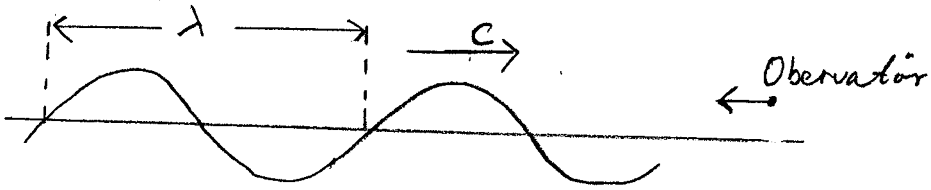
Løsningsforslag Eksamen 17/12 - 1999

SIF 4014 FYSIKK 3

Oppgave 1

a)



Tiden mellom hver gang observatören møter f.eks. en bölgetopp må være en bölgelengde dividert med relativ hastighet mellom bölge og observatör, dvs:

$$T = \frac{\lambda}{c - (-v_m)} = \frac{\lambda}{c + v_m}$$

Frekvensen f_m er lik T^{-1}, dvs

$$f_m = \frac{1}{T} = \underline{\underline{\frac{c + v_m}{\lambda}}} \qquad (1)$$

q.e.d.

b) Lydbølgen fra togets fløyte forplanter seg i luft og refereres til et koordinatsystem som beveger seg sammen med luften. I dette koordinatsystemet står toget stillet og perrongen beveger seg mot toget med hastighet 10,0 m/s.

Derfor:

$$f_m = \frac{c + v_m}{\lambda} = \frac{c + v_m}{c} f$$

$$= (1 + v_m/c) f = \left(1 + \frac{10,0}{329}\right) \cdot 4,00 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$

$$= \underline{\underline{412 \text{ Hz}}}$$

(2)

c) $p = p_1 + p_2$

$$= p_0 \left[\cos(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) + \cos(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)\right]$$

$$= 2 p_0 \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2} x - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2 + k_1}{2} x + \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

(ved oppgitt formel)

$$= 2p_0 \underbrace{\cos\left(\Delta k \cdot x - \Delta\omega t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}_{\substack{\text{Amplitudevariasjon} \\ \text{som varierer sakte} \\ \text{siden } \Delta\omega \ll \omega_1, \omega_2}} \cdot \underbrace{\cos\left(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}_{\text{Bærebølge}} \qquad (3)$$

q.e.d.

der vi har satt

$$\underline{\underline{k \equiv \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}} \qquad (4)$$

$$\underline{\underline{\Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2}, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}} \qquad (5)$$

Siden svevefrekvensen er den frekvensen intensiteten I varierer med og
$I \propto \cos^2\left(\Delta k \cdot x - \Delta\omega t - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$ må

vi ha:

$$\nu_s = \frac{2\Delta\omega}{2\pi} = 2\,\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\,\frac{1}{2\pi} = \underline{\underline{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}}} \qquad (6)$$

Dopplerforskyvning for dette tilfellet er gitt ved ligw (17)

i formelliste med $f_s = f$ og $v_m = 0$ og

v_s lik henholdsvis v_1 og v_2, dvs

$$f_{m_i} = \frac{1}{1 - v_i/c} f \qquad i = 1,2 \tag{7}$$

som gir:

$$\omega_i = \frac{2\pi}{1 - v_i/c} f \tag{8}$$

og:

$$k_i = \frac{\omega_i}{c} = \frac{2\pi}{c - v_i} f \tag{9}$$

Dermed:

$$\Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c - v_2} - \frac{1}{c - v_1}\right) 2\pi f$$

$$= \underline{\underline{\frac{v_2 - v_1}{(c - v_2)\cdot(c - v_1)} \pi f}} \tag{10}$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c - v_2} - \frac{c}{c - v_1}\right) 2\pi f$$

$$= \underline{\underline{\frac{c \cdot (v_2 - v_1)}{(c - v_2)(c - v_1)} \pi f_j}} = c \Delta k \qquad (11)$$

$$v_s = \frac{\Delta \omega}{\pi} = \underline{\underline{\frac{c (v_2 - v_1)}{(c - v_2)(c - v_1)} f}} = \frac{c \Delta k}{\pi} \qquad (12)$$

Tallverdier:

$$\Delta k = \frac{30{,}0 - 20{,}0}{(329 - 30)(329 - 20)} \pi \cdot 4{,}00 \cdot 10^2 \ \mathrm{rad/m}$$

$$= \underline{\underline{0{,}136 \ \mathrm{rad/m}}}$$

$$\Delta \omega = 329 \cdot 0{,}136 \ \mathrm{rad/s} = \underline{\underline{44{,}7 \ \mathrm{rad/s}}}$$

$$v_s = \frac{\Delta \omega}{\pi} \ \mathrm{Hz} = \underline{\underline{14{,}2 \ \mathrm{Hz}}}$$

d) Ligning (17) i fra formelliste:

$$f_m = \frac{1 - v_m/c}{1 - v_s/c} f_s$$

der v_m og v_s har samme retning som lydforplantningen.

