LØSNINGSFORSLAG for Eksamen i FYSIKK 3 2/12 1998.

Oppgave 1

a) Fasehastigheten $\underline{\underline{v_f}} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \nu\lambda = 9{,}0\,s^{-1}\cdot 1{,}0\,m = \underline{\underline{9{,}0\ m/s}}$

Det at en harmonisk vandrebølge $D(x,t)$ med vilkårlig frekvens ν (eller vinkelfrekvens $\omega = 2\pi\nu$) oppfyller bølgeligningen (1) betyr at likningens venstre og høyre side blir like ved innsetting av $D(x,t)$, slik denne er gitt i likning (2). Ved innsetting:

$$VS: \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} D_0 \cos(kx-\omega t+\varphi)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-kD_0 \sin(kx-\omega t+\varphi)\right) = -kD_0\left(k \cos(kx-\omega t+\varphi)\right)$$

$$= -k^2 D_0 \cos(kx-\omega t+\varphi) = -k^2 D(x,t)$$

$$HS: K\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} D_0 \cos(kx-\omega t+\varphi)\right)$$

$$= K\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega D_0 \sin(kx-\omega t+\varphi)\right) = \omega D_0 K(-\omega)\cos(kx-\omega t+\varphi)$$

$$= -\omega^2 K D_0 \cos(kx-\omega t+\varphi) = -\omega^2 K\ D(x,t)$$

for at VS = HS, må vi ha at $-k^2 = -\omega^2 K$

eller

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{K}}\cdot k = \text{konstant}\cdot k$$

Q.E.D.

hvor konstanten $\frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{\mu/F_T}}$

b) Bølgepulsen vil ikke endre form da vi for bølger på streng ikke har dispersjon (som vist i pkt a), dvs.

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \text{konstant}\ \left(=\sqrt{F_T/\mu}\right)$$

uavhengig frekvensen. Alle frekvenskomponentene har derfor samme fasehastighet, hvilket betyr at det innbyrdes faseforhold mellom de forskjellige komponentene (som bestemmer pulsens form) ikke endres.

Når vi ikke har dispersjon, vil vi ha for gruppehastigheten:

$$v_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = v_f = \text{konstant} = \sqrt{F_T/\mu}$$

Gruppehastigheten er i dette tilfelle lik fasehastigheten og entydig gitt av strengens egenskaper (μ og F_T). Gruppehastigheten for pulsen må derfor ha samme tallverdi som fasehastigheten beregnet i punkt a.

$$\underline{\underline{v_g = v_f = 9{,}0\ m/s}}$$

c) Fra likn. (4) finner vi:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{A+Bk^2}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\frac{k}{A+Bk^2}\right)$$

$$= \frac{1}{A+Bk^2} + k\cdot\frac{(-1)\cdot 2Bk}{(A+Bk^2)^2} = \frac{A-Bk^2}{(A+Bk^2)^2}$$

Vi har vha. Lign. (3) i oppgaven:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0/n} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot\left(1.509 + \frac{4.68\cdot10^{-15}\,m^2}{\lambda_0^2}\right)$$

For grønt lys:

$$k^g = \frac{2\pi}{500\cdot10^{-9}\,m}\left(1.509 + \frac{4.68\cdot10^{-15}\,m^2}{(500\cdot10^{-9}\,m)^2}\right) = \underline{1{,}92\cdot10^7\,m^{-1}}$$

Denne verdien innsatt i ovenstående uttrykk for v_f og v_g gir:

$$\underline{\underline{v_f^g}} = \frac{1}{5{,}032\cdot10^{-9}\,m^{-1}s + 1.65\cdot10^{-25}\,ms\,(1.92\cdot10^7\,m^{-1})^2} = \underline{\underline{1{,}964\cdot10^8\,m/s}}$$

$$\underline{\underline{v_g^g}} = \frac{5{,}032\cdot10^{-9}\,m^{-1}s - 1.65\cdot10^{-25}\,ms\,(1.92\cdot10^7\,m^{-1})^2}{\left[5{,}032\cdot10^{-9}\,m^{-1}s + 1.65\cdot10^{-25}\,ms\,(1.92\cdot10^7\,m^{-1})^2\right]^2} = \underline{\underline{1{,}917\cdot10^8\,m/s}}$$

