NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

KONTINUASJONSEKSAMEN TFY4160 BØLGEFYSIKK
Torsdag 9. august 2007 kl. 0900 - 1300

Hjelpemiddel: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjend kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidd av NTNU. (HP30S eller liknende.)

Vedlegg A: Oppgavene (Side 2 - 6).
Vedlegg B: Formelsamling (Side 7 - 15).

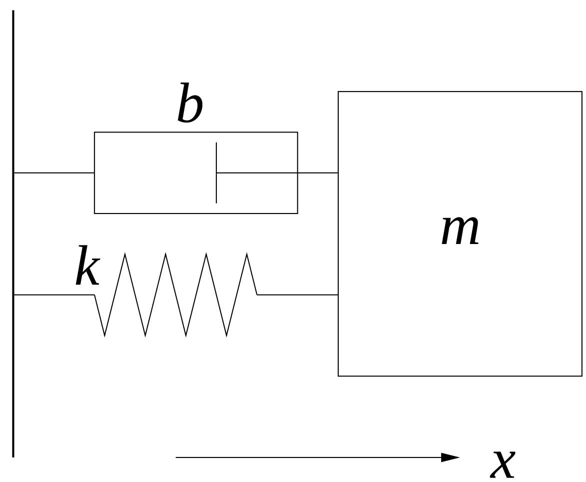
Prøva består av 5 oppgaver som vil telle like mye under vurderinga. Vektorstørrelser angis med **feite** typer. Enhetsvektorer angis med hatt over symbolet.

Sensuren kommer i løpet av august.

Vedlegg A: Oppgavene

OPPGAVE 1 [Teller 20%]

En masse m er festet til en fjær med fjærkonstant k. Dempingskraften er proporsjonal med hastigheten, $-b\dot{x}$.



Vis at massens bevegelse er bestemt av ligningen

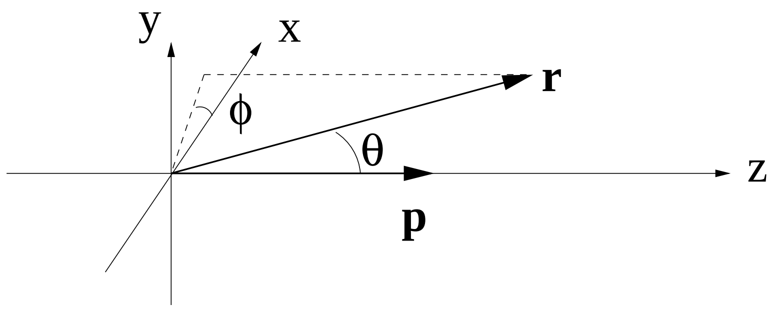
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

der x representerer massens utsving i forhold til likevektsposisjonen $x = 0$.
Vi betrakter svakt dempede svingninger, dvs $b \ll 2m\omega_0$, der $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$. Vis (ved innsetting) at et utsving med tidsavhengighet

$$x(t) = Ae^{-t/\tau}\cos(\omega t + \phi)$$

er løsning av bevegelsesligningen, og fastlegg således "dempingstiden" τ og vinkelfrekvensen ω.
Du vil gjerne at dempingen skal være så liten at systemets (mekaniske) energi ikke reduseres med mer enn 1% i løpet av 50 perioder av svingningen. Hva blir da øvre grense b_{max} for dempingskoeffisienten dersom $m = 0.25$ kg og $k = 400$ N/m.

OPPGAVE 2 [Teller 20%]



En oscillerende elektrisk dipol,

$$\boldsymbol{p}(t) = \hat{z}\, p_0 \, \cos\omega t,$$

resulterer i et elektrisk felt,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi r} \, \cos[\omega(t - r/c)]\, \hat{\theta},$$

og et magnetfelt,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \sin\theta}{4\pi c r} \, \cos[\omega(t - r/c)]\, \hat{\phi}.$$

Begge disse er tilnærmede uttrykk som gjelder så lenge vi er langt unna dipolen, samt at bølgelengden er stor i forhold til dipolens utstrekning. Videre er θ vinkelen mellom z-aksen og $\boldsymbol{r}$, mens $\hat{\theta}$ og $\hat{\phi}$ er enhetsvektorer som peker i retning av økende verdi av henholdsvis θ og ϕ. (Med andre ord, r, θ og ϕ er standard kulekoordinater, se figuren ovenfor.)

