NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Førsteamanuensis Knut Arne Strand
Telefon: 73 59 34 61

EKSAMEN I FAG SIF 4014 FYSIKK 3
Fredag 17 desember 1999
kl. 0900-1300
Bokmål

Hjelpemidler: B2
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling

Oppgave 1

a) Betrakt en harmonisk lydbølge med frekvens f og bølgelengde $l = c/f$ som forplanter seg med hastighet c. Argumentér for (figur kan nyttes om ønskelig) at en observatør som forflytter seg med konstant hastighet i motsatt retning av bølgens forplantningsretning vil måle frekvensen:

$$f_{\mathrm{m}} = \frac{c + \mathrm{v_m}}{l} \tag{1}$$

der $\mathrm{v_m}$ er absoluttverdien av observatørens hastighet !

I resten av oppgaven skal vi betrakte ett eller to tog som kjører rettlinjet inn mot en observatør på en stasjon. Togene kjører i samme retning. Vi antar at togene har konstante hastigheter mens vi betrakter dem. Vi antar også at togene har fløyter som når togene står i ro i stille-

stående luft, begge sender ut lyd med frekvens $f = 4{,}00 \cdot 10^2$ Hz . Fløytene på togene er rettet mot observatøren på stasjonen, og vi antar at vi i de tidsrommene vi betrakter, kan regne (for hver fløyte for seg) at lydtrykkamplitudene som observeres er konstante.
Lydhastigheten c har i resten av oppgaven verdi $c = 329$ m/s.

b) Vi betrakter først den situasjonen at bare ett av togene bruker fløyten. Det har hastighet 10,0 m/s. Samtidig blåser en stødig vind, også med hastighet 10,0 m/s, i samme retning som toget kjører.
Hvilken frekvens vil en observatør som står i ro på stasjonen måle for lydsignalet fra togets fløyte ?

c) Vi betrakter så en situasjon med to tog som kommer inn mot stasjonen (i samme retning). Det ene toget har hastighet $\mathrm{v}_1 = 20{,}0$ m/s og det andre $\mathrm{v}_2 = 30{,}0$ m/s .
Vi antar at begge togene fløyter og at lydtrykkamplitudene fra begge togenes fløyter hver for seg på stasjonen er p_0 . Videre antar vi at en observatør på stasjonen til sammen fra de to fløytene observerer lydtrykket:

$$p = p_1 + p_2 \tag{2}$$

der p_1 er lydtrykket fra fløyten på det ene toget og p_2 er lydtrykket fra fløyten på det andre toget, og at p_1 og p_2 er gitt ved:

$$p_1 = p_0 \cos\left(k_1 x - w_1 t + j_1\right) \tag{3}$$

og

$$p_2 = p_0 \cos\left(k_2 x - w_2 t + j_2\right) \tag{4}$$

der p_0 er lyddtrykkamplituden hos observatøren for hvert av signalene, k_1 og k_2 er angulære bølgetall, w_1 og w_2 er vinkelfrekvenser og j_1 og j_2 er fasekonstanter.
x er posisjonen til observatøren og t er tiden.
Vis at når $k_1 \approx k_2$ og $w_1 \approx w_2$ (som er tilfelle her) så kan signalet p gitt ved ligning (2), (3) og (4) tolkes som en bærebølge modulert med en sakte varierende amplitude !

Vi kaller de angulære bølgetallene til henholdsvis bærebølgen og amplitudevaria-sjonen for k og Δk og tilsvarende vinkelfrekvenser for w og Δw . Uttrykk disse ved k_1, k_2, w_1 og w_2 ! Finn også svevefrekvensen n_s, dvs finn den frekvensen den totale lydintensiteten fra de to fløytene varierer med uttrykt ved w_1 og w_2 !