d) På samme måte som bølgetallet k og gruppehastighet v_g for grønt lys ble beregnet i pkt c) finner vi for fiolett og rødt lys:

$$k^f = 2{,}42\cdot10^7\,m^{-1} \quad og \quad k^r = 1.36\cdot10^7\,m^{-1}$$

$$v_g^f = 1.876\cdot10^8\,m/s \quad og \quad v_g^r = 1{,}952\cdot10^8\,m/s$$

Forskjell i ankomsttid for rødt og fiolett lys blir:

$$\underline{\underline{\Delta t}} = \frac{100\,m}{1.876\cdot10^8\,m/s} - \frac{100\,m}{1.951\cdot10^8\,m/s} =$$

$$= 533\,ns - 513\,ns = \underline{\underline{20\,ns}}$$

Oppgave 2

a) Av figuren i oppgaveteksten ser vi at gangLengdeforskjellen mellom stråler fra S_1 og S_2 til P er $d\sin\theta$. Vi får da konstruktiv interferens, dvs sentrum i de lysstripene eller lysmaksima for:

$$d\sin\theta = n\lambda \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

dvs. for bøyningsvinkler θ gitt ved

$$\underline{\underline{\sin\theta = n\frac{\lambda}{d}}} \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \quad (1)$$

Med $\lambda = 500\,nm$ og $d = 50\,\mu m$ gir (1):

$$\sin\theta = n\cdot0{,}01 \qquad n = 0, \pm1, \pm2\ldots$$

Siden $\sin\theta$ maksimalt kan være 1 får vi altså lysmaksima for θ gitt ved:

$$\underline{\underline{\sin\theta = n\cdot0{,}01}} \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \pm100 \quad (2)$$

b) Totalt felt E_θ i pkt. P er gitt ved:

$$E_\theta = E_1 + E_2$$

$$= E_0\{\cos(kr-\omega t-\varphi) + \cos[k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi]\} \quad (3)$$

Oppgitt:

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \quad (4)$$

(4) i (3) med $a = kr-\omega t-\varphi$ og $b = k(r+\Delta r)-\omega t-\varphi$ gir:

$$E_\theta = 2E_0\cos\left(k\left(r+\frac{\Delta r}{2}\right)-\omega t-\varphi\right)\cos\left(-\frac{k\Delta r}{2}\right) \quad (5)$$

Ved figurbetraktning:

$$\Delta r = d\sin\theta \quad (6)$$

Definerer:

$$\delta \equiv kd\sin\theta = k\Delta r \quad (7)$$

(6) og (7) innsatt i (5) gir:

$$E_\theta = \underbrace{2E_0\cos\frac{\delta}{2}}_{=E_{\theta_0}}\cos(k(r+\Delta r/2)-\omega t-\varphi) \quad (8)$$

$$= E_{\theta_0}\cos(\omega t + \varphi_1) \quad (9)$$

der vi har definert

$$\varphi_1 = k(r+\Delta r/2) - \varphi \quad (10)$$

For et gitt pkt. P. er φ_1 konstant og iflg det oppgitt får vi da:

$$I_\theta = \varepsilon_0 c_0 \overline{E_\theta^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c_0 E_{\theta_0}^2$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 c_0\left(2E_0\cos\frac{\delta}{2}\right)^2 = 2\varepsilon_0 c_0 E_0^2\cos^2\frac{\delta}{2} \quad (11)$$

For $\theta = 0$

$$I_0 = 2\varepsilon_0 c_0 E_0^2 \quad (12)$$

og dermed:

$$\underline{\underline{I_\theta = I_0\cos^2\frac{\delta}{2}}} \qquad \text{q.e.d.} \quad (13)$$