Bestem Poyntings vektor $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t)$, og deretter strålingsintensiteten

$$I(\boldsymbol{r}) = \langle S(\boldsymbol{r}, t) \rangle$$

Skisser $I(\theta)$ (for gitt r og ϕ) mellom $\theta = 0$ og $\theta = \pi$. Skisser også $I(\phi)$ (for gitt r og θ) mellom $\phi = 0$ og $\phi = 2\pi$.

Vis at total (midlere) utstrålt energi pr tidsenhet (dvs effekt) blir

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

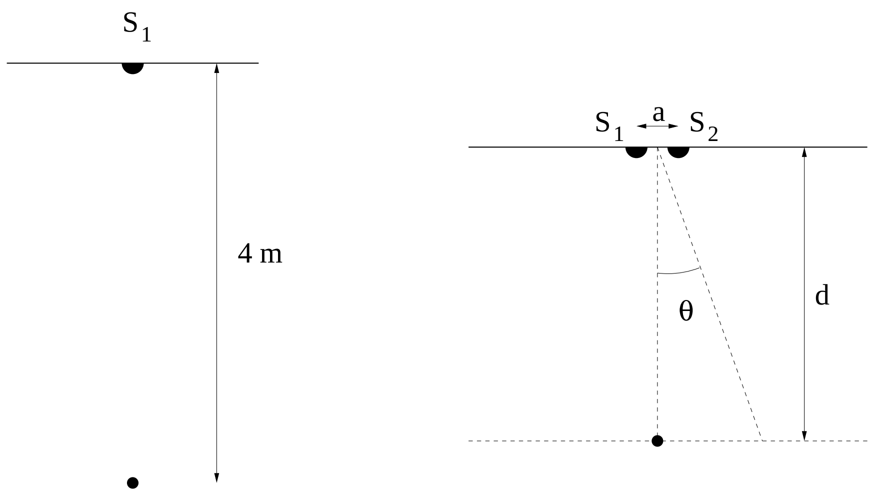
(Tips: Integrer $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ over en kuleflate med radius r.)

Diskuter kort fenomenene blå himmel og rød solnedgang i lys av dette resultatet.

Oppgitt:

$$\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\,(\sin 3\theta - 3\sin\theta)$$
$$dA = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

OPPGAVE 3 [Teller 20%]



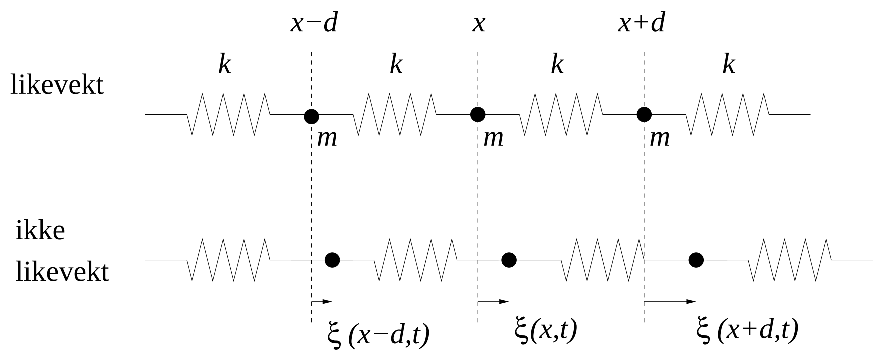
En høyttaler S_1 genererer en halvkuleformet lydbølge med frekvens $\nu_1 = 440$ Hz. Midlere utstrålt effekt er $P_1 = 1.0$ W, og intensiteten er uniform over halvkulen. (Se figur over, til venstre.) Du befinner deg i avstand 4 m fra høyttaleren. Hvor stor er lydintensiteten I_1 der? Hvor mange dB (desibel) tilsvarer dette?

To slike høyttalere, S_1 og S_2, genererer halvkuleformede lydbølger med frekvens henholdsvis $\nu_1 = 440$ Hz og $\nu_2 = 441$ Hz. (Se figur over, til høyre.) Utstrålt effekt er den samme for de to høyttalerne. Du befinner deg rett foran høyttalerne, i avstand d. Anta at d er stor i forhold til avstanden a mellom de to høyttalerne. Lydbølgene er da tilnærmet plane bølger der du står (i $x = d$), slik at de tilhørende (longitudinale) partikkelutsvingene kan skrives på formen $\xi_j(x,t) = \xi_0 \sin(k_j x - \omega_j t)$ $(j = 1, 2)$. Finn et uttrykk for intensiteten $I(d,t)$. Skisser noen sekunders forløp av $I(d,t)$. Forklar hva du hører.

