NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET, INSTITUTT FOR FYSIKK

Utarbeidet av: Jon Andreas Støvneng (jon.stovneng@ntnu.no)

LØSNINGSFORSLAG (8 SIDER) TIL EKSAMEN I FY1002 og TFY4160 BØLGEFYSIKK
Fredag 5. desember 2008 kl. 0900 - 1300

OPPGAVE 1 [telte 20 %, dvs 10 flervalgsoppgaver som telte 2% hver]

---

a) Vinkelfrekvensen for en fri, dempet svingning er

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

der $\omega_0^2 = k/m$ og $\delta = b/2m$. Grafen i figur **A** passer med dette. Her er det ikke nødvendig å huske nøyaktig hvordan ω varierer med dempingskonstanten b, bare en kjenner til at økende grad av demping gir en overgang fra oscillerende oppførsel (underkritisk demping) til et rent eksponentielt avtagende utsving (overkritisk demping).

---

b) Halvverdibredden er $\Delta\omega = b/m$ for svak demping. Grafen i figur **C** er lineær i b og passer derfor med dette.
Utregning av $\Delta\omega$ gjøres enklest ved å finne de ω som gjør at

$$\frac{A(\omega_0)^2}{A(\omega)^2} = 2,$$

dvs

$$\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 m^2 + \omega^2 b^2}{\omega_0^2 b^2} = 2.$$

Ettersom b/m er, pr antagelse, mye mindre enn ω_0, kan vi sette

$$\omega^2 b^2 \simeq \omega_0^2 b^2$$

i telleren på venstre side. Litt ordning gir da

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm\omega_0 b/m$$

dvs

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 \pm \omega_0 b/m} \simeq \omega_0 \pm b/2m$$

Følgelig er

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = b/m$$

---

c) Fasehastigheten til transversale bølger på en streng er

$$v_f = \sqrt{S/\mu},$$

dvs bestemt av strekk-kraften S og massen μ pr lengdeenhet, og dermed den samme for alle frekvenser. Vi har altså ikke dispersjon, og da er v_f og gruppehastigheten v_g like store. Grafen i figur **D** passer med dette.

---

d) Det er grensebetingelsene for (midlere) partikkelutsving ξ, eventuelt for avviket fra likevektstrykket på utsiden, Δp, som avgjør hvilke bølgelengder vi kan ha for stående bølger i røret. I lukket ende må vi ha $\xi = 0$, i åpen ende har vi $\Delta p = 0$. Det betyr maksimal Δp i lukket ende og maksimal ξ i åpen ende. Nullpunkt (node) for ξ i lukket ende og buk (antinode) for ξ i åpen ende gir $L = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \ldots$, dvs $\lambda_n = 4L/(2n-1)$ som er alternativ **D**.

---

e) Grenseflatebetingelsene er gitt i formelvedlegget. $\Delta E_{\parallel} = 0$ betyr her at E_x og E_y er kontinuerlige i grenseflaten. $\Delta B_{\perp} = 0$ gir kontinuerlig B_z. $\Delta H_{\parallel} = 0$ gir kontinuerlige H_x og H_y, men ettersom begge medier er oppgitt å være umagnetiske, blir også $B_x = \mu_0 H_x$ og $B_y = \mu_0 H_y$ kontinuerlige. Da gjenstår bare E_z, og den komponenten er ikke kontinuerlig: Vi har $\Delta D_{\perp} = 0$, dvs D_z er kontinuerlig. Men da blir $E_z^1 = D_z/\varepsilon_1$ forskjellig fra $E_z^2 = D_z/\varepsilon_2$ når de to mediene har ulik permittivitet. Alternativ **A** er derfor riktig.

---

f) Bare opplysningen i alternativ **A** har noe med blå himmel å gjøre. De øvrige er gale og/eller har ingenting med saken å gjøre.

---

g) Det innkommende lyset har $\boldsymbol{E}$ langs x og induserer dermed oscillerende elektriske dipoler med $\boldsymbol{p}$ (dipolmomentet) langs x. Da får vi ikke spredt noe lys i x-retning, og mest i retninger normalt på x, dvs i yz-planet. Intensiteten øker med 4. potens av frekvensen, dvs den avtar med 4. potens av bølgelengden. Da har vi avklart at alternativene A, C og D alle er korrekte, mens **B** er feil.