Finn så Δk , Δw og n_s uttrykt ved f, c, v_1 og v_2 !
Finn også tallverdier for Δk , Δw og n_s !

d) Vi tenker oss nå at vi har akkurat samme situasjon som den i pkt c bortsett fra at vi ikke har stillestående luft. Derimot har vi en stødig vind som blåser i motsatt retning av den togene kjører. Absoluttverdien av vindhastigheten kalles v_{vind} og er lik 10,0 m/s. Finn for denne situasjonen svevefrekvensen n_s (for det totale lydsignalet som kan observeres) uttrykt ved $f, c,\ \mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2$ og v_{vind} ! Finn også tallverdi for n_s !

<u>Oppgitt</u>

- $$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2}$$

<u>Oppgave 2</u>

a) Med utgangspunkt i Maxwells ligninger på differensialform (som finnes i vedlagt formelliste), utled bølgeligningen:

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \tag{1}$$

som gjelder for forplantning av elektrisk felt $\vec{E}$ i vakuum. (Merk at for vakuum er ladningstetthet ρ og strømtetthet $\vec{j}$ begge lik null.) Angi c uttrykt ved ε_0 og μ_0 !

En lysstråle som forplanter seg i én dimensjon og består av to skarpe linjer (en blå og en grønn), kan med god tilnærmelse i vakuum beskrives ved summen av to harmoniske bølger, dvs ved:

$$E(x,t) = E_1\cos(k_1x - \omega_1 t) + E_2\cos(k_2x - \omega_2 t) \tag{2}$$

der $k_1 = 1{,}221\cdot 10^7$ rad/m (dvs $\lambda_1 = 514{,}5\,\text{nm}$), $k_2 = 1{,}382\cdot 10^7$ rad/m (dvs $\lambda_2 = 454{,}5\,\text{nm}$), $\omega_1 = 3{,}661\cdot 10^{15}$ rad/s og $\omega_2 = 4{,}143\cdot 10^{15}$ rad/s .

b) Vi antar at lysstrålen forplanter seg i et medium som vi kan betrakte som vakuum. Oppfyller da lysstrålen gitt ved ligning (2), den éndimensjonale varianten av bølgeligningen (1) ? Begrunn svaret, eventuelt ved regning ! (Fullstendig argumentasjon ønskes.)

Vi lar så lysstrålen gå inn i et stoff der den transmitterte delen av strålen kan beskrives ved:

$$E_S(x,t) = E_3\cos(k_3 x - w_3 t) + E_4\cos(k_4 x - w_4 t) \qquad (3)$$

der $k_3 = 1{,}864\cdot 10^7$ rad/m og $k_4 = 2{,}117\cdot 10^7$ rad/m. Merk at $k_3/k_1 \neq k_4/k_2$!

c) Hva er w_3 og w_4? Finn gjeldende for stoffet også fasehastighet v_f, brytningsindeks n og relativ dielektrisitetskonstant e_r for den harmoniske bølgen som i vakuum har $k_1 = 1{,}221\cdot 10^7$ m^{-1} og for den som i vakuum har $k_2 = 1{,}382\cdot 10^7$ m^{-1} ! Vi antar at stoffet har relativ permeabilitet $m_r = 1$.

d) Betrakt ligningen gitt ved:

$$\frac{\P^2 E}{\P x^2} = C\,\frac{\P^2 E}{\P t^2} \qquad (4)$$

der C for et gitt stoff er en konstant.

Finnes der én tallverdi av C gjeldende for det stoffet vi betrakter som er slik at lysstrålen beskrevet ved ligning (3) oppfyller ligning (4) ?
Hvis ja, finn denne tallverdien av C !
Hvis nei, begrunn svaret, eventuelt ved regning ! (Fullstendig argumentasjon ønskes.)

<u>Oppgitt</u>

- $\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$
- Lyshastigheten i vakuum er gitt ved: $c = 2{,}998\cdot 10^8$ m/s

<u>Oppgave 3</u>

Vi skal i denne oppgaven betrakte det idealiserte tilfellet at et fly passerer vilkårlig nært et punkt A på et stivt legeme stivt festet til jorda. Deretter fortsetter det rettlinjet og med konstant hastighet til det har passert vilkårlig nært et punkt B på et annet stivt legeme, også stivt festet til jorda. Vi antar at vi kan se bort fra jordas rotasjon og fra gravitasjonskrefter og betrakter altså jorda med de to stive legemene som et inertialsystem.