Anta nå at de to høyttalerne genererer identiske lydbølger (samme intensitet og fase) med frekvens $\nu = 3400$ Hz. Avstanden mellom høyttalerne er $a = 30$ cm, og du kan bevege deg langs en linje i avstand $d = 10$ m fra høyttalerne. Hva er lydbølgens bølgelengde λ? Hvor langt må du flytte deg (mot høyre, evt venstre, i figuren) for at lyden skal forsvinne?

Oppgitt: $I(x,t) \sim |\xi(x,t)|^2$. Lydhastigheten i luft: 340 m/s.
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2]$

OPPGAVE 4 [Teller 20%]



Figuren over viser en del av en uendelig lang masse-fjær-transmisjonslinje, bestående av identiske masser m forbundet med identiske masseløse fjærer med fjærkonstant k. Øverst i figuren er systemet i likevekt, med massene lokalisert i posisjoner $x + nd$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Nederst i figuren er systemet ikke i likevekt, eksempelvis kan det være en (longitudinal) harmonisk bølge som forplanter seg langs transmisjonslinjen. En masses utsving i forhold til likevektsposisjonen angis med ξ, som dermed avhenger både av x og t.

Anvend Newtons 2. lov på massen med likevektsposisjon x og utsving $\xi(x,t)$ og vis at utsvinget ξ oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

dersom vi antar at funksjonen $\xi(x,t)$ varierer langsomt (som funksjon av x) mellom to nabomasser (dvs $d \ll \lambda$, der λ er bølgelengden). Hva blir bølgehastigheten v?

Anta nå at en harmonisk bølge

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

forplanter seg langs transmisjonslinjen. Vi skal se nærmere på energien som transporteres med en slik bølge. Bestem kinetisk energi E_k pr masse og potensiell energi E_p pr fjær. Vis at disse er like store, $E_k = E_p$, og at den totale energien pr lengdeenhet blir

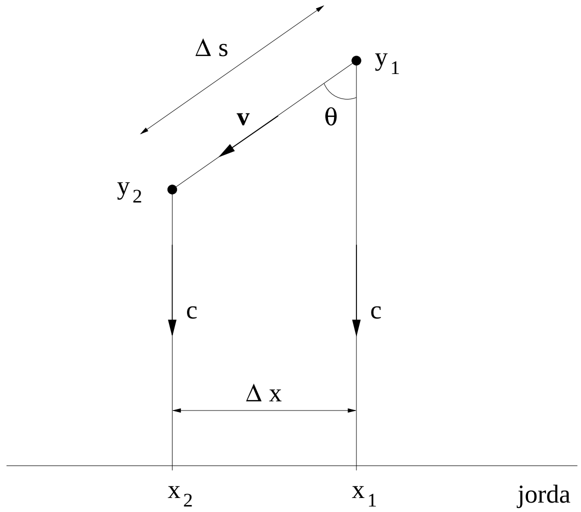
$$\varepsilon = \frac{E}{d} = \mu \omega^2 \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

der $\mu = m/d$ er transmisjonslinjens masse pr lengdeenhet. (Tips: Regn ut E_p til ledende orden i (den lille) størrelsen kd.) Hvor mye energi passerer i middel (dvs midlet over en periode) et gitt sted på transmisjonslinjen pr tidsenhet?

Oppgitt:

$$\xi(x \pm d, t) = \xi(x,t) \pm d\, \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} d^2\, \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} + \ldots$$

OPPGAVE 5 [Teller 20%]



En stjerne beveger seg med hastighet v over himmelen, med en retning slik at vinkelen mellom $\boldsymbol{v}$ og synslinjen (fra stjernen ned til jorda) er θ (se figuren ovenfor). Når stjernen befinner seg i posisjon (x_1, y_1), sender den ut lys som detekteres på jorda, i posisjon $(x_1, 0)$, ved tidspunktet t_1. Tilsvarende, når stjernen befinner seg i posisjon (x_2, y_2), sender den ut lys som detekteres på jorda, i posisjon $(x_2, 0)$, ved tidspunktet t_2. Den skjødesløse *observatør* kunne nå komme i skade for å hevde at stjernen beveger seg med hastighet