---

h) For innfallsvinkel i nærheten av den såkalte Brewsters vinkel vil refleksjonskoeffisienten for lys som er polarisert parallelt med innfallsplanet være nær null, mens refleksjonskoeffisienten for lys som er polarisert normalt på innfallsplanet ikke er så liten. Dermed blir alternativ **B** riktig.

---

i) Når koherent lys sendes gjennom et diffraksjonsgitter med mange svært smale spalter, får vi skarpe hovedmaksima – *linjer* – i retninger som oppfyller

$$d \sin\theta = n\lambda$$

Her er d spalteavstanden, θ er vinkelen for retningen, relativt rett fram, λ er lysets bølgelengde og n er et heltall, inklusive null. Her har vi

$$\lambda_{\mathrm{O}} = 675 = 1.5 \cdot 450 = 1.5 \cdot \lambda_{\mathrm{B}}$$

så retningsvinklene θ_{O} og θ_{B} for hhv orange og blått lys blir

$$\begin{aligned}
\theta_{\mathrm{O}} &= \arcsin\left(0, \pm 3\lambda_{\mathrm{B}}/2, \pm 6\lambda_{\mathrm{B}}/2, \pm 9\lambda_{\mathrm{B}}/2, \ldots\right) \\
\theta_{\mathrm{B}} &= \arcsin\left(0, \pm \lambda_{\mathrm{B}}, \pm 2\lambda_{\mathrm{B}}, \pm 3\lambda_{\mathrm{B}}, \ldots\right)
\end{aligned}$$

Dermed ser vi at hver tredje linje for blått lys vil falle sammen med hver andre linje for orange lys. Alternativ **C** er da korrekt.

---

j) Den enkleste måten å overbevise seg om at alternativ **B** må være riktig er som følger: Første nullpunkt for faktoren som skyldes endelig spaltebredde a,

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2},$$

har vi når argumentet $\beta = \pi a \sin(\theta)/\lambda = \pi$, dvs $\sin\theta = \lambda/a$. Hovedmaksima har vi når nevneren i faktoren

$$\frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

er lik null, dvs $\sin\theta = n\lambda/d$. Vi ser fra figuren at vi har ca 10 hovedmaksima mellom "rett fram" ($y = 0$) og første nullpunkt til $\sin(\beta)/\beta$. Det betyr at $10\lambda/d$ må være omtrent like stor som λ/a, med andre ord $d \simeq 10a$. Bare alternativ **B** passer med dette. Innsetting av tallverdier vil deretter vise at første nullpunkt da vil komme omtrent ved $y = 3$ cm, som i figuren.

OPPGAVE 2 [telte 30 %, dvs **a**, **b**, **c** og **d** telte 7.5 % hver]

a) Funksjonen som beskriver bølgepulsen er på formen $y(x-(b/a)t)$, med positive konstanter a og b. Bølgen propagerer dermed i positiv x-retning. Kombinasjonene ax og bt må begge være dimensjonsløse. Enhetene er derfor $[a] = \mathrm{m}^{-1}$ og $[b] = \mathrm{s}^{-1}$. Bølgens hastighet er $v = b/a$. For transversale bølger på streng er $v = \sqrt{S/\mu}$, så vi må ha $S = v^2\mu = b^2\mu/a^2$.
b) Vi har ikke dispersjon, så pulsen endrer ikke form ettersom tida går. Halvverdibredden Δx er derfor uavhengig av tida, og vi kan f.eks betrakte $y(x,0)$. Det kan vi gjøre i store deler av denne oppgaven, så la oss forenkle notasjonen litt ved å droppe argumentet t, dvs vi setter $y(x,0) = y(x) = y_0 \exp(-a^2x^2)$. Vi ser at $y_{\max} = y(0) = y_0$. Vi finner de to verdiene av x som gir $y(x)^2/y_0^2 = 1/2$:

$$\begin{aligned} \exp(-2a^2x^2) &= 1/2 \;\Rightarrow\; 2a^2x^2 = \ln 2 \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \\ \Rightarrow \Delta x &= \frac{2}{a}\sqrt{\frac{\ln 2}{2}} = \frac{1}{a}\sqrt{\ln 4} \end{aligned}$$

c) På et lite intervall mellom x og $x + dx$ har vi, ved $t = 0$, energien $\varepsilon(x)\,dx$ (der vi igjen dropper tidsargumentet og mener med det $t = 0$). Total energi blir da

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x)\,dx = \mu v^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