Vi får maksimum lysintensitet når

$$\frac{\delta}{2} = m\pi \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \quad (14)$$

dvs når:

$$\frac{kd\sin\theta}{2} = m\pi$$

eller (med $k = \frac{2\pi}{\lambda}$) for:

$$\sin\theta = m\frac{\lambda}{d} \qquad m = 0, \pm 1 \pm 2 \;\ldots \qquad (15)$$

som er det samme som vi fikk i pkt. a.

c) Interferensmönsteret nær $\theta = 0$ vil ikke bli påvirket av at $l_c = 5\mu m$ i stedet for at $l_c = \infty$, fordi ganglengdeforskjellen $d\sin\theta$ fra S_1 og S_2 til observasjonsskjermen B da er vesentlig mindre enn l_c. Siden l_c ikke påvirker middelbølgelengden vil ikke posisjonen til intensitetsmaksima bli endret verken for små eller store θ. Men når $d\sin\theta$ blir av samme størrelsesorden som l_c dvs når:

$$d\sin\theta \simeq \pm l_c$$

eller:

$$\sin\theta \approx \pm\frac{l_c}{d} = \pm\frac{5\mu m}{50\mu m} = \pm 0{,}1 \qquad (16)$$

begynner det å bli mindre kontrast mellom lyse og mörke striper. Når $\sin\theta$ nærmer seg ± 1 vil veglengdeforskjellen nærme seg $50\mu m$ dvs. $10\,l_c$, og lys fra S_1 og S_2 er da tilnærmet inkoherent med hverandre og stripemönsteret utvisket.

d) Det lyset som går gjennom glassplaten og S_2 vil bli forsinket sammenlignet med det lyset som går gjennom S_1. Kalles tykkelsen av glassplatene b f(in faseforskjellen Φ gitt ved:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda/n}\cdot b - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot b = (n-1)\frac{2\pi}{\lambda}\cdot b$$

Tilsvarende veglengdeforskjell i vakuum blir:

$$f = (n-1)\,b$$

Tilfelle I

$$f = (1{,}50 - 1{,}00)\cdot 500\,nm = 250\,nm = \tfrac{1}{2}\lambda_m$$

Betingelsen for lysmaksima blir da:

$$d \sin\theta = (n - \tfrac{1}{2})\lambda_m \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \quad (18)$$

Dvs. vi får maksima der vi hadde minima uten glass og omvendt

(Sentrum av interferensmønsteret er her gitt ved:

$$\sin\theta_I = -\frac{1}{2}\frac{\lambda_m}{d} = -0{,}005 \quad (19)$$

og utvisking begynner likt på begge sider av $\sin\theta_I$ som den gjorde på begge sider $\sin\theta = 0$ uten glass. (Dette forventes ikke for å få full utteling for tilfelle I siden det er så liten forskyvning).

Tilfelle II

$$f = (1{,}50 - 1{,}00)\ 1000\,nm = 500\,nm = \lambda_m$$

Betingelsen for lysmaksima blir da:

$$d \sin\theta = (n - 1)\lambda_m \quad n = 0, \pm 1 \pm 2 \ldots \quad (20)$$

Dvs vi får lysmaksima og lysminima der vi hadde det uten glass.

(Sentrum av interferensmønsteret er her gitt ved:

$$\sin\theta_{II} = -\frac{\lambda_m}{d} = -0{,}01 \quad (21)$$

og utvisking begynner likt på begge sider av $\sin\theta_{II}$ som den gjorde på begge sider av $\sin\theta = 0$ uten glass. (Dette forventes ikke for å få full utteling for tilfelle II siden det er så liten forskyvning.)

