NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Førsteamanuensis Knut Arne Strand
Telefon: 73 59 34 61

EKSAMEN I FAG SIF 4014 FYSIKK 3
Onsdag 2. desember 1998
kl. 0900-1300

Hjelpemidler: B2
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling

<u>Oppgave 1</u>

Vi skal i første del av oppgaven (dvs. i pkt. a og b) betrakte bølger som forplanter seg langs en uendelig lang streng med konstant gitt masse pr. lengdeenhet μ og konstant gitt snor-stramming F_{T}. For både pkt. a og b antar vi at utsvingene er transversale og så små (og at vi ellers har slike forhold) at bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = K\,\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} \qquad (1)$$

gjelder. I ligning (1) er $D(x,t)$ transversalt utsving for et strengelement med posisjon x ved tiden t. $K = \mu / F_{\mathrm{T}}$ er en konstant.

a) Vi betrakter først en harmonisk vandrebølge beskrevet ved:

$$D(x,t) = D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \qquad (2)$$

I ligning (2) er $D(x,t)$ transversalt utsving som ovenfor, D_0 er bølgens amplitude, $k = 2\pi / \lambda$ der λ er bølgelengden, $\omega = 2\pi\nu$ der ν er frekvensen, og φ en vilkårlig fasekonstant. For frekvens ν = 9,0 s^{-1} er bølgelengden λ = 1,0 m.
Finn fasehastigheten !

Vis også at det at en harmonisk vandrebølge med vilkårlig frekvens ν oppfyller bølgeligningen (1), medfører at:

$$\omega = \text{konstant} \cdot k$$

dvs. at vi ikke har dispersjon !

b) Vi betrakter så en bølgepuls (som består av mange frekvenskomponenter), som forplanter seg på strengen. Vil denne bølgepulsen forandre form mens den forplanter seg bortover strengen ? Begrunn svaret ! Hva er tallverdien til gruppehastigheten for denne bølgepulsen ?

Vi betrakter i resten av oppgaven synlig lys som forplanter seg i glass med brytningsindeks gitt ved:

$$n = 1{,}509 \ + \ \frac{4{,}68 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}^2}{\lambda_0^2} \tag{3}$$

der λ_0 er bølgelengden til lyset i vakuum (bølgelengde i glasset blir da $\lambda_\mathrm{g} = \lambda_0 / n$). Det kan da vises (numerisk, skal <u>ikke</u> vises her) og her benyttes som kjent, at dispersjons-relasjonen for lys i glasset da kan uttrykkes ved:

$$\omega = \frac{k}{A + Bk^2} \tag{4}$$

der $A = 5{,}032 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}$ og $B = 1{,}65 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{m\,s}$.

c) Finn fasehastighet og gruppehastighet til grønt lys med bølgelengde λ_0 = 5,00·10^2 nm som forplanter seg i glasset !

d) En lyspuls med spektralfordeling som dekker hele det synlige området (λ_0 = 400 nm – λ_0 = 700 nm) genereres ved inngangen til en 1,00·10^2 m lang og rettlinjet stav av glass med brytningsindeks som gitt ovenfor. Vi antar at glass-staven har så stort tverrsnitt at lyset i glass-staven forplanter seg tilnærmet rettlinjet uten refleksjoner. Finn forskjellen i ankomsttid ved utgangen av glass-staven for det første røde lys (med λ_0 = 7,00·10^2 nm) og det første fiolette lys (med λ_0 = 4,00·10^2 nm) !

Oppgitt

- I denne oppgaven nytter vi for lyshastigheten c i vakuum:

  $$c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

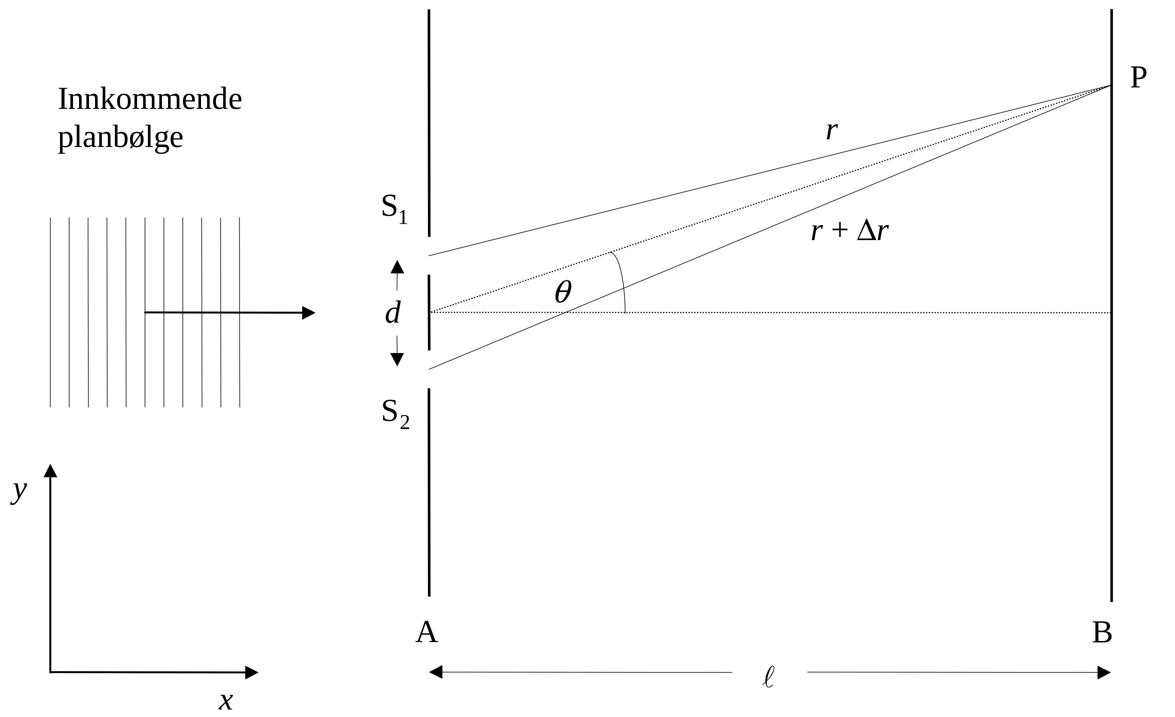
- Gruppehastighet $\mathrm{v_g}$ er definert ved:

  $$\mathrm{v_g} \equiv \frac{d\omega}{dk}$$

  Merk at når vi har dispersjon, må $\dfrac{d\omega}{dk}$ tas for aktuell k-verdi !

Oppgave 2

Vi skal i første del av denne oppgaven betrakte en planbølge med lys (som er lineærpolarisert) som kommer inn mot en skjerm A med to spalter S_1 og S_2. Interferensmønsteret dannet av lyset som passerer S_1 og S_2 blir registrert på en skjerm B (som om nødvendig kan være uendelig stor) plassert en avstand ℓ fra A, som vist på figuren nedenfor.



Vi antar at spaltene S_1 og S_2 er like og så smale at hver av dem (i samsvar med Huygens' prinsipp) er utgangspunktet for en bølge med en halvsirkel som tverrsnitt. Dvs. vi antar at bølgene fra de to spaltene er sylinderbølger og at spaltene er så lange at vi ikke har problem med ende-effekter der vi observerer lysfordelingen på skjermen B. I hele oppgaven skal vi altså bare regne på det som skjer i det tverrsnitt som papirplanet representerer, der bølgene fra S_1 og S_2 har halvsirkler som bølgefronter. Vi antar for hele oppgaven at $\ell \gg d$ slik at lysstrålen fra S_1 til et punkt P på B kan betraktes å være parallell med lysstrålen fra S_2 til P (uavhengig P's plassering).

Vi antar videre for pkt. a, b, c og d:

- Avstanden d mellom sentrum av spaltene er 50 μm,

og i tillegg for pkt. a og b:

- Det innkommende lyset er fullstendig koherent og har bølgelengde λ = 500 nm.

a) Finn et uttrykk for de bøyningsvinkler θ som gir maksimum intensitet (dvs. sentrum i de lyse interferensstripene) uttrykt ved λ og d !
Finn tallsvar for disse bøyningsvinklene θ (med oppgitte tallverdier innsatt for λ og d) !

