NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN FY1002 og TFY4160 BØLGEFYSIKK
Fredag 3. desember 2010 kl. 0900 - 1300
Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (Citizen SR-270X eller HP30S.)

Side 2 – 6: Oppgaver
Side 7 – 15: Formelsamling
Side 16: God jul!

Prøven består av 6 oppgaver, i alt 10 deloppgaver. Hver deloppgave vil i utgangspunktet telle like mye (8 %) på sluttkarakteren. Hele denne prøven teller 80 % på sluttkarakteren. De resterende 20 % utgjøres av midtsemesterprøven som ble avholdt tidligere i høst.

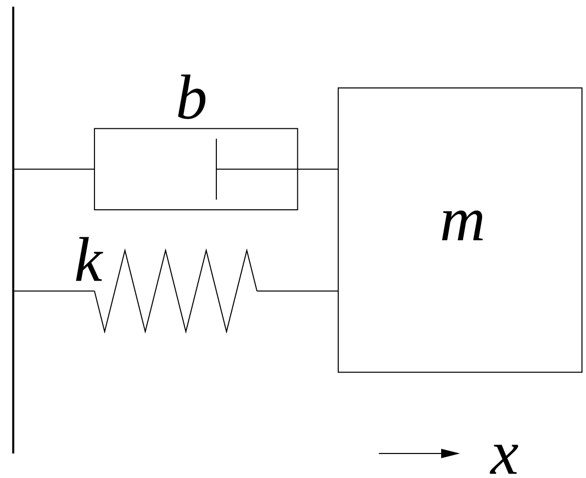
Sensuren kommer senest 3. januar 2011.

Noen Taylorutviklinger (for $x \ll 1$, til orden x^3):

$$
\begin{aligned}
e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \dots \\
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 \dots \\
(1+x)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 \dots
\end{aligned}
$$

OPPGAVE 1 [teller 16 %]

Figuren viser et dempet svingesystem. En masse m er festet til ei ideell fjær med fjærkonstant k. Svingningene dempes av en kraft $-b\dot{x}$, dvs proporsjonal med massens hastighet. (b er en dempningskonstant.)



<u>**a**</u>

• Skriv ned bevegelsesligningen for dette svingesystemet. (Dvs: Differensialligningen for massens utsving x fra likevektsposisjonen $x = 0$.)

Massens utsving er gitt ved

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t,$$

der vi antar *svak* dempning.

• Hva blir den "karakteristiske dempningstiden" τ?

• Hva blir vinkelfrekvensen ω?

Tips: Velg selv om du vil skrive ned τ og ω, eller regne ut disse størrelsene med utgangspunkt i bevegelsesligningen.

<u>**b**</u>

• Anta at dempningen er meget svak, $\omega\tau \gg 1$. Regn ut systemets Q-verdi (evt "godhetsfaktor"), definert ved

$$Q \equiv 2\pi \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^{-1},$$

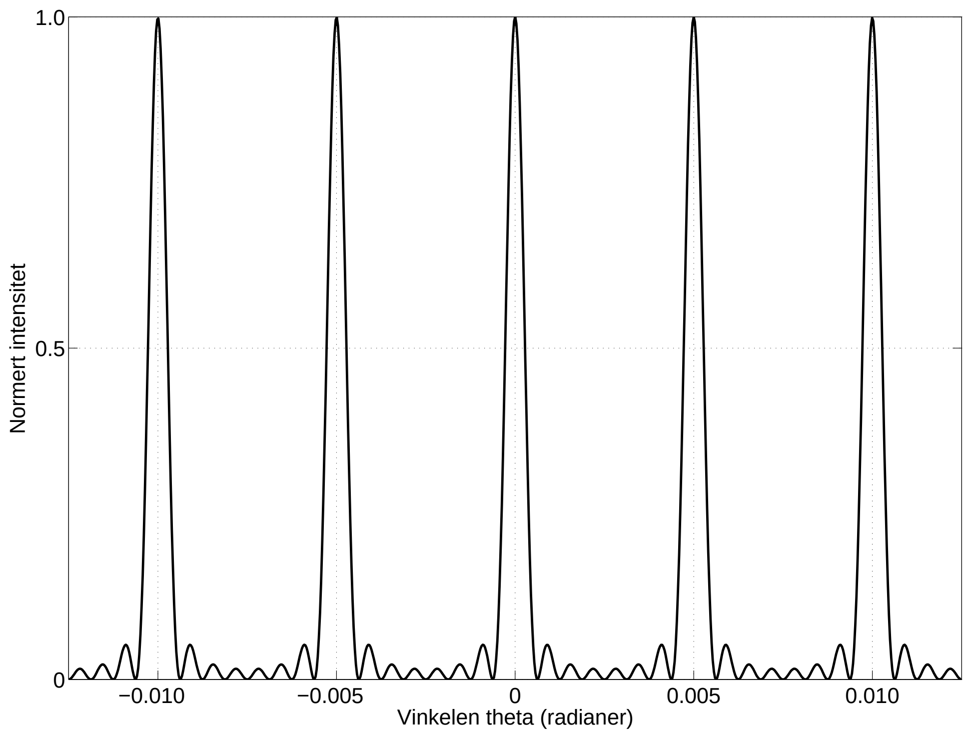
der $\Delta E/E = [E(t) - E(t+T)]/E(t)$ er relativt energitap pr periode T.

