NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Førsteamanuensis Knut Arne Strand
Telefon: 73 59 34 61

EKSAMEN

FAG TFY4160 BØLGEFYSIKK

OG

FAG FY1002/MNFFY101 GENERELL FYSIKK II

Lørdag 6. desember 2003

kl. 0900-1400

Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Bestemt, enkel kalkulator

Sensuren kan ventes i uke 2, 2004

Prosenttallene i parentes etter hver oppgave angir hvor meget de vektlegges ved bedømmelse for karaktersetting. Merk at det etter noen av hovedoppgavene er oppgitt opplysninger som kan være nødvendige for å løse de enkelte underoppgaver.

Oppgave 1 (54 %, pkt. f teller like meget som to andre punkter)

Vi skal i første del av denne oppgaven (dvs i punkt a, b og c) betrakte bølger som forplanter seg langs en uendelig lang streng med masse pr. lengdeenhet μ og snorstramming F_T. For alle tre punktene a, b og c antar vi at utsvingene er transversale og så små (og at vi ellers har slike forhold) at bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} \qquad (1)$$

gjelder. I ligning (1) er $D(x,t)$ transversalt utsving for et strengelement med posisjon x ved tiden t. $K = \mu / F_T$ er en konstant for en gitt streng med en gitt stramming.

a) Vi betrakter først en harmonisk vandrebølge beskrevet ved:

$$D(x,t) = D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \qquad (2)$$

I ligning (2) er $D(x,t)$ transversalt utsving som ovenfor, D_0 er bølgens amplitude, $k = 2\pi / \lambda$ der λ er bølgelengden, $\omega = 2\pi\nu$ der ν er frekvensen, og φ er en vilkårlig fasekonstant. For frekvens $\nu = 16$ Hz er bølgelengden $\lambda = 0{,}50$ m. Finn numerisk verdi for fasehastigheten !

b) Vis at det at en harmonisk vandrebølge som gitt ved lign. (2) med vilkårlig frekvens ν, oppfyller bølgeligningen (1), medfører at:

$$\omega = \text{konstant} \cdot k \qquad (3)$$

c) Kan funksjonen:

$$D(x,t) = D_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t + \varphi) + D_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t + \varphi) \qquad (4)$$

med $k_1 = 2\pi$ rad/m, $\omega_1 = 2\pi \cdot 10$ rad/s, $k_2 = 4\pi$ rad/m og $\omega_2 = 2\pi \cdot 15$ rad/s, beskrive en bølge som kan forplante seg på en streng med en eller annen gitt verdi for $K = \mu / F_T$? Begrunn svaret !

Vi skal i resten av denne oppgaven betrakte overflatebølger som forplanter seg på grenseflaten luft/vann.

d) Finn numerisk verdi for fasehastigheten til en harmonisk bølge som har bølgelengde $\lambda = 0{,}50$ mm !

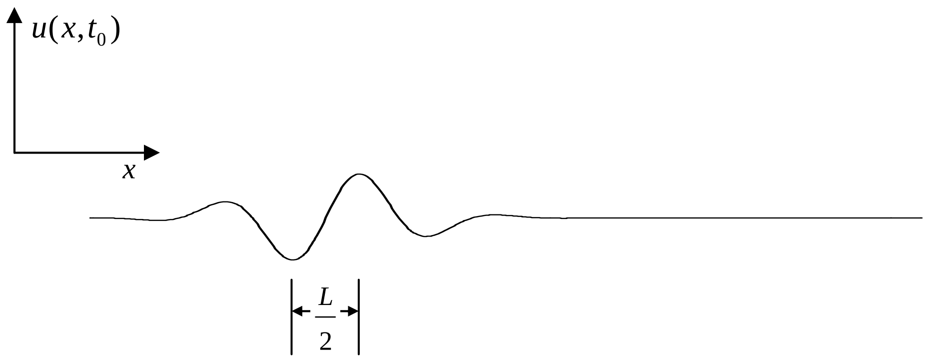
En kan anta at denne bølgelengden er kort nok til at følgende dispersjonsrelasjon gjelder:

$$\omega = \left(\frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{3}{2}} \tag{5}$$

der γ er grenseflatespenningen mellom vann og luft, og ρ_1 og ρ_2 er tetthetene til henholdsvis vann og luft.

