

Oppgave 1

a) Newtons 2. lov gir

$$ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

hvor F for tilstrekkelig små utsving er gitt ved Hookes lov, hvilket gir at

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (1a)$$

eller

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1b)$$

med

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

Q.E.D.

b) Forskyvningen av likevektsposisjonen fra $x=0$ til $x=x_0$ er gitt ved

$$kx_0 = F_g = mg$$

som gir:

$$\underline{k = mg/x_0} \quad (3)$$

c) Fra lign. (8) og (9) i vedlagt formelsamling har vi generell løsning for lign. (1):

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (4)$$

Konstantene A og φ kan da bestemmes ved hjelp av initialbetingelsene:

$$x(0) = x_0 \quad (5a)$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = 0 \quad (5b)$$

(4), (5a) og (5b) gir

$$x_0 = A \cos \varphi \quad (6a)$$

$$0 = -\omega A \sin \varphi \quad (6b)$$

Likningssettet (6a) & (6b) gir ved løsning for A og φ :

$$A = x_0 \text{ og } \varphi = 0$$

som innsatt i (4) gir posisjonen x s.f.a. t .
Bruker vi (2) og (3) kan x uttrykkes ved

$$\underline{\underline{x = x_0 \cos(\omega t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{x_0}} t\right)}} \quad (7)$$

Passering av likevektsposisjonen $x=0$ finner sted
for $\cos\left(\sqrt{\frac{g}{x_0}} t\right) = 0$ $\therefore \sqrt{\frac{g}{x_0}} t = n\frac{\pi}{2}$, $n=1, 3, 5, \dots$

Altså:

$$t = n \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x_0}{g}}, \quad n=1, 3, 5, \dots$$

Med oppgitte tallverdier:

$$\underline{\underline{t = n \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{0.010}{9.8}} \text{ s} \approx n \cdot 0.05 \text{ s}, \quad n=1, 3, 5, \dots}}$$

eller

$$\underline{\underline{t = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot 0.10 \text{ s}, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots}}$$

d) Vi setter opp Newtons 2. lov analogt med hva vi gjorde i pkt a)

$$\underline{ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = F = -kx + mg} \quad (8)$$

I stedet for variabelen x innfører vi nå den nye variabelen $x' = x - x_0$ som angir utsvinget omkring likevektsposisjonen x_0 (som ble funnet i pkt b). Innsatt i (8) får vi

$$m \frac{d^2x'}{dt^2} = -k(x' + x_0) + mg$$

som v.h.a (3) kan uttrykkes

$$m \frac{d^2x'}{dt^2} = -kx' + k \frac{mg}{k} + mg = -kx' \quad (9)$$

som er samme likning som (1a) og derfor har løsning

$$x' = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (10)$$

med $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_0}}$ som før (jfr. (2) og (3))

Setter vi inn $x' = x - x_0$ får vi

$$\underline{x = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{x_0}} t + \varphi\right) + x_0} \quad (11)$$

Vi ser at oscillatoren svinger akkurat likt om likevektsposisjonen i vertikal retning som den gjorde i horisontal retning, men likevektsposisjonen er altså forandret fra $x=0$ til $x=x_0$.

Oppgave 2

a) Skal vandrebølgen

$$D(x,t) = D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \quad (1)$$

med vilkårlig frekvens $\nu = \omega/2\pi$ oppfylle bølge ligningen:

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

der K er en konstant, må vi ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)] = K \frac{\partial^2}{\partial t^2} [D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [-D_0 k \sin(kx - \omega t + \varphi)] = K \frac{\partial}{\partial t} [D_0 \omega \sin(kx - \omega t + \varphi)]$$

$$-D_0 k^2 \cos(kx - \omega t + \varphi) = -K D_0 \omega^2 \cos(kx - \omega t + \varphi) \quad (3)$$