Her er $\partial y/\partial x = -2a^2xy_0 \exp(-a^2x^2)$ slik at (med $v^2 = b^2/a^2$)

$$E = 4a^2b^2\mu y_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-2a^2x^2)\,dx$$

For å få integralet på formen som er oppgitt i oppgaveteksten, substituerer vi $\beta = \sqrt{2}ax$. Da er $x^2\,dx = \beta^2\,d\beta/2\sqrt{2}a^3$, så vi får

$$E = \frac{4a^2b^2\mu y_0^2}{2\sqrt{2}a^3} \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2}\,d\beta = \frac{\sqrt{\pi/2}\,b^2\mu y_0^2}{a}$$

Enheten til dette uttrykket er $\mathrm{s}^{-2} \cdot (\mathrm{kg/m}) \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m} = \mathrm{J}$, som det bør være.
d) Total impuls i bølgen bestemmes ved å regne ut

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x)\,dx$$

der impuls π pr lengdeenhet er oppgitt å være

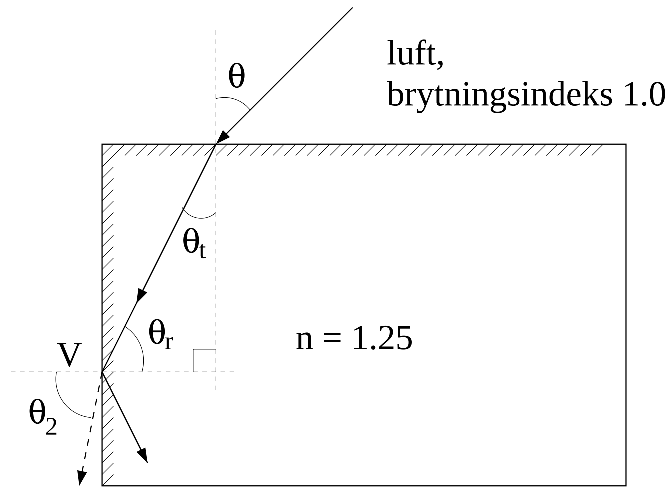
$$\pi(x,t) = \mu\left(1 - \frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial t}$$

Her er det to ledd, og det første (dvs 1-eren inne i parentesen) vil gi null bidrag siden vi ved å derivere $y(x,t)$ en gang mhp t, ender opp med en integrand som er på samme form som det oppgitte integralet som er lik null. Det andre leddet vil gi samme type integral som vi hadde i uttrykket for energien E. Forskjellen består i at en derivasjon mhp x er byttet ut med en derivasjon mhp t, samt et fortegn og en faktor v^{-2}. Alt i alt resulterer dette i at $p = E/v$, så vi kan skrive ned direkte

$$p = E/v = Ea/b = \sqrt{\pi/2}\,b\mu y_0^2$$

OPPGAVE 3 [telte 15%]

Her er det greit å starte med figuren i oppgaveteksten, der vi har innført vinkelen θ_t mellom innfallslodd og transmittert (refraktert) stråle i den øvre grenseflaten, vinkelen θ_r mellom innfallslodd og innkommende (og reflektert) stråle i den venstre grenseflaten, samt vinkelen θ_2 for en eventuelt transmittert stråle i venstre grenseflate:



Fra figuren ser vi at $\theta_t = \pi/2 - \theta_r$. Snells lov anvendt på øvre grenseflate gir

$$\sin\theta = n \sin\theta_t$$

Snells lov anvendt på venstre grenseflate gir

$$\sin\theta_2 = n \sin\theta_r$$

Dersom θ_r har en verdi som gir $\theta_2 > \pi/2$, er transmisjon ut gjennom venstre grenseflate ikke mulig, så da har vi total refleksjon. Vi ser derfor på grensetilfellet $\theta_2 = \pi/2$. Da er

$$\sin\theta_r = 1/n$$

som gir

$$\sin\theta = n\sin\theta_t = n\sin(\pi/2 - \theta_r) = n\cos\theta_r = n\sqrt{1-\sin^2\theta_r} = n\sqrt{1-n^{-2}} = \sqrt{n^2-1}$$

Med $n = 1.25$ finner vi $\theta \simeq 49$ grader. Det er klart at dette er den *største* verdien for innfallsvinkelen θ som gir total refleksjon i venstre grenseflate. Dersom θ er større enn dette, vil strålen komme inn mot V med for liten vinkel θ_r slik at θ_2 blir mindre enn 90 grader, og lys slipper ut.
En liten kommentar til slutt: Vi ser at dersom $\sqrt{n^2-1} > 1$, har vi alltid total refleksjon i V, uansett hvor "flatt" den innkommende strålen treffer øvre grenseflate. Grensetilfellet for alltid å ha total refleksjon i V inntreffer når $n = \sqrt{2}$. Da er maksimal verdi for θ (dvs: som gir total refleksjon i V) lik 90 grader, altså total refleksjon i V uansett verdi for θ.

