}{l\,(r_1 + r_2)} \right)^{1/2} \tag{1}$$

der $g = 72{,}8 \cdot 10^{-3}$ N/m er grenseflatespenningen mellom luft og vann, l er bølgelengden og $r_1 = 1{,}00$ kg/dm^3 og $r_2 = 1{,}22$ g/dm^3 er tettheten for henholdsvis vann og luft.

a) Finn fasehastighetene til de harmoniske bølgene som har bølgelengde l henholdsvis 1,00 mm og 0,100 mm !

b) Vis at når (1) gjelder så gjelder følgende dispersjonsrelasjon:

$$w = \left(\frac{g}{r_1 + r_2} \right)^{1/2} k^{3/2}$$

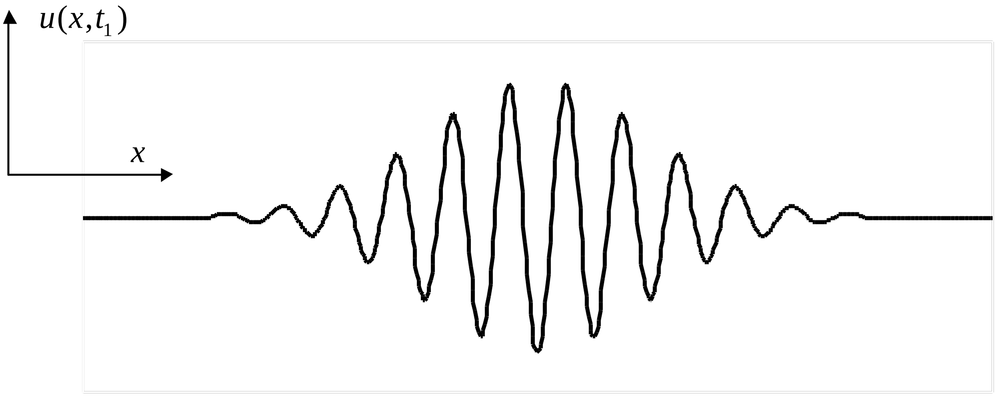
der w er vinkelfrekvens og $k = 2p / l$.

c) Finn forholdet mellom gruppehastighet v_{g} og fasehastighet v_{f} i bølgelengdeområdet der (1) gjelder !

d) Vi betrakter nå følgende situasjon. Et bølgetog med utsving $u(x,t)$ som vist forstørret på figuren neste side, med fourierkomponenter (frekvenskomponenter) sentrert om:

$$w_0 = \left(\frac{g}{r_1 + r_2} \right)^{1/2} k_0^{\,3/2}$$

der $k_0 = 2p / l_0$ med l_0 = 0,50 mm, forplanter seg bortover en vannflate i én dimensjon. Det er en definisjonssak akkurat hvor langt bølgetoget er. Vi definerer lengden av det lik $12\,l_0$ og sier i samsvar med dette at det har 12 klare bølgetopper. (Avstanden mellom to nabobølgetopper er tilnærmet lik l_0 = 0,50 mm.)



(Merk at bølgetoget på figuren er vist som funksjon av x for tid $t = t_1$ og at det har 12 klare bølgetopper !)