Dersom (3) skal være oppfylt for alle x og t må vi ha at:

$$\omega^2 = \frac{1}{K} \cdot k^2$$

Dette impliserer at:

$$\underline{\omega = \sqrt{\frac{1}{K}} \cdot k = \text{Konstant} \cdot k} \quad \text{Q.E.D.}$$

b) Fra definisjonen av fasehastighet følger:

$$\omega = v_f \cdot k \quad (4)$$

For bølger med fasehastighet:

$$v_f = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2} = \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} \quad (5)$$

får vi ved innsetting av (5) i (4):

$$\omega = \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} \cdot k \neq \text{konstant} \cdot k \quad (6)$$

Resultatet (6) sammenholdt med pkt a) i oppgaven forteller oss at bølger som har slike bølgelengde-avhengig fasehastighet som i (5) ikke kan oppfylle bølgeligningen (1) i oppgavetelisten for vilkårlig frekvens ν .

c) Fra (6) har vi:

$$\omega = (gk)^{1/2} \quad (7)$$

som gir:

$$\underline{\underline{V_g}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} \stackrel{(5)}{=} \underline{\underline{\frac{1}{2} v_f}} \quad (8)$$

Q.E.D.

d) For bølger med $\lambda = 0.60 \text{ m}$:

$$v_f = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2} = \left(\frac{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.60 \text{ m}}{2\pi} \right)^{1/2} = \underline{\underline{0.97 \text{ m/s}}}$$

$$v_g = \frac{1}{2} v_f = \frac{1}{2} \left(\frac{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.60 \text{ m}}{2\pi} \right)^{1/2} = \underline{\underline{0.48 \text{ m/s}}}$$

e) En bølge som oppstår i bakkant av bølgepaliken forplanter seg framover i bølgetøget med fasehastighet:

$$v_f = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2} \approx \left(\frac{g\lambda_0}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (9)$$

mens selve bølgetøget går med gruppehastighet (jf. pkt c)

$$v_g = \frac{1}{2} v_f \stackrel{(9)}{\approx} \frac{1}{2} \left(\frac{g\lambda_0}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (10)$$

I et referanse system som følger bølgepaliken, vil bølgen som oppstår i bakkant av paliken bevege seg med hastighet:

$$v_f' = v_f - v_g \stackrel{(10)}{=} \frac{1}{2} v_f \approx \frac{1}{2} \left(\frac{g\lambda_0}{2\pi} \right)^{1/2} \quad (11)$$

Bølgen passerer derfor gjennom bølgepaliken i løpet av tiden:

$$\Delta t \stackrel{(11)}{=} \frac{6\lambda_0}{\frac{1}{2} \left(\frac{g\lambda_0}{2\pi} \right)^{1/2}} = 12 \left(\frac{2\pi\lambda_0}{g} \right)^{1/2} \quad (12)$$

$$= 12 \left(\frac{2\pi \cdot 0.60 \text{ m}}{9.8 \text{ m/s}^2} \right)^{1/2} \approx \underline{\underline{7.4 \text{ s}}}$$

Bølgetøget har i løpet av tiden Δt beveget seg

$$\begin{aligned}\Delta s &= v_g \cdot \Delta t \stackrel{(10 \& 12)}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{g \lambda_0}{2\pi} \right)^{1/2} \cdot 12 \left(\frac{2\pi \lambda_0}{g} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \lambda_0 = 6 \lambda_0 = 6 \cdot 0.60 \text{ m} = \underline{\underline{3.6 \text{ m}}}\end{aligned}$$

f) Ettersom bølgetøget forplanter seg bortover i bølgerenna, vil det bre seg utover fordi de ulike k -komponentene forplanter seg med ulike gruppehastighet. For k -komponentene $k_{\min} = 2.0 \text{ m}^{-1}$ og $k_{\max} = 19 \text{ m}^{-1}$ får vi:

$$v_{g, \max} \stackrel{(10)}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k_{\min}} \right)^{1/2} \quad (13)$$

$$v_{g, \min} \stackrel{(10)}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k_{\max}} \right)^{1/2} \quad (14)$$