OPPGAVE 2 [teller 8 %]

I en ideell gass bestående av enkeltatomer ("en-atomige molekyler") er lydhastigheten ved en viss temperatur v_0. Gassen utvider seg under adiabatiske forhold (dvs uten varmeutveksling med omgivelsene) slik at trykket halveres.

• Hva blir nå lydhastigheten i gassen?

OPPGAVE 3 [teller 8 %]



Figuren over viser (normert) intensitetsfordeling $I(\theta)$ for laserlys som har passert gjennom N meget smale parallelle spalter med spalteavstand d. Laserens bølgelengde er $\lambda = 500$ nm.

• Bruk figuren til å bestemme N og d.

I figuren over er spaltebredden $a = d/100$.

• Vis, ved å skissere $I(\theta)$ i området $-0.05 < \theta < 0.05$ (radianer), hvordan intensitetsfordelingen blir dersom spaltebredden økes til $a = d/5$. (Bruk også her en normert intensitet, med $I(0) = 1$.)

OPPGAVE 4 [teller 16%]

I denne oppgaven ser vi på overflatebølger på dypt vann. Disse oppfyller dispersjonsrelasjonen

$$\omega(k) = \sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}.$$

Her er k bølgetallet, $g = 9.8$ m/s^2 tyngdens akselerasjon, $\rho = 10^3$ kg/m^3 vannets massetetthet og $\gamma = 0.073$ N/m vannets overflatespenning.

a

• Bestem den "karakteristiske bølgelengden" λ_0 når tyngdeleddet og overflatespenningsleddet bidrar i like stor grad i dispersjonsrelasjonen.

En kort bølgepakke, med essensielt bare en bølgetopp, dannes i det en båt kjører forbi ca 50 m fra land. Vannet er ellers blikk stille slik at du tydelig kan følge bølgene på vei inn mot land. Anta at bølgepakken er en superposisjon av harmoniske bølger, med bølgelengder i området 0.2 til 2.0 m.

• Hvor lang tid bruker de raskeste harmoniske bølgene (evt "fourierkomponentene") fra de genereres ved båten til de slår mot land?

• Enn de langsomste?
(Sjøen er brådyp, så dispersjonsrelasjonen gitt ovenfor gjelder overalt. Og vi antar at bølgene beveger seg rett inn mot land.)

