NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Førsteamanuensis Knut Arne Strand
Telefon: 73 59 34 61

EKSAMEN

FAG TFY4160 BØLGEFYSIKK

OG

FAG FY1002 GENERELL FYSIKK II

Onsdag 8. desember 2004

kl. 0900-1300

Bokmål

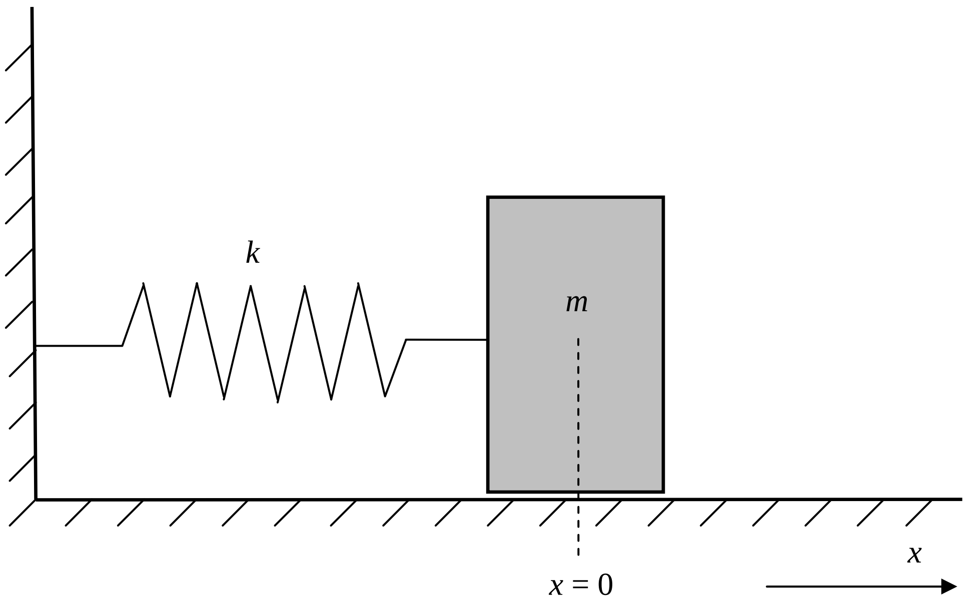
Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Bestemt, enkel kalkulator

Sensuren kan ventes i uke 2, 2005

Prosenttallene i parentes etter hver hovedoppgave angir hvor meget de vektlegges ved bedømmelse for karaktersetting. Merk også at det etter hovedoppgavene kan være oppgitt opplysninger til hjelp for å løse de enkelte underoppgaver.

<u>Oppgave 1</u> (Teller 25 %)



I hele denne oppgaven skal vi betrakte en masse *m* som kan bevege seg <u>friksjonsfritt</u> og som er festet til en fjær. Vi antar for hele oppgaven at fjæren er masseløs og ideell slik at fjærkraften F_{f} alltid er gitt ved:

$$F_{\mathrm{f}} = -kx \qquad (1)$$

der *k* er fjærkonstanten og *x* er avviket fra likevektsposisjonen når oscillatoren kan bevege seg horisontalt (dvs. *x* = 0 for den posisjonen massen vil innta når den er i ro og ingen krefter virker på den i *x*-retning). Vi antar også for hele oppgaven at massen bare vil bevege seg (svinge) i én dimensjon (posisjonskoordinaten i denne dimensjonen kalles alltid *x*).

a) Utled (bl.a. ved å nytte Newtons 2. lov, *F* = *ma*) at massens posisjon må oppfylle følgende differensialligning når massen beveger seg horisontalt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (2)$$

der $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$!

(Merk at vi her ber om en <u>liten</u> utledning og at lign. (1) og (2) i vedlagt formelsamling <u>ikke</u> kan nyttes som kjent.)

Vi snur så oscillatoren slik at den kan svinge i vertikal retning og altså også er påvirket av tyngdekraften $F_g = mg$ (der g er tyngdens akselerasjon). Likevektsposisjonen i vertikalretning kalles x_0. (Når oscillatoren kan svinge vertikalt, velges x-aksen positiv i tyngdefeltets retning, dvs. nedover.)

b) Finn fjærkonstanten k uttrykt ved m, g og x_0 !