Bølgemåleren ved B er avstand $L = 30 \text{ m}$ fra der bølgepakken ble generert vil derfor registrere k -komponentene k_{\min} og k_{\max} med tidsforskjell

$$\Delta t = \frac{L}{v_{g, \min}} - \frac{L}{v_{g, \max}} \quad (15)$$

$$\stackrel{(13) \& (14)}{=} \frac{2L}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{k_{\max}} - \sqrt{k_{\min}} \right) \quad (16)$$

$$= \frac{2 \cdot 30 \text{ m}}{\sqrt{9.8 \text{ m/s}^2}} \left(\sqrt{19 \text{ m}^{-1}} - \sqrt{2.0 \text{ m}^{-1}} \right) = \underline{\underline{56 \text{ s}}}$$

- g) k_{maks} -komponenten blir registrert av bølgemåleren B, i avstand $l = 30 \text{ m}$ fra der bølgetøget ble generert, etter en tid:

$$t_1 \stackrel{(14)}{=} \frac{l}{v_{g,\text{min}}} = 2l \left(\frac{k_{\text{maks}}}{g} \right)^{1/2} \quad (17)$$

I løpet av tiden t_1 har k_{min} -komponenten tilbakelagt strekningen:

$$s = t_1 \cdot v_{g,\text{maks}}$$

$$\stackrel{(13) \times (17)}{=} 2l \left(\frac{k_{\text{maks}}}{g} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k_{\text{min}}} \right)^{1/2}$$

$$= l \left(\frac{k_{\text{maks}}}{k_{\text{min}}} \right)^{1/2} = 30 \text{ m} \left(\frac{19 \text{ m}^{-1}}{2,0 \text{ m}^{-1}} \right)^{1/2} = \underline{\underline{92 \text{ m}}}$$

Den andre bølgemåleren må altså plasseres i en avstand:

$$92 \text{ m} - 30 \text{ m} = \underline{\underline{62 \text{ m}}}$$

fra B for at den skal registrere framkant av bølgetøget samtidig med at bølgemåleren i B registrerer bakkannten av bølgetøget (stikk vi har definert bølgetøgets framkant og bakkant i denne oppgaven.)

Oppgave 3

- a) I følge lign. (71) i formelsamlingen er intensiteten for en harmonisk elektromagnetisk bølge i vakuum

$$I = \epsilon_0 c \overline{E^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \quad (1)$$

hvor E_0 er det elektriske feltamplituden. Fra lign. (4) i oppgaveteksten finner vi at feltamplituden i et punkt P på skjermen gitt ved vinkelen θ er:

$$E_{\theta_0} = 2E_0 \cos\left(\frac{kd \sin\theta}{2}\right) \quad (2)$$

(2) innsett i (1) gir intensiteten i punktet P som funksjon av vinkelen θ :

$$\begin{aligned} I_{\theta} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 c \cdot (2E_0)^2 \cos^2\left(\frac{kd \sin\theta}{2}\right) \\ &= \underline{\underline{2 \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2\left(\frac{kd \sin\theta}{2}\right)}} \quad (3) \end{aligned}$$

- b) Vi får maksimum lysintensitet når

$$\frac{kd \sin\theta}{2} = m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{eller } \underline{\underline{\sin\theta = \frac{m\lambda}{d}}}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

$$\text{hvor } |m| \leq d/\lambda$$

For at et lysmaksimum skal falle på skjermen, må:

$$\tan\theta \leq \frac{D/2}{L}$$

eller

$$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{1 - \sin^2\theta} \stackrel{(4)}{=} \frac{\left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2\right)} \leq \left(\frac{D}{2L}\right)^2 \quad (5)$$

Løses (5) m.h.p. heltalls indelisen m , finner vi følgende krav:

$$|m| \leq \frac{\left(\frac{d}{\lambda}\right) \left(\frac{D}{2L}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{D}{2L}\right)^2}} \quad (6)$$