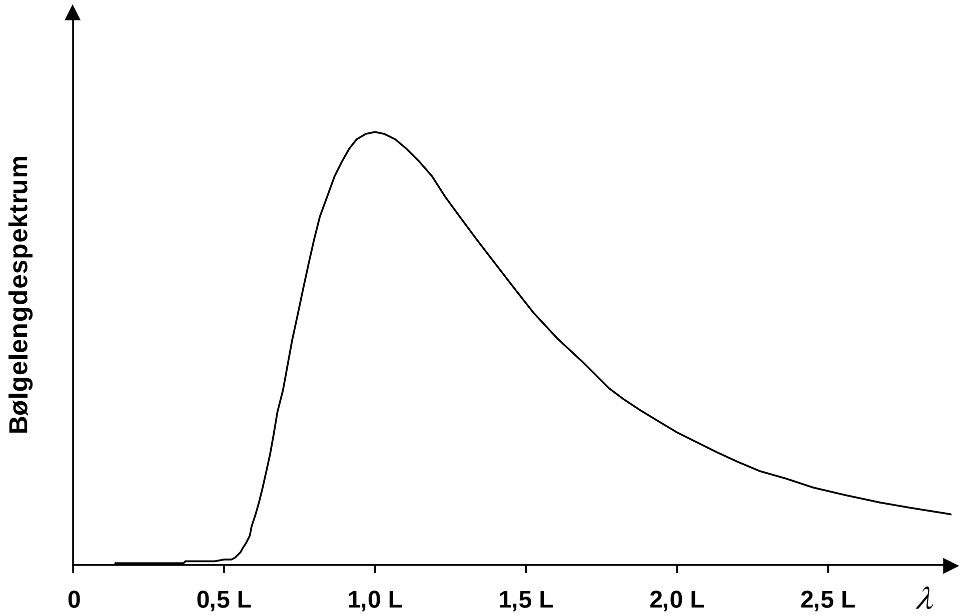
e) Finn forholdet mellom fasehastighet og gruppehastighet for de bølger som har kort nok bølgelengde til at dispersjonsrelasjonen (5) gjelder !

f) Vi betrakter nå tre situasjoner som alle har det til felles at ved tid t_0 har vi en bølgepuls med vertikalt utsving $u(x,t_0)$ som vist på figuren nedenfor:



Her er $u(x,t_0)$ og L ment å være forskjellig i de tre situasjonene nedenfor, men ha samme innbyrdes forhold.

Til orientering opplyses at et slikt bølgetog kan for alle de tre situasjonene vi skal betrakte, tilnærmet settes sammen av et bølgelengdespektrum slik som vist på neste side. (Merk at L er forskjellig for de forskjellige situasjonene. Merk òg at formen eller utstrekningen på spekteret ikke direkte skal nyttes til noe i denne oppgaven.)



De tre forskjellige situasjonene vi skal betrakte er følgende:

I Alle bølgelengder som gir vesentlig bidrag til spekteret, er så store at tyngdebølger dominerer over kapillærbølger, og dybden D er stor nok til at vi kan anta for alle bølgelengdekomponenter som gir vesentlig bidrag, at dispersjonsrelasjonen:

$$\omega = \sqrt{gk} \tag{6}$$

kan nyttes som en god nok tilnærmelse. g er tyngdens akselerasjon.

II Alle bølgelengder som gir vesentlig bidrag til spekteret, er så store at tyngdebølger dominerer over kapillærbølger, og dybden D er så liten at vi kan anta for alle bølgelengdekomponenter som gir vesentlig bidrag, at dispersjonsrelasjonen:

$$\omega = \sqrt{gD}\; k \tag{7}$$

kan nyttes som en god nok tilnærmelse. Vi antar for dette tilfellet at dybden D er den samme over alt der vi betrakter bølgetoget.

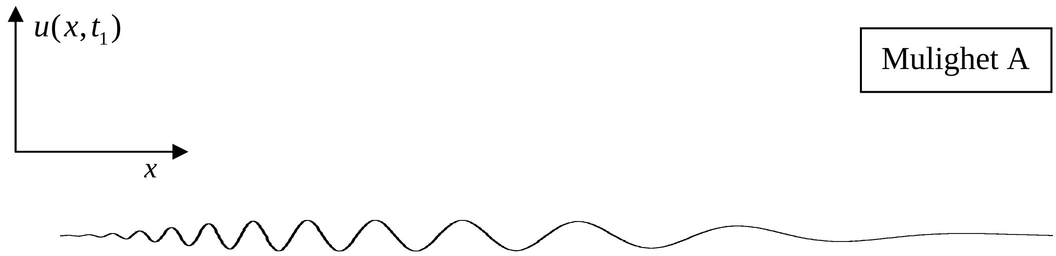
III Alle bølgelengder som gir vesentlig bidrag til spekteret, er så små at kapillærbølger dominerer over tyngdebølger slik at dispersjonsrelasjonen:

$$\omega = \left(\frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2}\right)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{3}{2}} \tag{8}$$