Vi snur så oscillatoren tilbake slik at den igjen kan svinge horisontalt, men holder oscillatoren fast i posisjon x_0. Vi slipper den så med null hastighet fra denne posisjonen.

c) Finn posisjonen x som funksjon av tiden t for oscillatoren, uttrykt ved x_0 og g !
(Her kan alt oppgitt i vedlagt formelsamling nyttes som kjent.)
Finn så tidspunktene (dvs. tallsvar for disse) når oscillatoren vil passere likevektsposisjonen $x = 0$ når $x_0 = 0{,}010\,\mathrm{m}$ og $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$!

Vi snur ennå en gang oscillatoren slik at den kan bevege seg vertikalt (og antar fortsatt at den utelukkende beveger seg i én dimensjon, dvs. nå vertikalt).

d) Utled den differensialligningen for posisjonen x som nå beskriver bevegelsen til massen m !
Finn så den generelle løsning av denne ligningen for posisjonen x som funksjon av tiden t uttrykt ved x_0 og g (samt ved to vilkårlige konstanter) !

<u>Oppgave 2</u> (Teller 44 %)

For en del helt forskjellige typer bølger som forplanter seg i én dimensjon, gjelder bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} \qquad (1)$$

$D(x,t)$ er forskjellige størrelser for forskjellige bølger. For f.eks. bølger på streng representerer $D(x,t)$ transversalt utsving for et strengelement med posisjon x ved tiden t. K er en konstant (uavhengig bølgens frekvens) for en gitt bølgetype for et gitt tilfelle (f.eks. for bølger på en gitt streng med en gitt stramning).

a) Vi betrakter først en harmonisk vandrebølge beskrevet ved:

$$D(x,t) = D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \qquad (2)$$

I ligning (2) er D_0 bølgens amplitude, $k = 2\pi/\lambda$ der λ er bølgelengden, $\omega = 2\pi\nu$ der ν er frekvensen, og φ er en vilkårlig fasekonstant.

Vis, ved å sette inn ligning (2) i ligning (1), at dersom en harmonisk vandrebølge med vilkårlig frekvens ν oppfyller bølgeligningen (1), så medfører det at:

$$\omega = \text{konstant} \cdot k \qquad (3)$$

Vi skal i hele resten av oppgaven betrakte grenseflatebølger som forplanter seg på grenseflaten vann/luft. Vi antar at både bølgelengden λ og vanndybden alltid er store nok til at vi for fasehastigheten v_f med god nok tilnærmelse har:

$$v_f = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} \qquad (4)$$

der g = 9,8 m/s^2.

b) Oppfyller bølger som har en slik bølgelengdeavhengighet for fasehastigheten som gitt ved ligning (4), bølgeligningen (1) ? Begrunn svaret utførlig !

c) Vis (ved å ta utgangspunkt i ligning (4)) at for bølger som oppfyller ligning (4), har vi:

$$v_g = \tfrac{1}{2} v_f \qquad (5)$$

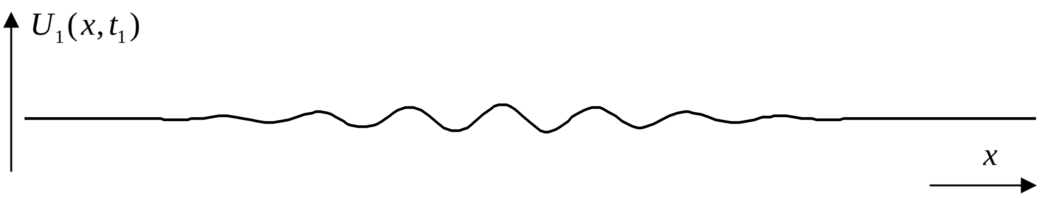
der v_g er gruppehastighet.

d) Finn numerisk verdi for fasehastighet og gruppehastighet for bølger som har bølgelengde $\lambda = 0{,}60$ m !

e) Et bølgetog med utsving $U_1(x,t)$ som vist på figuren nedenfor for en gitt tid $t = t_1$, er generert (laget) på en vann/luft-grenseflate av en bølgegenerator i en bølgerenne (dvs. det forplanter seg i én dimensjon). Bølgetoget har fourierkomponenter (k-komponenter der $k = 2\pi / \lambda$) sentrert om $k = k_0$ med $k_0 = 2\pi / \lambda_0$ der $\lambda_0 = 0{,}60\,\text{m}$. Vi antar som en brukbar tilnærmelse at vi for sammenhengen mellom ω og k kan regne:

$$\omega \;\approx\; \omega_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} \cdot (k - k_0) \qquad (6)$$