OPPGAVE 4 [telte 15%]

Basert på de gitte opplysningene kan vi skrive ned

$$E(t) = A\cos\Omega t + \alpha\cos(\Omega+\omega)t + \alpha\cos(\Omega-\omega)t$$

i antennens posisjon $x = 0$. (Da blir jo $E(0) = A + 2\alpha$, som er maksimal verdi for E, dvs maksimal konstruktiv interferens, som opplyst i oppgaven.)
Vi bruker at

$$\cos(\Omega+\omega)t + \cos(\Omega-\omega)t = 2\cos\Omega t \cdot \cos\omega t$$

og finner

$$E(t) = A\cos\Omega t\left[1 + \frac{2\alpha}{A}\cos\omega t\right]$$

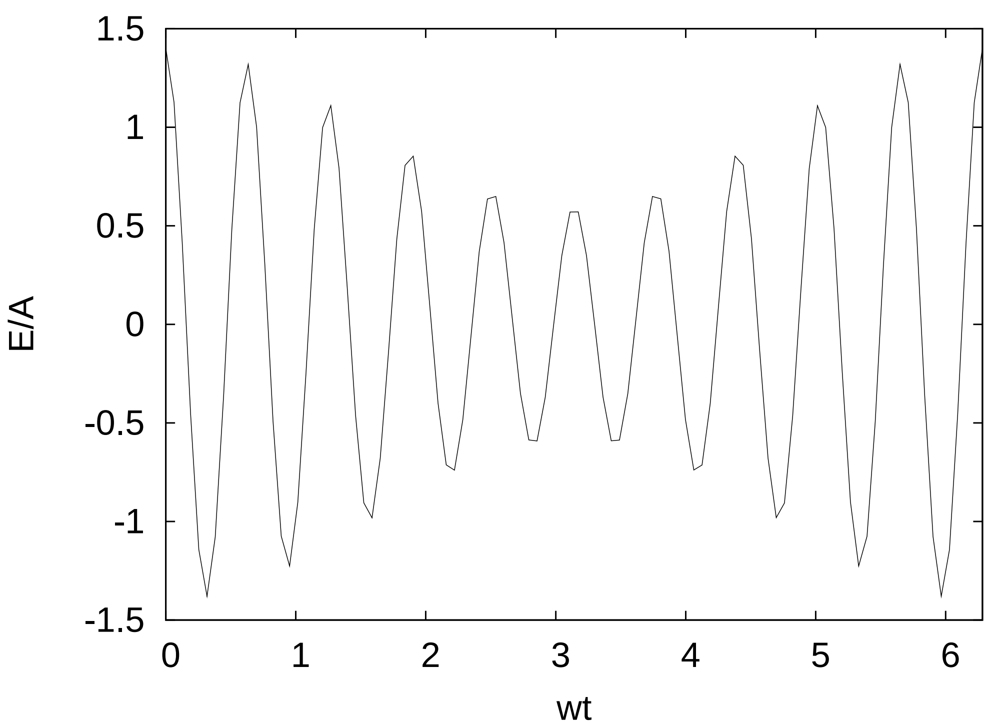
Med andre ord er modulasjonsbølgen

$$M(t) = \frac{2\alpha}{A}\cos\omega t$$

Med $\alpha/A = 0.2$ og $\omega/\Omega = 0.1$ har vi

$$E(t)/A = \cos 10\omega t\,[1 + 0.4\,\cos\omega t]$$

På intervallet fra $\omega t = 0$ til $\omega t = 2\pi$ gjennomgår den "raske" funksjonen $\cos 10\omega t$ ti hele perioder, mens den "langsomme" modulasjonsbølgen $0.4\,\cos\omega t$ bare gjennomgår en periode. Vi får derfor følgende skisse:



Kommentar: Denne oppgaven illustrerer prinsippet for amplitudemodulasjon, f.eks AM radio.