(Merk at det ikke er tillatt å nytte det som er oppgitt i pkt. b for å løse dette oppgavepunktet.)

De elektriske feltene henholdsvis fra spalt S_1 og fra spalt S_2, kan i et punkt P på observasjonsskjermen (dvs. at lyset er bøyd vinkelen θ) uttrykkes ved:

$$E_1 = E_{10} \cos\left[kr - \omega t - \varphi\right]$$

$$E_2 = E_{20} \cos\left[k(r + \Delta r) - \omega t - \varphi\right]$$

der $k = 2\pi/\lambda$, ω er vinkelfrekvensen, φ er en fasekonstant (som vi ikke har bestemt), r er avstanden fra S_1 til P og $r + \Delta r$ er avstanden fra S_2 til P. E_{10} og E_{20} er avhengige av henholdsvis r og $r + \Delta r$. I pkt. b skal vi imidlertid betrakte så små θ at vi med god tilnærmelse for dette punktet kan sette:

$E_{10} = E_{20} \equiv E_0$ (uavhengig P's plassering på skjermen B)

b) Utled at lysets intensitetsfordeling på observasjonsskjermen i *y*-retning er gitt ved:

$$I_\theta = I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

der I_θ er intensiteten til lyset bøyd vinkelen θ, I_0 er intensiteten i foroverretning (dvs. for $\theta = 0$) og $\delta = k d \sin\theta$!

Kontrollér at det er samsvar mellom dette resultatet og det du fikk i pkt. a !

Vi antar nå for pkt. c og d at innkommende lysstråle ikke er fullstendig koherent. Vi antar fortsatt at den innkommende strålen er fullstendig koherent over hele tverrsnittet før den kommer inn mot spaltene (og for pkt. d før den kommer til glassplater som plasseres foran S_2). Men vi antar nå at frekvensbredden til det innkommende lyset er endelig og at innkommende lys har en endelig koherenslengde ℓ_c lik 5 μm. (Dvs. at dersom en kjenner fasen i et punkt på innkommende stråle, så kan fasen predikteres med noenlunde sikkerhet 5 μm i strålens forplantningsretning, men ikke vesentlig lengre.) Middelbølgelengden λ_m lar vi fortsatt være 500 nm.

c) Vil interferensmønsteret på observasjonsskjermen B være annerledes når ℓ_c = 5 μm enn om $\ell_c = \infty$ (dvs. fullstendig koherens) ? Hvis ja, forklar kvalitativt hvordan det er annerledes og hvorfor !

I pkt. d skal vi la spalten S_2 være tildekket av glassplater (bare én om gangen) av forskjellige tykkelser (glassplatene plasseres foran S_2, dvs. på den siden av skjermen A som vender mot lyskilden) mens S_1 ikke er tildekket. Vi antar at sideflatene til glassplatene er parallelle med hverandre og fullstendig plane. Vi ser bort fra diffraksjon pga. kanten av en glassplate mellom S_1 og S_2. Brytningsindeksen for glassplatene antas å være 1,50 (vi antar at vi kan se bort fra dispersjon).

d) Hvordan blir interferensmønsteret (som registreres på skjermen B) sammenlignet med det uten glassplate foran S_2 om glassplaten foran S_2 har tykkelse som nedenfor angitt ?

1) 500 nm
2) 1000 nm
3) 30 μm
4) 1000 μm

Vi betrakter nå i stedet en plan elektron-"bølge" som kommer inn mot spalteskjermen som vist ovenfor for lysbølger. Vi vil da (under tilsvarende antagelser som ovenfor) i punktet P på skjermen (tilsvarende bøyning en vinkel θ) ha:

$$\Psi_\theta = \Psi_1 + \Psi_2$$

der Ψ_1 er bølgefunksjonen fra spalt S_1 og Ψ_2 bølgefunksjonen fra spalt S_2. Merk at Ψ_θ er bølgefunksjonen for <u>ett</u> elektron. Vi antar altså også her at $\ell \gg d$ og videre at vi betrakter så små θ at vi med god tilnærmelse kan sette at Ψ_1 og Ψ_2 har samme amplitude ψ_0. Vi har da:

$$\Psi_1 = \psi_0\, \mathrm{e}^{i[kr-\omega t-\varphi]}$$

$$\Psi_2 = \psi_0\, \mathrm{e}^{i[k(r+\Delta r)-\omega t-\varphi]}$$

der $k = 2\pi/\lambda = p/\hbar$ (med $\hbar = h/2\pi$ og $h = 6{,}6261\cdot 10^{-34}$ Js), $\omega = E_{\text{tot}}/\hbar$, p er bevegelsesmengden og E_{tot} er totalenergien til ett elektron, r er avstanden fra spalt S_1 til punktet P, $r+\Delta r$ er avstanden fra spalt S_2 til punktet P, og φ er en fasekonstant.

e) Finn $|\Psi_\theta|^2$ som funksjon av $\delta = kd\sin\theta$! Hva er i dette eksperimentet den fysiske tolkningen av $|\Psi_\theta|^2$ (ifølge Max Borns sannsynlighets-interpretasjon) ?

<u>Oppgitt</u>

- Intensiteten for en periodisk elektromagnetisk bølge i vakuum er gitt ved:

  $$I = \varepsilon_0 c \overline{E^2}$$

  der E er det elektriske feltet til bølgen, $\overline{E^2}$ er E^2 midlet over en periode, ε_0 er permittiviteten i vakuum og c er lyshastigheten i vakuum.

  Dersom $E = E_0\cos(\omega t + \varphi')$ der φ' er en konstant (dvs. uavhengig t) har vi:

  $$\overline{E^2} = \tfrac{1}{2}E_0^2$$

- Når lyshastigheten i vakuum kalles c, så er lyshastigheten (dvs. fasehastigheten for lys) c_s i et stoff med brytningsindeks n gitt ved $c_s = c/n$, og dersom vakuumbølgelengden er λ, så er bølgelengden λ_s i stoffet gitt ved $\lambda_s = \lambda/n$.

- $$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \quad , \quad 1+\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}$$

Oppgave 3

Vi betrakter et muon som ifølge en observatør i ro på jorda, dannes $1{,}00 \cdot 10^4$ m over jordas overflate. Vi antar at levetiden til dette muonet (dvs. tiden det eksisterer før det desintegrerer) i et referansesystem der det er i ro, er $2{,}20 \cdot 10^{-6}$ s.

I hele denne oppgaven ser vi bort fra den akselerasjonen jorda har. Vi antar altså at vi stivt festet til jorda, har et koordinatsystem som er inertialt.
Vi antar videre at muonet så lenge det eksisterer, har konstant hastighet med konstant retning mot jordas sentrum.

Finn minimal hastighet (ifølge en observatør i jordas referansesystem) som gjør muonet i stand til å nå fram til jordas overflate før det desintegrerer !
Finn også lengden av jordas atmosfære som muonet har passert (lik $1{,}00 \cdot 10^4$ m i jordas referansesystem), i muonets referansesystem !

Oppgitt

- Anta at tidsintervallet mellom to hendelser målt i et referansesystem (inertialsystem) der hendelsene skjer i samme rompunkt, er Δt_0. Da vil en observatør i et annet referansesystem (inertialsystem) med konstant rettlinjet hastighet u i forhold til det første, måle tidsintervallet Δt gitt ved:

  $$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

  mellom de samme to hendelsene. Lyshastigheten c er gitt ved:

  $c = 2{,}997925 \cdot 10^8$ m/s

- Anta at en måler lengden av et legeme i et referansesystem (inertialsystem) der legemet er i ro, og finner lengden l_0. Da vil en observatør i et referansesystem (inertialsystem) med konstant rettlinjet hastighet u i forhold til det første (u er antatt å ha samme retning som l_0), måle lengden l gitt ved:

  $$l = l_0 \sqrt{1 - u^2 / c^2}$$