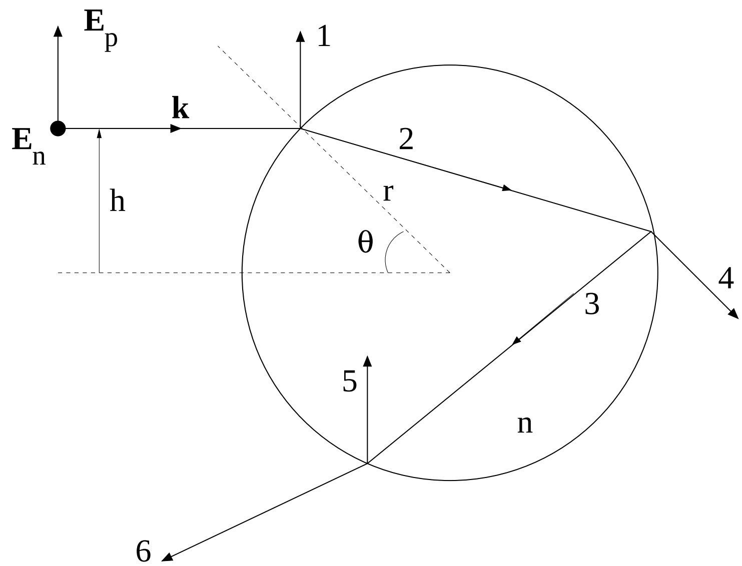
b

Bølgepakker med gruppehastighet $v_g = 1.0$ m/s har enten en meget kort bølgelengde λ_1 eller en forholdsvis lang bølgelengde λ_2.

• Regn ut λ_1 og λ_2.

OPPGAVE 5 [teller 16 %]

Figuren nedenfor viser mulige "baner" (1 - 6) for en lysstråle som treffer ei dielektrisk skive (eventuelt ekvatorialplanet til ei dielektrisk kule) med radius r og brytningsindeks n i høyde h over senterlinjen. Det innkommende lyset kan betraktes som en superposisjon av bølger med elektriske feltvektorer $\mathbf{E}_p$ og $\mathbf{E}_n$ henholdsvis parallelt med og normalt på innfallsplanet. Det omgivende mediet er luft, med brytningsindeks lik 1.



Anta heretter at lysstrålen treffer skiva i en bestemt høyde h_B fra senterlinjen, slik at sammenhengen $\alpha = \beta$ er oppfylt i uttrykkene for refleksjonskoeffisientene R_p og R_n oppgitt nedenfor. Anta at $\alpha\beta \neq 1$.

a • Finn h_B uttrykt ved skivas radius r og dens brytningsindeks n.

b • Angi for hver av de seks "banene" 1 - 6 i figuren om strålen er polarisert parallelt med (p) eller normalt på (n) innfallsplanet, eller om strålen er en superposisjon av disse to ($p + n$). [Merk at denne deloppgaven i stor grad kan besvares selv om du ikke har fått til oppgave **a**.]

Oppgitt:
Refleksjonskoeffisienter for skrått innfall mot grenseflate mellom to medier (R_p for polarisasjon parallelt med innfallsplanet, R_n for polarisasjon normalt på innfallsplanet):

$$R_p = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 \quad , \quad R_n = \left(\frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta}\right)^2$$

med

$$\alpha \equiv \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \quad , \quad \beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}.$$

Her er θ_1 og θ_2 henholdsvis innfalls- og brytningsvinkel (evt omvendt), v_1 og v_2 er lyshastigheter i medium 1 og 2, og $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ (= vakuumpermeabiliteten) for umagnetiske medier, noe som kan antas her.

OPPGAVE 6 [teller 16 %]

a

• Skriv ned uttrykkene for kinetisk energi T for en partikkel med masse m og hastighet v, både ifølge Newton (T_{Newton}) og Einstein (T_{Einstein}) (dvs ifølge henholdsvis ikke-relativistisk og relativistisk mekanikk).

• Vis at Einstein er enig med Newton, dvs $T_{\text{Einstein}} \simeq T_{\text{Newton}}$, dersom partikkelens hastighet v er mye mindre enn lyshastigheten c.

• Bestem korreksjonen til det ikke-relativistiske uttrykket i form av en polynomutvikling (Taylorutvikling) i hastighetsforholdet $\beta \equiv v/c$, dvs bestem a_1 og a_2 i

$$T_{\text{Einstein}} = T_{\text{Newton}} \left(1 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \ldots\right).$$

b

To elektroner, hver med masse m, beveger seg rett mot hverandre og kolliderer. Målt i lab-systemet har de to elektronene like stor kinetisk energi T.

• Hvor stor er *relativ* kinetisk energi $\tilde{T}$? (Dvs: Kinetisk energi målt i et inertialsystem der et av elektronene er i ro.)

• Vurder om resultatet er som forventet i den ikke-relativistiske grensen $T \ll mc^2$.