I hvert av punktene A og B og i flyet er det plassert en klokke. De tre klokkene antas identiske. Klokken i punktet A er synkronisert med den i punkt B. Tidsdifferansen mellom passeringene av A og B målt med de to synkroniserte klokker på jorden, kalles Δt . Tidsdifferansen mellom passeringene av A og B målt med klokken i flyet, kalles Δt .

a) Er Δt større eller mindre enn Δt ? (Vi antar at klokkene er nøyaktige nok til at tidsdifferansen kan måles.) Begrunn svaret ! (Henvisning til korrekt formel i vedlagt formelliste, med klare definisjoner av størrelsene som inngår, anses som god nok begrunnelse.)

Vi antar så at flyet flyr med konstant hastighet $\mathrm{v} = 4{,}000 \cdot 10^2$ m/s (dvs 1440 km/time) i forhold til jordas referansesystem og at tidsdifferansen mellom passeringene av A og B er målt med klokken i flyet til $\Delta t = 1{,}000 \cdot 10^4$ s .
Vi antar videre at det er mulig å måle avstanden mellom punktene A og B både fra flyet (kalles Δl_{fly}) og på jorda (kalles Δl_{jord}) med tilstrekkelig nøyaktighet.

b) Finn differansen mellom Δl_{fly} og Δl_{jord} og angi hvilken av dem som er lengst !

<u>Oppgitt</u>

- Lyshastigheten c er gitt ved: $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s .

- For $|x| << 1$ gjelder:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \tfrac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$

<u>Oppgave 4</u>

For spektral emitans S_n fra stråling med frekvens n utsendt fra et svart legeme med absolutt temperatur T gjelder:

$$S_n = \frac{2ph}{c^2} \frac{n^3}{e^{hn/kT} - 1} \tag{1}$$

der h er Plancks konstant, c er lyshastigheten i vakuum og k er Boltzmanns konstant.

For å utlede denne loven lagde Max Planck en modell som bestod av en kubus der veggene var bygd opp av elektrisk ladede harmoniske oscillatorer med forskjellige egenfrekvenser. Oscillatorene var i termisk likevekt med den elektromagnetiske strålingen i kaviteten.
Max Planck viste at den midlere energi $<E>_n^{\circ}$ for en harmonisk oscillator med en gitt frekvens n var lik den midlere energien $<E>_n^{b}$ til den elektromagnetiske bølgen med samme frekvens, dvs:

$$<E>_n^{\circ} \;=\; <E>_n^{b} \;\equiv\; <E>_n \tag{2}$$

Planck viste videre:

$$S_n = \frac{2pn^2}{c^2} <E>_n \tag{3}$$

som gir at vi for å få (1) må ha:

$$<E>_n = \frac{hn}{e^{hn/kT} - 1} \tag{4}$$

Vis at en harmonisk oscillator med egenfrekvens n har midlere energi $<E>_n$ gitt ved (4) dersom den harmoniske oscillatoren bare kan ha de tillatte energiene:

$$E_n = nhn \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{5}$$

Det kan nyttes som kjent at sannsynligheten p_n for at oscillatoren (som antas å være i termisk likevekt med temperatur T) skal ha energi E_n, er gitt ved:

$$p_n = \frac{e^{-E_n/kT}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-E_m/kT}} \tag{6}$$

der E_n (og E_m) er gitt ved (5).

Vis også at dersom $h\nu$ er mye mindre enn kT så gjelder:

$$< E >_\nu \approx kT \tag{7}$$

uavhengig av frekvensen ν !

<u>Oppgitt</u>

- $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$
- $$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$
- $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$