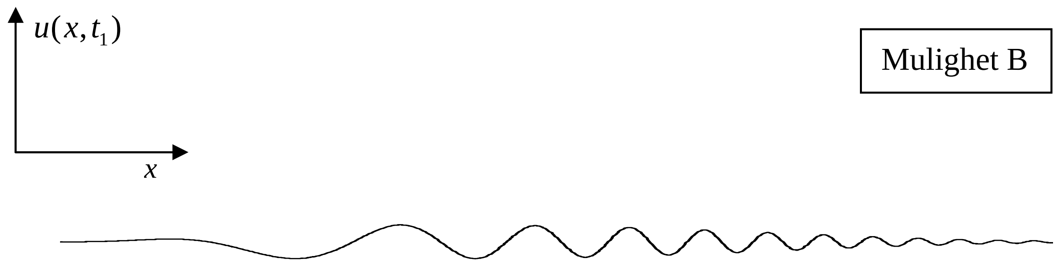
kan nyttes som en god nok tilnærmelse.

Vi betrakter så en gitt tid t_1 så meget større enn t_0, at bølgepulsen har forplantet seg et så langt stykke i x-retning at de forskjellige bølgelengdekomponentene (fourierkomponentene) i en eller flere av situasjonene I, II, og III ovenfor er spredt vesentlig utover i x-retning.

En mulighet (vi kaller den A) er at bølgepulsen da tilnærmet er forvandlet til det bølgetoget som er vist nedenfor:

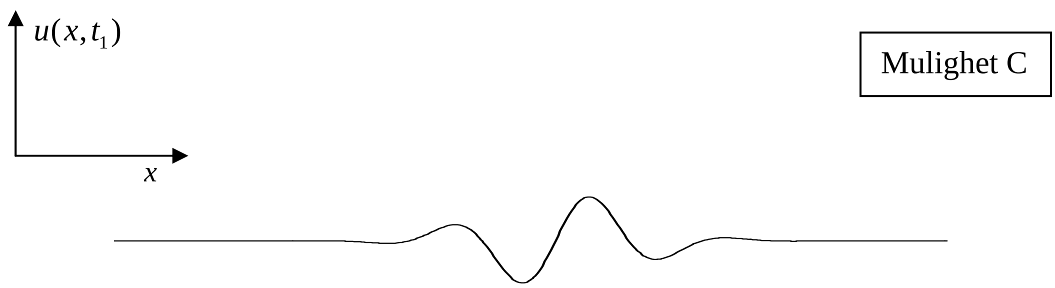


En annen mulighet (vi kaller den B) er at bølgepulsen tilnærmet er forvandlet til:



Merk at t_1 for mulighet A og B ikke trenger være den samme.

En tredje mulighet (vi kaller den C) er at bølgepulsen tilnærmet forblir uforandret når den forplanter seg bortover, dvs at den tilnærmet fortsatt ser ut som opprinnelig uansett verdi for t_1, dvs:



Hvilken av de tre mulighetene A, B, og C vil realiseres i hver av de tre situasjonene I, II og III ? Begrunn svarene ! (Her er det meningen at du for hver av de tre situasjonene I, II og III skal velge en av mulighetene A, B og C selv om den du velger bare er tilnærmet korrekt.)

Oppgitt

- Grenseflatespenningen vann/luft: $\gamma = 73 \cdot 10^{-3}$ N/m.
- Tettheten av vann: $\rho_1 = 1{,}00 \cdot 10^{3}$ kg/m^3.
- Tettheten av luft: $\rho_2 = 1{,}2$ kg/m^3.

Oppgave 2 (31 %)

a) Med utgangspunkt i Maxwells ligninger på differensialform (som finnes i vedlagte formelsamling), utled bølgeligningene:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{1}$$

og:

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{2}$$

som gjelder for forplantning av elektrisk felt $\vec{E}$ og magnetisk felt $\vec{B}$ i vakuum.
(Merk at for vakuum er ladningstetthet ρ og strømtetthet $\vec{j}$ begge lik null.)
Angi c uttrykt ved ε_0 og μ_0 !

b) For elektromagnetiske planbølger som forplanter seg i én dimensjon langs x-aksen tar ligning (1) og (2) formen:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{3}$$

og:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{4}$$

Vis at bølgefunksjonene gitt ved:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \vec{e}_z \cos(kx - \omega t) \tag{5}$$

og:

$$\vec{B}(x,t) = B_0 \vec{e}_y \cos(kx - \omega t) \tag{6}$$

der E_0 og B_0 er <u>positive</u> konstanter, oppfyller ligning (3) og (4) for alle verdier ω og k som er slik at $\omega / k = c$! ω er vinkelfrekvens og $k = 2\pi/\lambda$ der λ er bølgelengde. $\vec{e}_y$ og $\vec{e}_z$ er enhetsvektorer henholdsvis i y- og z-retning.

c) Beskriver ligning (5) og (6) ovenfor en elektromagnetisk bølge som tilnærmet kan realiseres fysisk ? Begrunn svaret utførlig !

d) For en type glass gjelder med god tilnærmelse dispersjonsrelasjonen:

$$\omega = \frac{k}{A + Bk^2} \tag{7}$$

for lys i den synlige del av spekteret. Her er A og B konstanter ulik null.