OPPGAVE 5 [telte 20 %, dvs **a** og **b** telte 10% hver]

a) Fra formelvedlegget har vi

$$f = f_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Dette er frekvensen f som måles av en observatør som beveger seg med hastighet v bort fra en kilde som "kringkaster" elektromagnetiske bølger med frekvensen f_0. Her er $\beta = v/c$.
I denne oppgaven skal vi bestemme frekvensene som måles på satellitt C når signalet blir sendt ut fra henholdsvis satellitt A og B. Det betyr at vi kan bruke uttrykket ovenfor direkte, under forutsetning av at vi har funnet hastigheten til satellitt C relativt A og B.
Hastigheten til C relativt B er gitt i oppgaven: $v_{\mathrm{CB}} = v$. Dermed har vi direkte

$$f_{\mathrm{CB}} = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Hastigheten til C relativt A finner vi ved å bruke addisjonsformelen fra vedlegget:

$$v_{\mathrm{CA}} = \frac{v_{\mathrm{CB}} + v_{\mathrm{BA}}}{1 + v_{\mathrm{CB}}v_{\mathrm{BA}}/c^2} = \frac{v+v}{1+v^2/c^2} = \frac{2v}{1+\beta^2}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{CA}} &= f_0\sqrt{\frac{1-v_{\mathrm{CA}}/c}{1+v_{\mathrm{CA}}/c}} \\
&= f_0\sqrt{\frac{1-2\beta/(1+\beta^2)}{1+2\beta/(1+\beta^2)}} = f_0\sqrt{\frac{1+\beta^2-2\beta}{1+\beta^2+2\beta}} \\
&= f_0 \cdot \frac{1-\beta}{1+\beta}
\end{aligned}$$

Dersom satellittenes relative hastigheter er små i forhold til c, altså $v \ll c$ og $\beta \ll 1$, får vi til ledende orden i β:

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{CB}} &\simeq f_0(1-\beta) \\
f_{\mathrm{CA}} &\simeq f_0(1-2\beta)
\end{aligned}$$

som gir differansen

$$f_{\mathrm{CB}} - f_{\mathrm{CA}} \simeq \beta f_0 = \frac{v}{c}\, f_0$$

b) Her må vi bruke prinsippene om bevaring av impuls og energi. I utgangspunktet har systemet ingen impuls, og total energi er rakettens hvileenergi

$$E = M_0 c^2$$

I det massen har blitt redusert til M_1, har det blitt sendt ut fotoner med en total impuls som vi kan kalle $-\boldsymbol{p}$. Pga kravet om impulsbevaring, er rakettens impuls nå $\boldsymbol{p}$, slik at total impuls fortsatt er lik null.
Fotonene har ingen masse, så deres energi er i alt

$$E_f = pc$$

Rakettens energi er nå

$$E_r = \sqrt{(pc)^2 + (M_1 c^2)^2}$$

Energibevarelse gir da ligningen

$$M_0 c^2 = E_f + E_r = pc + \sqrt{(pc)^2 + (M_1 c^2)^2}$$

Her er det kun en ukjent, nemlig impulsen p, så vi løser ligningen med hensyn på p, eventuelt med hensyn på pc. Det resulterer i

$$pc = \frac{(M_0 c^2)^2 - (M_1 c^2)^2}{2 M_0 c^2}$$

Vi skal finne rakettens hastighet. Da kan vi ta utgangspunkt i uttrykket for relativistisk impuls:

$$p = \gamma M_1 v$$

som gir

$$v^2 = \frac{p^2}{M_1^2 \gamma^2} = \frac{p^2}{M_1^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Denne løser vi med hensyn på v^2, eller kanskje like gjerne v^2/c^2, og får

$$\frac{v^2}{c^2} = \left(1 + \frac{(M_1 c^2)^2}{(pc)^2}\right)^{-1}$$

Her setter vi inn uttrykket vi fant for pc, og finner etter litt algebra at

$$\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{1 - (M_1/M_0)^2}{1 + (M_1/M_0)^2}\right)^2$$

Med andre ord:

$$v = c \cdot \frac{1 - (M_1/M_0)^2}{1 + (M_1/M_0)^2}$$

Dersom massen er blitt redusert til halvparten av det den opprinnelig var, dvs $M_1 = M_0/2$, får vi

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - 1/4}{1 + 1/4} = \frac{3}{5}$$

I grensen $M_1 \to 0$ ser vi at $v \to c$, som er rimelig: Masseløse objekter beveger seg med hastighet c.