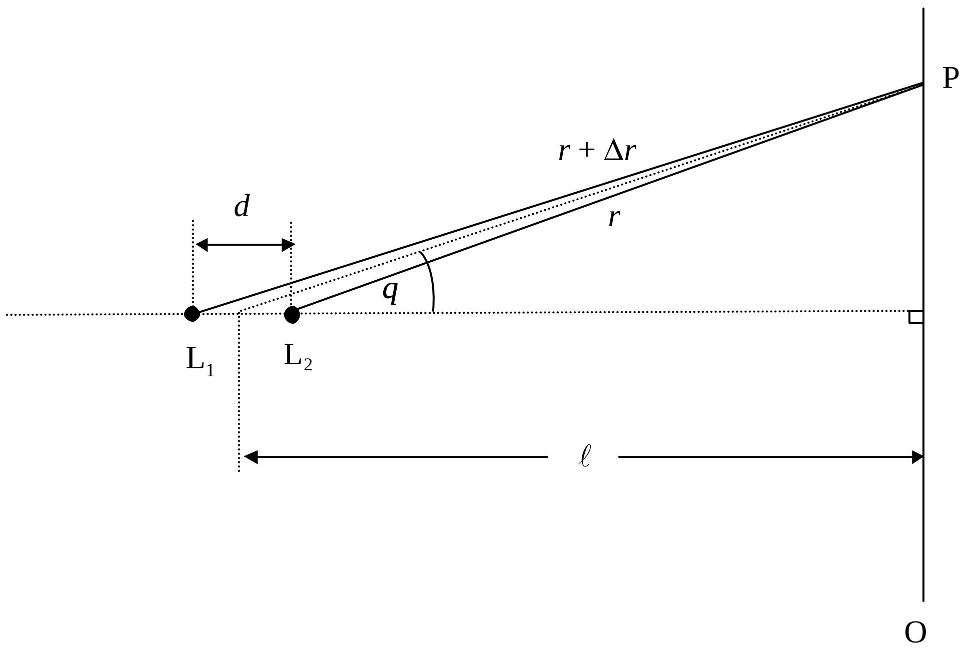
Vi antar som en brukbar tilnærmelse at vi kan regne $\Delta w = \text{konstant} \cdot \Delta k$ for de fourierkomponenter bølgetoget består av, dvs. vi neglisjerer at omhyllingskurven til bølgetoget forandrer form mens vi betrakter det.

Hvor mange klare bølgetopper vil passere et gitt punkt $x = x_1$ i løpet av den tiden hele bølgetoget passerer $x = x_1$? Begrunn svaret !

[Vi kan tenke oss en slik observasjon realisert ved at en filmer bølgepakken mens den passerer og etterpå forstørrer filmen og kjører den med tilstrekkelig lav hastighet.]

Oppgave 3

Vi skal i denne oppgaven betrakte to trådformede lyskilder (med innbyrdes avstand d) som sender ut sylinderbølger. Den resulterende lysfordelingen blir observert på en observasjonsskjerm O. Et snitt av de trådformede lyskildene L_1 og L_2 (som står normalt papirplanet) og den plane observasjonsskjermen O er vist på figuren nedenfor.



Vi antar at de to trådformede lyskildene har tverrsnitt meget mindre enn lysbølgelengden l så vi kan se bort fra deres utstrekning i papirplanet. (Vi neglisjerer også eventuell skyggevirkning fra L_2 på lyset utsendt fra L_1.) Vi antar videre at begge lyskildene stikker så langt ut av papirplanet på begge sider at vi ikke har problem med endeeffekter der vi observerer lysfordelingen på observasjonsskjermen. I hele oppgaven skal vi altså bare regne på det som skjer i det tverrsnitt som papirplanet representerer, der vi altså antar at bølgene fra L_1 og L_2 har sirkler som bølgefronter. Vi antar at $\ell \gg d$ slik at lysstrålen fra L_1 til et vilkårlig punkt P på observasjonsskjermen kan betraktes å være parallell med lysstrålen fra L_2 til P (uavhengig P's plassering).

Vi antar videre for pkt. a og b i oppgaven:

- Begge lyskildene er fullstendig koherente, sender ut lys med samme bølgelengde l og forholder seg slik til hverandre at de elektriske feltene henholdsvis fra kilde L_1 og L_2

kan i punktet P på observasjonsskjermen uttrykkes ved:

$$E_1 = E_{10}\cos\left[k(r+\Delta r) - wt - j\,\right]$$

$$E_2 = E_{20}\cos\left[kr - wt - j\,\right]$$

der $k = 2p\,/\,l$, w er vinkelfrekvensen, j er en fasekonstant (som vi ikke har bestemt), r er avstanden fra L_2 til P og $r+\Delta r$ er avstanden fra L_1 til P.