Innsetting av tallverdier gir:

$$|m| \leq \frac{\left(\frac{50,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{5,00 \cdot 10^{-7} \text{ m}}\right) \cdot \left(\frac{0,500 \text{ m}}{2 \cdot 2,00 \text{ m}}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{0,500 \text{ m}}{2 \cdot 2,00 \text{ m}}\right)^2}}$$

$$|m| \leq \frac{12,5}{\sqrt{1 + (0,125)^2}} = 12,4 \quad (7)$$

Altså er $|m| = 12$ det største heltallet som oppfyller ulikheten i (6) (Denne verdien tilfredsstiller også kravet $|m| \leq d/\lambda = 100$ i lign. (4))

Lysmaksima på skjermen svarer derfor til

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 12, \quad (8)$$

tilsammen 25 maksima

c) Totalfeltet av E_1 og E_2 i (1) og (2) i oppgavelisten blir, når vi gjør bruk av relasjon (3) og kompleks representasjon:

$$\begin{aligned}
 E_1 + E_2 = E_{\theta} &= \operatorname{Re} \left\{ E_0 e^{i(kr - \omega t - \varphi)} + E_0 e^{i[k(r + \Delta r) - \omega t - \varphi]} \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ E_0 \left(e^{-ik \frac{\Delta r}{2}} + e^{ik \frac{\Delta r}{2}} \right) e^{i[k(r + \frac{\Delta r}{2}) - \omega t - \varphi]} \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ E_0 \cdot 2 \cos\left(k \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot e^{i[k(r + \frac{\Delta r}{2}) - \omega t - \varphi]} \right\} \\
 &= 2E_0 \cos\left(k \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \operatorname{Re} \left\{ e^{i[k(r + \frac{\Delta r}{2}) - \omega t - \varphi]} \right\} \\
 &= 2E_0 \cos\left(k \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \cos \left[k\left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) - \omega t - \varphi \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

Ved figurbetragtning følger at

$$\Delta r = d \cdot \sin \theta \quad (10)$$

(10) innsatt i (9) gir

$$\underline{E_{\theta} = 2E_0 \cos\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right) \cos \left[k\left(r + \frac{d \sin \theta}{2}\right) - \omega t - \varphi \right]}$$

Q.E.D.

- d) For at vi skal kunne se klart like mange maksima som i punkt b, kreves for alle maksima på skjermen at ganglengde forskyjellen Δr for lys fra de to spaltene er mindre enn kohærens-lengden til lyset, l_c . Ganglengde forskyjellen er størst for maksima med $m = \pm 12$ (se punkt b). Vi må da kreve at

$$l_c \geq |\Delta r|_{m=\pm 12} \stackrel{(10)}{=} |d \sin \theta|_{m=\pm 12} \stackrel{(4)}{=} \left| d \frac{m\lambda}{d} \right|_{m=\pm 12}$$

$$= 12\lambda = 12 \cdot 5,00 \cdot 10^2 \text{ nm} = 6,00 \mu\text{m} \approx 6 \mu\text{m}$$

- e) Vi finner ved bruk av kompleks representasjon totalfeltet E_0 på observasjonsskjermen:

$$\begin{aligned} E_0 &= E_1 + E_2 + E_3 = \\ &= \text{Re} \left\{ E_0 e^{i[k(r-\Delta r) - \omega t - \varphi]} + E_0 e^{i[kr - \omega t - \varphi]} + E_0 e^{i[k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi]} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ E_0 \left(e^{-ik\Delta r} + 1 + e^{ik\Delta r} \right) e^{i[kr - \omega t - \varphi]} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ E_0 \left(1 + 2\cos k\Delta r \right) e^{i[kr - \omega t - \varphi]} \right\} \\ &= E_0 \left(1 + 2\cos k\Delta r \right) \cos(kr - \omega t - \varphi) \end{aligned}$$

som ved innsetning av $\Delta r = d \sin \theta$ kan skrives:

$$E_{\theta} = E_0 \cos(kr - \omega t - \varphi) \quad (11)$$

med

$$E_{\theta_0} = E_0 [1 + 2 \cos(kd \sin \theta)] \quad (12)$$

Intensitetsfordelingen på skjermen blir da
(vha. lign (71) i formelsamling):

$$\underline{\underline{I_{\theta} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\theta_0}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 [1 + 2 \cos(kd \sin \theta)]^2}}$$