Oppfyller kvitt lys som forplanter seg i slikt glass i én dimensjon (i x-retning), bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = C \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{8}$$

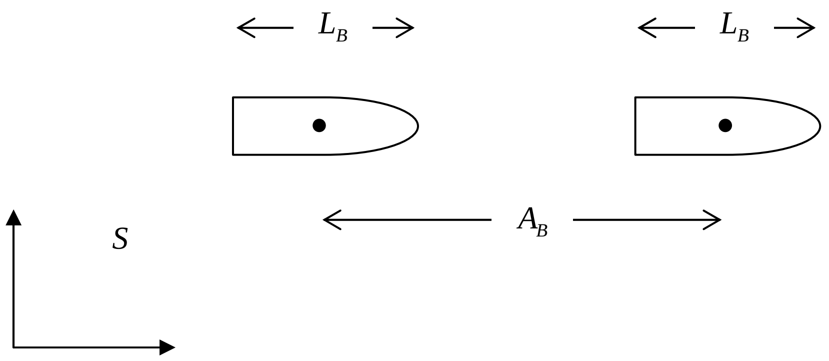
der C er en konstant ? Hvis ja, forklar hvordan C kan bestemmes ! Hvis nei, begrunn svaret !

Oppgitt

- $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$

Oppgave 3 (15 %)

Vi gjør følgende tankeeksperiment (innen spesiell relativitetsteori). Vi har en opprinnelig situasjon som illustrert på figuren under.

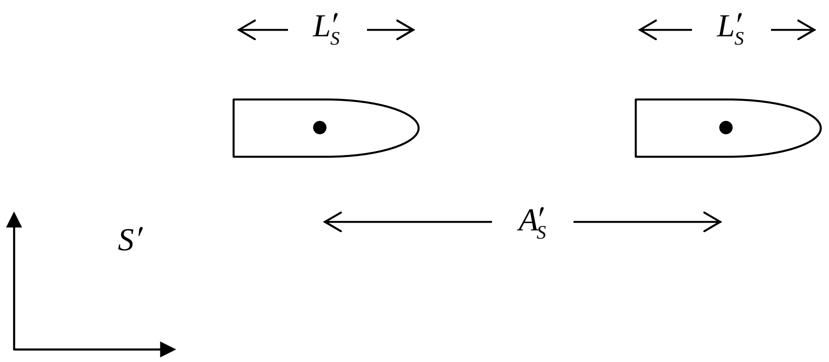


To helt like romskip går rettlinjet (uten rotasjon) med konstant og eksakt samme hastighet langs samme rette linje. Referansesystemet som følger bevegelsen, kaller vi S, og en observatør i ro i dette systemet kaller vi O.

Avstanden mellom sentrum av romskipene som kan observeres av O i denne opprinnelige situasjonen (begynnelsestilstanden), kaller vi A_B, og lengden av hvert av romskipene kaller vi L_B.

Vi antar at de to romskipene har identiske akselerasjonsprogram som blir startet samtidig i S. Vi antar videre at disse er slik at begge romskipene akselererer langs samme rette linje som de før har beveget seg langs, inntil de begge har nådd en hastighet som relativt til S målt av O, er $\frac{7}{25}c$ der c er lyshastigheten. Denne tilstanden kaller vi sluttilstanden.

Det referansesystemet som følger bevegelsen til de to romskipene etter at akselerasjonene er avsluttet og de begge igjen har konstant og samme hastighet, kaller vi S', og en observatør i ro i dette referansesystemet kaller vi O'. Avstanden mellom romskipene som kan observeres av O' i sluttilstanden (dvs etter at begge romskipene er kommet til ro i S') kaller vi A'_S, og lengdene deres kaller vi L'_S.



Vi antar for hele oppgaven at alle gravitasjonskrefter kan neglisjeres, slik at vi kan nytte spesiell relativitetsteori.

Alle avstander og lengder som det spørres om nedenfor, skal uttrykkes ved A_B eller L_B.

a) Finn i sluttilstanden avstanden A_S mellom romskipene og lengdene deres L_S som kan observeres av O !

b) Finn avstanden A'_S mellom romskipene i sluttilstanden (etter at begge romskipene er kommet til ro i S') og lengdene deres L'_S som kan observeres av O' !

Finn også avstanden A'_B mellom romskipene i den opprinnelige tilstanden (dvs før noen av dem har begynt akselerasjonen i S') og lengdene deres L'_B som kan observeres av O' !