Eksamen i TFY 4160/FY 1002 høst 2005
Løsningsforslag

Oppgave 1

a) 2 retninger – d.v.s. i planet ortogonalt på bevegelsesretningen. (– og alle kombinasjoner av disse to retningene.)

b) $v_f = \sqrt{\frac{1}{K}} = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$

$v_f = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu = 0{,}8\ m/s$

c) $\omega(k) = \sqrt{\frac{1}{K}}\, k$, $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{1}{K}} = v_f$

v_g er uavhengig av $k \Rightarrow$ ingen dispersjon.

d) Antar nå $\mu(\nu) = \frac{\mu_0}{1+(\nu_0/\nu)^2} = \frac{\mu_0}{1+\left(\frac{2\pi\nu_0}{\omega}\right)^2}$

Dispersjonsrelasjonen blir da:

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{1}{K}}\, k = \sqrt{\frac{F_T}{\mu(\nu)}}\, k = \sqrt{\frac{F_T}{\mu_0}}\, k \sqrt{1+\left(\frac{2\pi\nu_0}{\omega(k)}\right)^2}$$

Dette gir når man løser for $\omega = \omega(k)$:

$$\left(\omega^2(k) - \frac{1}{2}k^2\frac{F_T}{\mu_0}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(k^2\frac{F_T}{\mu_0}\right)^2 + k^2\frac{F_T}{\mu_0}(2\pi\nu_0)^2$$

Kun den positive roten er fysisk:

$$\omega^2(k) = \frac{F_T}{\mu_0}k^2\left[\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{16\pi^2\mu_0\nu_0^2}{F_T k^2}}\right]$$

Ikke fysisk.

d) Jo fortere strengen svinger, jo mindre vil den kondensere på den! Vi forventer derfor

$$\underline{v_g \to v_f = \sqrt{\frac{F_T}{\mu_0}} \text{ når } k \to \infty.}$$

(Det er også da det vi finner når vi bruker uttrykket for $\omega = \omega(k) \to \sqrt{\frac{F_T}{\mu_0}}\, k$ når $k \to \infty$.

Oppgave 2

a) Maxwells ligninger i vakuum:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 & (1) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (2) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (3) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (4) \end{cases} \qquad (\rho = 0,\ \vec{j} = \vec{0}).$$

Ligning (3): $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

Ligning (4): $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{0}) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$$

Ligning (1):

$$\Rightarrow \quad \boxed{\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \nabla^2\vec{E}} \qquad \epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Samme fremgangsmåte for å vise $\underline{\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = \nabla^2\vec{B}}$.

b) Bevegelsesretningen til en planbølge er ortogonalt til planene hvor fasene er konstant.

Fasene er for $\vec{E}$, $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_E$.
Fasene er for $\vec{B}$, $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_B$.

Endrer vi $\vec{r}$ til $\vec{r}+\Delta\vec{r}$ hvor $\Delta\vec{r} \perp \vec{k}$, vil $\vec{k}\cdot(\vec{r}+\Delta\vec{r}) = \vec{k}\cdot\vec{r}$. Altså forblir fasene konstant både for $\vec{E}$ og $\vec{B}$. $\Rightarrow$ Forplantningsretningen til bølgene er $\vec{k}/|\vec{k}|$.

c) Maxwells 1. ligning er i vakuum $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$. Setter inn $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_E)$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\vec{k}\cdot\vec{E}_0 \sin\underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi_E)}\, = 0$$

Må være sant for alle verdier av fasen

$\Rightarrow$ $\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0$ $\Rightarrow$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}_0$
på samme måte.

$\boxed{\vec{k} \perp \vec{E}_0}$ $\Rightarrow$

<u>Longitudinelle lysbølger finnes ikke.</u>

d) Vi viser først at fasene til $\vec{E}$ og $\vec{B}$ er like.

Vi velger et punkt $\vec{r}$ i rommet.

$\vec{B}$-Bølgen er ekstremal (maksimal eller minimal) når

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

Gjennom Maxwells ligning (3), har vi da at $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ på dette tidspunktet og på dette stedet også er ekstremal. Altså er $\phi_E = \phi_B$ – $\vec{E}$ og $\vec{B}$ har samme fase:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi)$$
$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi)$$

Setter dette uttrykket inn i Maxwells (3) og (4) ligninger:

Må være ortogonale

$$\left.\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E}_0 &= \omega \vec{B}_0 \\ \vec{k} \times \vec{B}_0 &= \mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E}_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_0 \perp \vec{B}_0}$$

e) Bruker nå at $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ og at $\omega/k = c$ hvor $k = |\vec{k}|$.

$$|\vec{k} \times \vec{E}_0| = k E_0 = \omega |\vec{B}_0| = \omega B_0 \Rightarrow \boxed{E_0 = c B_0}$$
$$|\vec{k} \times \vec{B}_0| = k B_0 = \frac{\omega}{c^2} |\vec{E}_0| = \frac{\omega}{c^2} E_0 \Rightarrow \boxed{B_0 = \frac{1}{c} E_0}$$

$$\text{Siden} \quad \left.\begin{aligned} E &= E_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi) \\ B &= B_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{E = cB}$$

Oppgave 3

a) $ct = 2{,}99795 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s} \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} = \underline{299{,}795\ \mathrm{m}}$

b) Vi har to events. Δx måler avstanden mellom dem og Δt tidsdifferansen mellom dem i laboratorie systemet. $\Delta x'$ og $\Delta t'$ gjør det samme i rakettsystemet. Lorentz-transformasjonene binder dem sammen.

c) Lengden av staven måles ved <u>samme tid i laboratorie systemet.</u>

$$l = \Delta x\ ,\ \Delta t = 0$$

$$\Delta t = 0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(v\Delta x' + \Delta t'\right) \Rightarrow \Delta t' = -v\Delta x'$$

$$\Delta x = l = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\Delta x' + v\Delta t'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\Delta x' - v^2\Delta x'\right)$$

$$= \sqrt{1-v^2}\,\underset{\overset{\shortparallel}{l'}}{\Delta x'} = \sqrt{1-v^2}\,l'$$

$$v = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \underline{l = \frac{\sqrt{3}}{2}\,l'}$$

d) Bruker Lorentz-transformasjonene igjen:

$$\Delta x = l_e = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left[\Delta x' + v\Delta t'\right]$$

$$\Delta t = 0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left[v\Delta x' + \Delta t'\right] \Rightarrow \Delta t' = -v\Delta x'$$

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left[\Delta x' + v\Delta t'\right] = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left[1 - v^2\right]\Delta x' = \sqrt{1-v^2}\,\Delta x'$$

$$\Rightarrow \Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{l_e}{\sqrt{1-v^2}}$$

Svaret er altså $\underline{\underline{\Delta t' = -v\Delta x'}} = \underline{\underline{-\frac{v\,l_e}{\sqrt{1-v^2}}}} = \underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt{3}}\,l_e}}$

(Jeg kom i skade for å sette $\Delta x' = l'$ i oppgaven. (Det skulle vært $\Delta x'$. Jeg har imidlertid godkjent de som har regnet med l' istedet for l_e.)

e) Forreste luke lukkes før bakre luke.

f) Bakenden av staven er fortsatt utenfor boksen når forreste lokk lukkes. Bakerste lokk lukkes først når denne enden av staven er inne i boksen. Da kan forenden allerede kollidert med innsiden av boksen hvis man ikke har åpnet igjen forreste lokk.