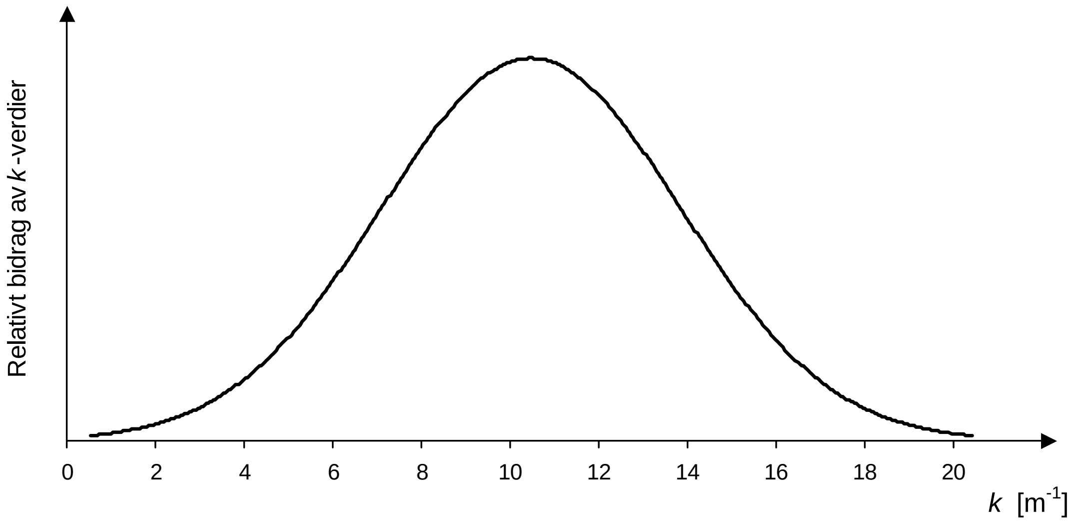
for de fourierkomponentene som bølgetoget består av. (I lign. (6) er $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$.) Dvs. vi neglisjerer at omhyllingskurven til bølgetoget forandrer form når bølgetoget forplanter seg bortover bølgerenna (så lenge vi betrakter det). Det er en definisjonssak akkurat hvor langt bølgetoget er. Vi definerer det til å ha lengde $6\lambda_0 = 6 \cdot 0{,}60 \text{ m} = 3{,}60 \text{ m}$.
Når bølgetoget går bortover overflaten ser det ut som nye bølger med $\lambda \approx \lambda_0 = 0{,}60\,\text{m}$ oppstår i bakkant av bølgetoget og får økende amplitude mens de forplanter seg framover i bølgetoget inntil de har nådd sentrum. Deretter minker de til amplituden igjen blir null i framkant av bølgetoget.



Finn tiden Δt fra en slik bølge oppstår i bakkant av bølgetoget til den dør (dvs. amplituden minker til null) i framkant av bølgetoget ! Hvor langt har bølgetoget (sentrum av det) gått på denne tiden Δt ?

f) Vi betrakter nå en ny situasjon der vi i en svært lang bølgerenne har generert et nytt, kortere bølgetog, men som også har *k*-komponenter sentrert om $k = k_0$ der $k_0 = 2\pi / \lambda_0$ med $\lambda_0 = 0{,}60\,\mathrm{m}$. (Vi antar ikke at tilnærmelsen gitt ved lign. (6) er brukbar for denne situasjonen.) Bølgetoget har utsving $U_2(x,t)$ og er vist på figuren nedenfor for tiden $t = t_0$. Vi antar at tiden t_0 er straks etter at bølgetoget er generert.

Til orientering opplyses at et slikt bølgetog kan settes sammen av et slikt spektrum av *k*-verdier som vist på figuren nedenfor. (Merk at formen på *k*-spekteret ikke skal nyttes til noe i denne oppgaven.)