- Vi betrakter så små q at vi med god tilnærmelse kan anta at E_{10} og E_{20} er uavhengig P's plassering på observasjonsskjermen og siden $\ell \gg d$ nytter vi: $E_{10} = E_{20} \equiv E_0$ (uavhengig P's plassering på observasjonsskjermen).

- l = 413,1 nm og d = 1000,5 l ≈ 0,413 mm (${\ell}$ antas å være 2 m slik at $d \ll \ell$).

Denne situasjonen kan tenkes tilnærmet realisert ved at en samtidig belyser to svært tynne (tverrsnitt $\ll$ l) reflekterende tråder med posisjon som L_1 og L_2 med én kryptonlaser plassert nøyaktig like langt fra begge.

a) Vis at det totale feltet på observasjonsskjermen som funksjon av vinkelen q er gitt ved:

$$E_q = 2E_0\cos\left(\frac{kd\cos q}{2}\right)\cos[k(r+\tfrac{1}{2}d\cos q) - wt - j\,]$$

b) Finn ut fra E_q gitt i pkt a, lysets intensitetsfordeling I_q på observasjonsskjermen som funksjon av vinkelen q !
Finn også tallverdier for den minste positive verdi av q som gir maksimum for I_q og den minste positive verdi av q (utenom q = 0) som gir minimum for I_q !

Vi betrakter så akkurat samme situasjon som ovenfor bortsett fra de følgende fakta:

Lyskildene L_1 og L_2 er nå fullstendig uavhengige av hverandre og har endelig koherenslengde ℓ_c som for begge er ca 1 mm. Begge har fortsatt middelbølgelengde $<l>$ = 413,1 nm.

Denne situasjonen kan tenkes realisert ved at en belyser to tynne tråder med hver sin laserdiode plassert like langt fra hver sin tråd. Laserdiodene tenkes å operere fullstendig uavhengig av hverandre og er svært like, men ikke absolutt like når det gjelder f.eks. koherenslengde.

c) Blir den intensitetsfordelingen som kan observeres med det menneskelige øye* i dette tilfellet forskjellig fra den vi beregnet i pkt. b ? Hvis ja, angi hvordan ! Enten svaret er ja eller nei, begrunn det utførlig !

---

* Det menneskelige øye kan ikke observere intensitetsvariasjoner som er raskere enn ca. 10 ms.