Anta at du skal gjennomføre et eksperiment som krever at de kolliderende elektronene har relativ kinetisk energi $\tilde{T} = 1000$ GeV ($= 10^{12}$ eV).

• Hvor mye er det da å spare på å akselerere begge elektronene (i motsatt retning!) framfor å akselerere kun det ene elektronet?

Oppgitt: Elektronets masse er $m \simeq 0.5$ MeV$/c^2$.

Formelsamling

Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:
$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$
$$\xi(\boldsymbol{r},t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$$
- Bølgeligning:
$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2 \xi(\boldsymbol{r},t) \left(\equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$$
- Fasehastighet:
$$v = \frac{\omega}{k}$$
- Gruppehastighet:
$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$
- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:
$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$
- Generelt for lineær respons i elastiske medier:
$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$
- For transversale bølger på streng:
$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$
- For longitudinale bølger i fluider:
$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$
- For longitudinale bølger i faste stoffer:
$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over bølgelengde λ:

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda A(x,t)\,dx$$

  Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over periode T:

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^T A(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T A(x,t)\,dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_BT$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk (Q = varme):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum (Q = varme):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmeutveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass (m = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

med $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

- Dopplereffekt for lydbølger:

$$\nu_\text{O} = \frac{1 - v_\text{O}/v}{1 - v_\text{S}/v}\, \nu_\text{S}$$

- For sjokkbølger gjelder:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_\text{S}}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet μ_1 for $x < 0$ og μ_2 for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
  $$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
  $$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis E_1, ρ_1 (for $x < 0$) og E_2, ρ_2 (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
  $$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
  $$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- Bølgeligning for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:
$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$
- Magnetisk dipolmoment:
$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$
- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:
$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$
- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:
$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$
- Malus' lov:
$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$
- Lineære medier:
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 (1+\chi_e)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{M} &= \chi_m \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \mu_0 (1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \\
\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} &= q_{\text{fri}} \\
\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} &= 0 \\
\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} &= I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho_{\text{fri}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
u &= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \\
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$):

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\
v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}
\end{aligned}
$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ i grenseflaten):

$$
\begin{aligned}
\Delta D_\perp &= 0 \\
\Delta E_\parallel &= 0 \\
\Delta B_\perp &= 0 \\
\Delta H_\parallel &= 0
\end{aligned}
$$

- Refleksjon og brytning:

$$\theta_r = \theta_i$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

- Diffraksjonsgitter med N smale spalter:

$$I(\theta) = I_0 \, \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0) \, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}$$

- Diffraksjon fra N spalter, spaltebredde a, spalteavstand d:

$$I(\theta) = \hat{I} \, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\overline{S}$ har hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \gamma\,(x - vt) \\ \overline{y} &= y \\ \overline{z} &= z \\ \overline{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(\overline{x} + v\overline{t}) \\ y &= \overline{y} \\ z &= \overline{z} \\ t &= \gamma\left(\overline{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right) \end{aligned}$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma \Delta \overline{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta \overline{x} = \gamma \Delta x$$

- Hastighet i S ($\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

  Hastighet i $\overline{S}$ ($\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_x\hat{x} + \overline{u}_y\hat{y} + \overline{u}_z\hat{z}$):

$$\overline{u}_x = d\overline{x}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_y = d\overline{y}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_z = d\overline{z}/d\overline{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\overline{\nu} = \nu\left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

- Energi (partikkel med masse m):

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ E_0 &= mc^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: E, $\boldsymbol{p}$, E_k og m bevart.
- Uelastisk prosess: E og $\boldsymbol{p}$ bevart.
- Lorentz invariant for system med flere partikler:

$$E^2 - p^2c^2 = \overline{E}^2 - \overline{p}^2c^2 = E_0^2$$

Her er E og $\boldsymbol{p}$ ($\overline{E}$ og $\overline{\boldsymbol{p}}$) hhv total energi og total impuls i S ($\overline{S}$), mens E_0 er total energi i S_0, inertialsystemet der total impuls er null.

Alternativt kan dette formuleres som invarians av skalarproduktet av firer-impulsen med seg selv:

$$p_\mu p^\mu = \overline{p}_\mu \overline{p}^\mu$$

der

$$p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z) \quad , \quad p_\mu = (E/c, -p_x, -p_y, -p_z)$$

GOD JUL!