Vi antar videre at vi har plassert en bølgemåler på et sted vi kaller B som er 30 m borte fra der vi genererer bølgetoget. For praktiske forhold i denne oppgaven, kan vi anta at bølgemåleren med tilknyttet analyseapparatur, for det gitte bølgetoget ikke kan registrere *k*-komponenter over 19 m^{-1} og *k*- komponenter under 2,0 m^{-1}. Den kan altså kun registrere *k*-verdier mellom 2,0 m^{-1} og 19 m^{-1}.

Merk at en bølgedetektor måler utslag som funksjon av tid, men tilknyttet apparatur kan programmeres til ut fra det å regne om til tidspunkt for når den første registrerbare *k*-komponent i bølgetoget ankommer, og tidspunkt for når den siste registrerbare *k*-komponent i bølgetoget opphører på stedet B.

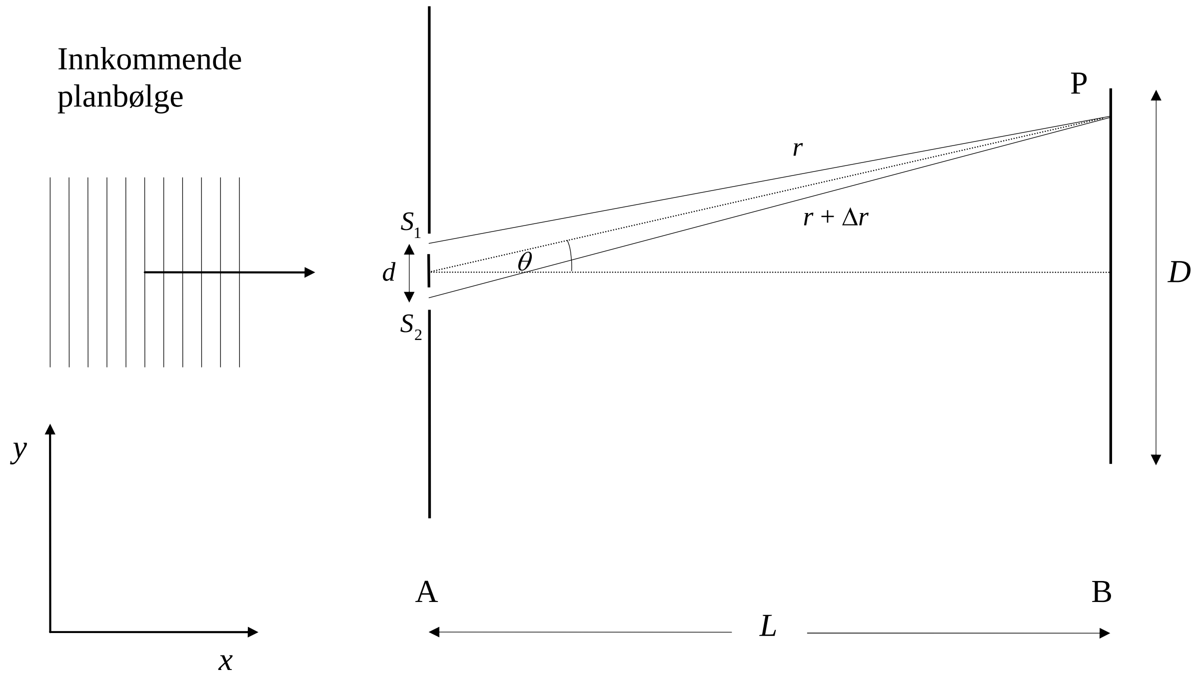
Hvor lang tid vil en i samsvar med det ovenfor, måle at det gitte bølgetoget bruker på å passere bølgemåleren på stedet B ?

[For dette punktet og neste kan vi med god tilnærmelse anta at fronten av bølgetoget hele strekningen fra der den er generert, til der vi måler den, forplanter seg med konstant hastighet. Det samme gjelder for bakkanten. For videre å forenkle regningen ser vi (som en brukbar tilnærming) bort fra den tiden som brukes for å generere bølgetoget og utstrekningen det har umiddelbart etter at det er generert.]

g) Vi antar nå at vi har en bølgemåler til, som kan registrere akkurat de samme *k*-komponenter som den i punkt f, uansett hvor den plasseres i bølgerenna til høyre for B. Hvor langt fra B må denne plasseres, dersom den skal registrere framkant av bølgetoget beskrevet i pkt. f, akkurat i det bølgemåleren på stedet B registrerer bakkant av bølgetoget ? Med andre ord, hvor langt er bølgetoget blitt (slik vi har definert lengden av det ut fra det som kan måles) når bakkanten av det passerer stedet B ?