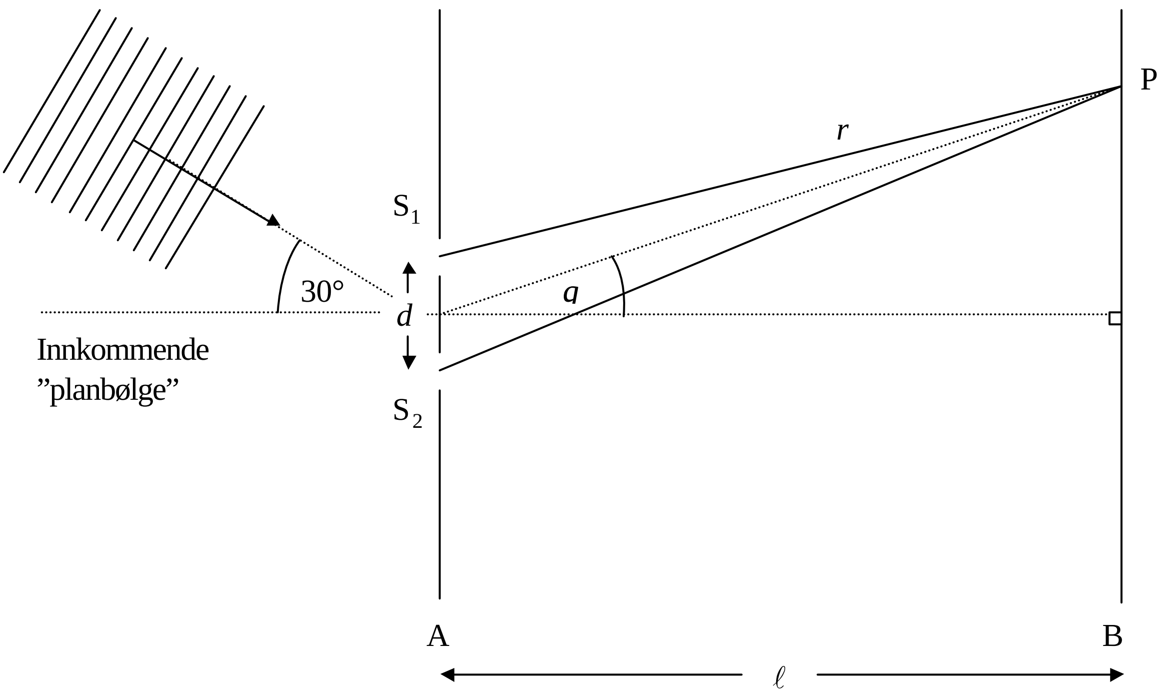
Oppgitt

- $$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

- Lyshastighet $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s

Oppgave 4

Vi skal i denne oppgaven betrakte en ”planbølge” med elektroner som kommer inn mot en spalteskjerm A under en innfallsvinkel på 30° som vist på figuren nedenfor. Spalteskjermen A har to spalter S_1 og S_2 med innbyrdes avstand d. I en avstand ℓ fra A har vi en registreringsskjerm B.



Vi antar at spaltene S_1 og S_2 er like og så smale at hver av dem er utgangspunkt for en ”bølge” som har bølgefronter med halvsirkler som tverrsnitt. Dvs. vi antar at bølgene fra de to spaltene er ”sylinderbølger” og at spaltene er så lange at vi ikke har problem med endeeffekter der vi observerer resultatet av eksperimentet på skjermen B.

Vi antar videre at $d \ll \ell$ og at forholdene for øvrig er slik at (blant annet at q er tilstrekkelig liten) vi i et vilkårlig punkt P på observasjonsskjermen B (tilsvarende bøyning en vinkel q) har:

$$\Psi_q = \Psi_1 + \Psi_2$$

der:

$$\Psi_1 = y_0 \mathrm{e}^{i[kr - wt - j]}$$

er bølgefunksjonen fra spalt S_1, og:

$$\Psi_2 = y_0 \mathrm{e}^{i[k(r+\Delta s) - wt - j]}$$

er bølgefunksjonen fra spalt S_2. Merk at Ψ_q er bølgefunksjonen for <u>ett</u> elektron !

Her er $k = 2p / l = p/\hbar$ (med $\hbar = h/2p$ og $h = 6{,}6261 \cdot 10^{-34}$ Js), $w = E_{\mathrm{tot}}/\hbar$, p er bevegelsesmengden og E_{tot} er totalenergien til ett elektron, r er avstanden fra spalt S_1 til punktet P og Δs er den totale forskjellen i ganglengde for elektron-”bølgen” som når punkt P gjennom spalt S_2 i forhold til gjennom spalt S_1. Videre er y_0 og j henholdsvis en amplitudefaktor og en fasekonstant som vi ikke har bestemt.

Finn $|\Psi_q|^2$ som funksjon av q ! (Merk at vi tillater q å ta både positive og negative verdier !)
Hva er i dette eksperimentet den fysiske tolkningen av $|\Psi_q|^2$ (ifølge Max Borns sannsynlighets-interpretasjon) ?

<u>Oppgitt</u>

- $1 + \cos a = 2\cos^2 \dfrac{a}{2}$