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

men som fysiker innser du raskt at dette bare ville være en *tilsynelatende* hastighet, ettersom Δx ikke nødvendigvis tilsvarer avstanden som stjernen har beveget seg i løpet av tiden Δt.
Den skjødesløse *fysiker* kunne videre komme i skade for å hevde at stjernens hastighet v alltid må være større enn u, ettersom tilbakelagt reise Δs alltid vil være større enn Δx (med mindre $\theta = \pi/2$, da er selvsagt $\Delta s = \Delta x$).
Som den *påpasselige* fysiker *du* er, innser du imidlertid at stjernen befant seg i posisjonene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) henholdvis ved tidspunktene t_1' og t_2', og at tidsforbruket $\Delta t' = t_2' - t_1'$ ikke nødvendigvis er det samme som Δt. Du bestemmer deg derfor for å tenke saken nøyere gjennom før du uttaler deg om sammenhengen mellom stjernens hastighet $v = \Delta s/\Delta t'$ og dens tilsynelatende hastighet u.
Etter en grundig analyse har du kommet fram til sammenhengen

$$u = \frac{v \sin\theta}{1 - (v/c)\cos\theta}$$

Vis hvordan du kom fram til dette resultatet!
For en gitt hastighet v vil det være en bestemt vinkel $\theta_{\max}$ som gir maksimal tilsynelatende hastighet u. Bestem denne vinkelen $\theta_{\max}$. Finn et uttrykk for u når vinkelen er $\theta_{\max}$ og vis at u da alltid vil overstige v. For hvilke verdier av v vil nå u også overstige lyshastigheten c?

Tips: Alle tidspunkter og posisjoner (”hendelser”) i denne oppgaven måles i jordas referansesystem (som her betraktes som et inertialsystem).

Vedlegg B: Formelsamling

Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\xi(\boldsymbol{r},t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \xi(\boldsymbol{r},t) \left(\equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:

$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over bølgelengde λ:

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda A(x,t)\,dx$$

Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over periode T:

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^T A(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T A(x,t)\,dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_BT$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk (Q = varme):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum (Q = varme):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmeutveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass (m = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

med $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

- Dopplereffekt:

$$\nu_\text{O} = \frac{1 - v_\text{O}/v}{1 - v_\text{S}/v}\, \nu_\text{S}$$

- For sjokkbølger:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_\text{S}}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet μ_1 for $x < 0$ og μ_2 for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
  $$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} \, y_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
  $$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} \, y_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis E_1, ρ_1 (for $x < 0$) og E_2, ρ_2 (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
  $$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \, \xi_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
  $$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \, \xi_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- Bølgeligning for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:
$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:
$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:
$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:
$$I(\theta) = I_0 \cos^2\theta$$

- Lineære medier:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 (1+\chi_e)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{M} &= \chi_m \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \mu_0 (1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \\
\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} &= q_{\text{fri}} \\
\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} &= 0 \\
\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} &= I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho_{\text{fri}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
u &= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \\
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ i grenseflaten):

$$\begin{aligned} \Delta D_{\perp} &= 0 \\ \Delta E_{\parallel} &= 0 \\ \Delta B_{\perp} &= 0 \\ \Delta H_{\parallel} &= 0 \end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\theta_r = \theta_i$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

- Diffraksjonsgitter med N smale spalter:

$$I(\theta) = I_0\,\frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0)\,\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}$$

- Lorentzfaktor:
$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$
- Lorentztransformasjonene ($\overline{S}$ har hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):
$$\begin{aligned} \overline{x} &= \gamma\,(x - vt) \\ \overline{y} &= y \\ \overline{z} &= z \\ \overline{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(\overline{x} + v\overline{t}) \\ y &= \overline{y} \\ z &= \overline{z} \\ t &= \gamma\left(\overline{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right) \end{aligned}$$
- Tidsdilatasjon:
$$\Delta t = \gamma \Delta \overline{t}$$
- Lengdekontraksjon:
$$\Delta \overline{x} = \gamma \Delta x$$
- Hastighet i S ($\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):
$$u_x = dx/dt$$
$$u_y = dy/dt$$
$$u_z = dz/dt$$
  Hastighet i $\overline{S}$ ($\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_x\hat{x} + \overline{u}_y\hat{y} + \overline{u}_z\hat{z}$):
$$\overline{u}_x = d\overline{x}/d\overline{t}$$
$$\overline{u}_y = d\overline{y}/d\overline{t}$$
$$\overline{u}_z = d\overline{z}/d\overline{t}$$
- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):
$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$
- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:
$$\overline{\nu} = \nu\left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

- Energi:

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ E_0 &= mc^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: E, $\boldsymbol{p}$, E_k og m bevart.
- Uelastisk prosess: E og $\boldsymbol{p}$ bevart.