Oppgave 3 (Teller 31 %)

Vi skal i denne oppgaven betrakte en planbølge med lys (som er lineærpolarisert) som kommer normalt inn mot en skjerm A med to spalter S_1 og S_2. Interferensmønsteret dannet av lyset som passerer S_1 og S_2 blir registrert på en skjerm B plassert en avstand L fra A, som vist på figuren nedenfor.



Vi antar at spaltene S_1 og S_2 er like og så smale at hver av dem (i samsvar med Huygens' prinsipp) er utgangspunktet for en bølge med en halvsirkel som tverrsnitt. Det vil si, vi antar at bølgene fra de to spaltene er sylinderbølger og at spaltene er så lange at vi ikke har problem med ende-effekter der vi observerer lysfordelingen på observasjonsskjermen. I hele oppgaven skal vi altså bare regne på det som skjer i det tverrsnitt som papirplanet representerer, der bølgene fra S_1 og S_2 har halvsirkler som bølgefronter. Vi antar for hele oppgaven at $L \gg d$ slik at lysstrålen fra S_1 til et punkt P på observasjonsskjermen kan betraktes å være parallell med lysstrålen fra S_2 til P (uavhengig av P's plassering).

Vi antar videre for hele oppgaven unntatt pkt. d at:

- Det innkommende lyset er fullstendig koherent,

og for punkt a, b og c:

- De elektriske feltene henholdsvis fra spalt S_1 og fra spalt S_2, kan i et punkt P på observasjonsskjermen (dvs. at lyset er bøyd vinkelen θ) uttrykkes ved:

$$E_1 = E_{10}\cos\left[kr - \omega t - \varphi\right] \tag{1}$$

$$E_2 = E_{20}\cos\left[k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi\right] \tag{2}$$

der $k = 2\pi/\lambda$, λ er bølgelengden, ω er vinkelfrekvensen, φ er en fasekonstant (som vi ikke har bestemt), r er avstanden fra S_1 til P, $r+\Delta r$ er avstanden fra S_2 til P og $\Delta r = d\sin\theta$. E_{10} og E_{20} er avhengige av henholdsvis r og $r+\Delta r$. Men siden vi betrakter $L \gg d$ og også har $L \gg D/2$, kan vi med god tilnærmelse sette:

$$E_{10} = E_{20} \equiv E_0 \quad \text{(uavhengig av P's plassering på skjermen)} \tag{3}$$

a) Med forutsetningene ovenfor kan det vises at det totale feltet på observasjons-skjermen som funksjon av vinkelen θ er gitt ved:

$$E_\theta = 2E_0\cos\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)\cos[k(r+\tfrac{1}{2}d\sin\theta) - \omega t - \varphi] \tag{4}$$

Finn ut fra E_θ gitt ved ligning (4), lysets intensitetsfordeling I_θ på observasjonsskjermen ! (Her kan ligning (71), men <u>ikke</u> ligning (72), i vedlagte formelsamling nyttes som kjent.)

b) Finn de vinkler θ som gir maksimum lysintensitet (uttrykt ved d og λ) ! Hvor mange slike interferensmaksima får vi på observasjonsskjermen B når $\lambda = 5{,}00\cdot10^2$ nm, $L = 2{,}00$ m, $D = 0{,}500$ m og $d = 50{,}0$ µm ?