For tog 2 har vi $V_s = V_1 + V_{vind} = 40\,m/s$
" tog 1 - " - $V_s = V_2 + V_{vind} = 30\,m/s$

For begge tog har vi for observatøren $V_m = V_{vind} = 10\,m/s$

(fordi det er luften som er referansesystemet for lydbølgene)

Dette gir for frekvensen f_1 observert fra tog nr 1:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{c - V_{vind}}{c - (V_1 + V_{vind})} 2\pi f \quad (13)$$

og for frekvensen observert fra tog nr 2:

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = \frac{c - V_{vind}}{c - (V_2 + V_{vind})} 2\pi f \quad (14)$$

Dermed ved (12), (13) og (14):

$$v_s = \frac{\Delta\omega}{\pi} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

$$= \left[\frac{c - v_{vind}}{c - (v_2 + v_{vind})} - \frac{c - v_{vind}}{c - (v_1 + v_{vind})}\right] f$$

$$= f \cdot \frac{\cancel{c^2} - cv_1 \cancel{- cv_{vind}} \cancel{- v_{vind}c} + v_{vind}v_1 \cancel{+ v_{vind}^2} \cancel{- c^2} + cv_2 \cancel{+ cv_{vind}} \cancel{+ cv_{vind}} - v_{vind}v_2 \cancel{- v_{vind}^2}}{(c - v_2 - v_{vind})(c - v_1 - v_{vind})}$$

$$= \frac{c(v_2 - v_1) - v_{vind}(v_2 - v_1)}{(c - v_2 - v_{vind})(c - v_1 - v_{vind})} f$$

$$= \frac{(c - v_{vind})(v_2 - v_1)}{(c - v_2 - v_{vind})(c - v_1 - v_{vind})} f \qquad (15)$$

Tallverdi:

$$v_s = \frac{319 \cdot 10{,}0}{(329 - 40)(329 - 30)} \; 4{,}00 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$

$$= \underline{\underline{14{,}8 \text{ Hz}}}$$

Oppgave 2

a) Oppgitt vektorrelasjon $\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$ anvendt på det elektriske felt $\vec{E}$, gir vha Maxwells ligninger på differensialform (Lign (23)-(26) i formelsamling):

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) \overset{(25)}{=} -\nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B}) \overset{(26)_{\vec{J}=0}}{=} -\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$= -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \underbrace{\nabla(\nabla\cdot\vec{E})}_{\substack{=0 \\ (\text{fra } (23)_{\rho=0})}} - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$$

Altså:

$$\nabla^2\vec{E} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{med } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \qquad \text{QED.}$$

b) Bølgeligningen (1) er en lineær partiell differensialligning med konstante koeffisienter. Den gjelder for hver av delbølgene E_1 og E_2, og må da også gjelde for summen

Regning gir at VS = HS fordi $\frac{\omega_1}{c} = k_1$ og $\frac{\omega_2}{c} = k_2$:

$$\text{VS:}\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}E(x,t) = -k_1^2E_1\cos(k_1x-\omega_1t) - k_2^2E_2\cos(k_2x-\omega_2t)$$

$$\text{HS:}\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(x,t) = \frac{1}{c^2}\left[-\omega_1^2E_1\cos(k_1x-\omega_1t) - \omega_2^2E_2\cos(k_2x-\omega_2t)\right]$$

$$= -k_1^2E_1\cos(k_1x-\omega_1t) - k_2^2E_2\cos(k_2x-\omega_2t)$$

fordi i vakuum $\frac{\omega_1}{c} = k_1$ og $\frac{\omega_2}{c} = k_2$

c) Når lysstrålen går fra vakuum inn i et annet medium vil bølgelengde og lyshastighet endres, men på en slik måte at frekvensen er uendret,
Altså $\omega_1 = \omega_3$ og $\omega_2 = \omega_4$

Fasehastighet $v_f = \omega/k$ i mediet:

Grønt lys: $v_f^G = \frac{\omega_3}{k_3} = \frac{3{,}661 \cdot 10^{15}\ \text{rad/s}}{1{,}864 \cdot 10^{7}\ \text{rad/m}} = 1{,}964 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}$

Blått lys: $v_f^B = \frac{\omega_4}{k_4} = \frac{4{,}143 \cdot 10^{15}\ \text{rad/s}}{2{,}117 \cdot 10^{7}\ \text{rad/m}} = 1{,}957 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}$

Brytningsindeks $n = \frac{c}{v_f}$ i mediet:

Grønt lys: $n = \frac{2{,}998 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{1{,}964 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}} = 1.527$

Blått lys: $n = \frac{2{,}998 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{1{,}957 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}} = 1.532$

For elektromagnetiske bølger i et stoff gjelder $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$
Med $\mu_r = 1$ får vi at $n = \sqrt{\epsilon_r} \Rightarrow \epsilon_r = n^2$

Grønt lys: $\epsilon_r = n^2 = (1.527)^2 = 2{,}332$

Blått lys: $\epsilon_r = (1{,}532)^2 = 2{,}347$

d) Vi har i pkt b) vist at en lysbølge av form (2) i vakuum oppfyller en bølgeligning av samme form som (4). Det følger ikke av dette at lysbølgen inne i et stoff oppfyller en bølgeligning av samme type. Inne i et stoff gjelder ikke to av antagelsene gjort ved utledningen av likn. (1), nemlig at $\rho = 0$ og $\vec{J} = 0$.

På samme måte som vist i pkt b) ville det være en nødvendig forutsetning at $k_3 = \omega_3 C$ og $k_4 = \omega_4 C$ forat bølgen (3) skulle oppfylle lign (4). Dette ville medføre at

$$\frac{k_3}{k_4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k_1}{k_2} \quad \text{eller} \quad \frac{k_3}{k_1} = \frac{k_4}{k_2}$$

som er i motsetning til forutsetningen for oppgaven. Altså oppfyller ikke bølgen (3) en bølgelikning av form (4) med én verdi av C.

Oppgave 3

a) Vi har fra vedlagt formelliste

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \qquad (1)$$

der

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad (2)$$

u er her flyets hastighet. Δt_0 er egentiden mellom to hendelser målt med en klokke i ro i et referansesystem der de to hendelsene skjer på samme rompunkt. Δt_0 her tilsvarer derfor $\Delta \tau$ i oppgaveteksten. Δt er tiden målt mellom de to samme hendelser i et referensesystem med konstant rettlinjet hastighet i forhold til det første og tilsvarer Δt i oppgaveteksten.

Fra (1) og (2) følger det $\Delta t > \Delta t_0$ så sant $u \neq 0$, og derfor:

$$\underline{\underline{\Delta t > \Delta \tau}}$$

b) $\Delta t = \gamma \Delta \tau = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta \tau$

$\approx \Delta \tau \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$ (3)

Dermed:

$\Delta l_{jord} - \Delta l_{fly}$

$= v \Delta t - v \Delta \tau$

$= v(\Delta t - \Delta \tau) = v \Delta \tau \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} \Delta \tau \frac{v^3}{c^2}$

$= \frac{1}{2} \; 1{,}000 \cdot 10^4 \cdot \dfrac{(4{,}000 \cdot 10^2)^3}{(2{,}998 \cdot 10^8)^2} \text{ m}$

$\approx 3{,}56 \cdot 10^{-6} \text{ m} = \underline{\underline{3{,}56 \; \mu\text{m}}}$ (4)

og Δl_{jord} er altså lengre enn Δl_{fly} (som er i samsvar med relativistisk lengdekontraksjon).

Oppgave 4

a)

$$\langle E \rangle_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} p_n E_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT} \cdot nh\nu}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-mh\nu/kT}}$$

$$= h\nu \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n}{\sum_{m=0}^{\infty} x^m} = h\nu \frac{x/(1-x)^2}{1/(1-x)}$$

$(x = e^{-h\nu/kT})$ (ved oppgitte formler)

$$= h\nu \frac{x}{1-x} = h\nu \frac{e^{-h\nu/kT}}{1-e^{-h\nu/kT}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}}}$$ q.e.d.

$$E_\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1} \approx \frac{h\nu}{1+\frac{h\nu}{kT}-1}$$

$$= \frac{h\nu}{h\nu/kT} \underline{\underline{= kT}}$$ q.e.d.