Tilfelle III

$$f = (1{,}50 - 1{,}00) \cdot 30\,\mu m = 15\,\mu m = 30\,\lambda_m$$

Sentrum i ~~det~~ synlige interferensmønsteret vil nå være gitt ved:

$$\sin\theta_{III} = -30\frac{\lambda_m}{d} = -0{,}30 \qquad (22)$$

og de vinklene der interferensmønsteret begynner å bli utydelig finnes der gangforskjellen er $L_c = 10\lambda_m$ forskjellig fra det gitt ved ligning (22), dvs: når:

$$\sin\theta = \frac{-30\lambda_m \pm 10\lambda_m}{d}$$

dvs når:

$$\sin\theta = \begin{cases} -0{,}2 \\ -0{,}4 \end{cases} \qquad (25)$$

(I den grad lysmaksima kan sees på samme sted som uten glass vil de ha samme posisjon som disse, men vi har altså ikke tydelige lysmaksima på samme sted som når vi ikke har glass foran S_2)

Tilfelle 4 $\qquad b = 1000\,\mu m$

$$f = (1{,}50 - 1{,}00)\cdot 1000\,\mu m = 500\,\mu m = 100\,L_c$$

Den minste optiske veglengdeforskjell vi da kan få på skjermen er

$$f - d = 500\,\mu m - 50\,\mu m = 450\,\mu m$$
$$= 90\,L_c$$

Dvs at intet lys fra S_1 som er blandet koherent med lys fra S_2 kan møtes på noe punkt på observasjonsskjermen B. Vi får derfor bare en jevn lysfordeling på denne og intet interferens-mønster.

e) Vi har gå her at

$$\Delta r = d \sin\theta \qquad (26)$$

og setter

$$\delta \equiv k\,\Delta r = k\, d \sin\theta \qquad (27)$$

Vi får da:

$$\Psi_\theta = \Psi_1 + \Psi_2$$

$$= \Psi_0 \left[e^{i[kr - \omega t - \varphi]} + e^{i[k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi]} \right] \qquad (28)$$

og dermed

$$|\Psi_\theta|^2 = \Psi_\theta \cdot \Psi_\theta^*$$

$$= |\Psi_0|^2 \left[e^{i[kr-\omega t-\varphi]} + e^{i[k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi]} \right]$$

$$\cdot \left[e^{-i[kr - \omega t - \varphi]} + e^{-i[k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi]} \right]$$

$$= |\Psi_0|^2 \left[1 + e^{-ik\Delta r} + e^{ik\Delta r} + 1 \right]$$

$$= |\Psi_0|^2 \cdot 2 \left[1 + \cos\delta \right]$$

$$\overset{(27)}{=} \underline{\underline{4 |\Psi_0|^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}}} \qquad (29)$$

I følge Max Borns sannsynlighets-interpretasjon er $|\Psi_\theta|^2$ sannsynlighets-tettheten for ett (dvs. hvert) elektrons treffpunkter.

Oppgave 3

Vi kaller lengden muonet tilbakelegger i jordas referansesystem ΔL, hastigheten (i jordas referansesystem) u_{min} og tida det eksisterer målt fra jorda Δt og egen-tida det eksisterer Δt_0. Vi har da:

$$S = u_{min} \cdot \Delta t = u_{min} \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (u_{min}/c)^2}} \qquad (1)$$

som gir

$$\left(1 - \frac{u_{min}^2}{c^2}\right) \cdot S^2 = (u_{min} \cdot \Delta t_0)^2$$

og:

$$u_{min} = \left(\frac{S^2}{\frac{S^2}{c^2} + (\Delta t_0)^2}\right)^{1/2} = c \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\Delta t_0 c}{S}\right)^2\right)^{1/2}}$$

$$\approx c\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t_0 c}{S}\right)^2\right)$$

$$= c\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2{,}20 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}997925 \cdot 10^8}{1{,}00 \cdot 10^4}\right)^2\right)$$

$$\approx \underline{\underline{0{,}997825\,c \approx 2{,}9914 \cdot 10^8 \text{ m/s}}} \qquad (2)$$

Vi kaller lengden fra jordas overflate til dannelsespunktet for muonet i jordas referansesystem for L_0. Tilsvarende lengde i muonets referansesystem kalles L. Vi har da:

$$L = L_0 \left(1 - (u_{min}/c)^2\right)^{1/2}$$

$$= 1{,}00 \cdot 10^4 \text{ m} \left(1 - (0{,}997825)^2\right)^{1/2}$$

$$\approx \underline{\underline{6{,}59 \cdot 10^2 \text{ m}}} \qquad (3)$$