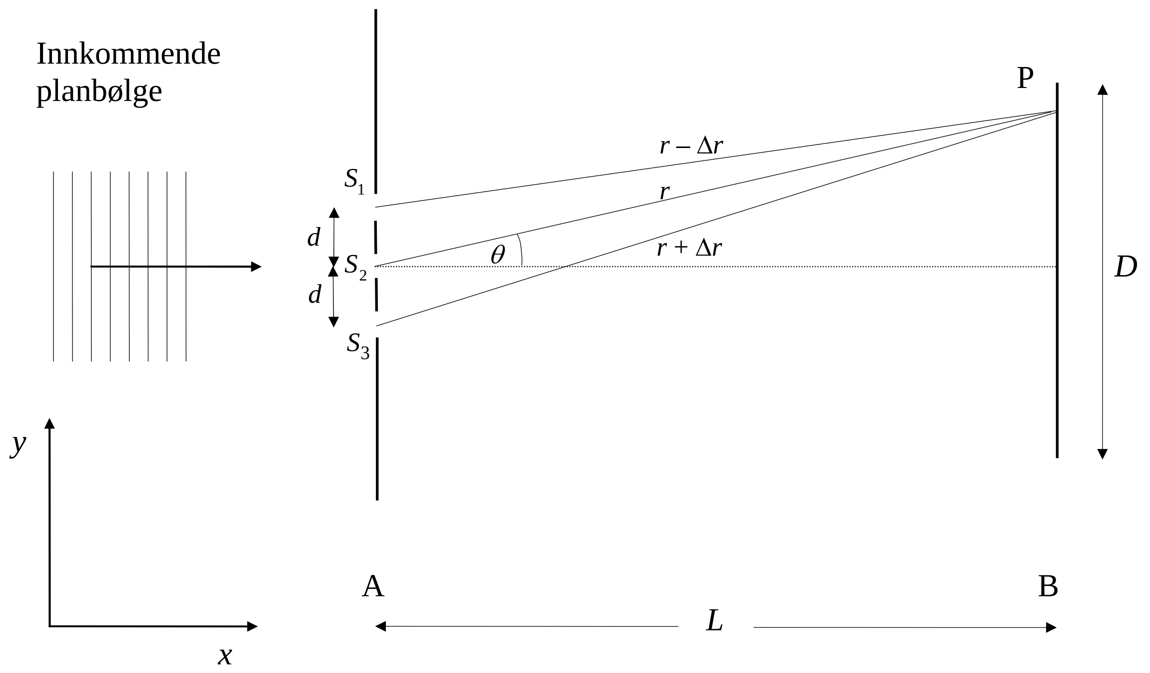
c) Vis ut fra ligning (1), (2) og (3) og de øvrige antagelser gitt ovenfor, at uttrykket for E_θ gitt i ligning (4), er korrekt ! (Her kan du nytte reell regning eller kompleks representasjon ettersom du ønsker.)

d) Vi antar for dette punktet at den innkommende lysstrålen (planbølgen) fortsatt er fullstendig koherent over hele stråletverrsnittet, men at koherenslengden er ukjent. (Koherenslengden kan tenkes definert som den lengden langs strålen hvor fasen kan predikeres med noenlunde sikkerhet, dersom fasen er kjent i det punktet på strålen der det måles ut fra.)

Vi antar som i punkt b at L = 2,00 m, D = 0,500 m og d = 50,0 μm, men nå er det middelbølgelengden λ_m til innkommende lys som vi antar er $5{,}00 \cdot 10^2$ nm.
Vi antar også at en klart kan se like mange interferensmaksima på observasjonsskjermen B som under situasjonen beskrevet i pkt. b, dvs. som med fullstendig koherent lys.

Hvor stor må koherenslengden til det innkommende lyset da omtrent minst være ? Begrunn svaret !

e) Vi antar igjen at den innkommende lysstrålen er fullstendig koherent og at alt ellers er som beskrevet innledningsvis i oppgaven bortsett fra at spalteskjermen A nå har 3 åpninger som vist på figuren nedenfor.



Under samme antagelser som innledningsvis i oppgaven, kan da de elektriske feltene fra spaltene S_1, S_2 og S_3, i et punkt P på observasjonsskjermen uttrykkes henholdsvis ved:

$$E_1 = E_0 \cos\left[k(r - \Delta r) - \omega t - \varphi\right] \tag{5}$$

$$E_2 = E_0 \cos\left[kr - \omega t - \varphi\right] \tag{6}$$

$$E_3 = E_0 \cos\left[k(r + \Delta r) - \omega t - \varphi\right] \tag{7}$$

der $\Delta r = d \sin\theta$ som ovenfor.

Finn i dette tilfellet lysets intensitetsfordeling på observasjonsskjermen B som funksjon av vinkelen θ !

<u>Oppgitt:</u>

- $\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$
- $e^{iu} = \cos u + i \sin u$ der $i = \sqrt{-1}$