Eksamen TFY4163 Bølgefysikk og fluidmekanikk V2020

Harmoniske bølger

1. Anta at vi har en bølge som er gitt av

$$y = A\sin(kx - \omega t + \pi) \tag{1}$$

hvor $k = 2.5\,\mathrm{cm}^{-1}$, $\omega = 3.0\,\mathrm{s}^{-1}$ og $A = 1.0\,\mathrm{cm}$.

Finn bølgens periode T, bølgehastighet v og maksimal partikkelhastighet $v_p^{\max}$.

Stående bølger

2. En stående planbølge $D(x,t)$ kan uttrykkes som

$$D(x,t) = f(x)g(t) \tag{6}$$

(a) Anta at vi har lineære, ikke-dispersive og tapsfrie bølger. Bruk bølgeligningen til å vise at hvert av leddene i følgende uttrykk er konstant

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{v^2}\frac{g''}{g} = \text{konstant} \tag{7}$$

(Notasjonen $()''$ er den deriverte av en en-dimensjonal funksjon med hensyn på argumentet.)

(b) Sett konstanten i uttrykket over til $-k^2$ og bruk dette til å vise at løsningen på bølgeligningen kan skrives som

$$D(x,t) = K\cos(kx + \phi_f)\cos(\omega t + \phi_g) \tag{11}$$

(c) Anta at vi har stående, plane lydbølger i et rør med lengde L med én åpen og én lukket ende. Hva blir grensebetingelsene for de stående bølgene i hver ende, både for partikkelforskyvningen ξ og det relative trykket $p = -B\partial_x\xi$? Gi både en fysisk begrunnelse og et matematisk uttrykk for grensebetingelsene.

(d) Bruk grensebetingelsen på løsningen i oppgave b for å bestemme de tillate bølgevektorene for stående bølger i dette systemet. Skisser amplituden til ξ og p i røret for moden med den lengste bølgelengden.

(e) Forklar hva som vil skje med frekvensen for moder med kortere bølgelengder. Gi et uttrykk for frekvensen som funksjon av bølgelengde.

Polarisasjon

3. Anta at vi har en transversal planbølge som forplanter seg i z-retning gitt av

$$\mathbf{y}(z,t) = f(z,t)\hat{\mathbf{x}} + g(z,t)\hat{\mathbf{y}} \tag{25}$$

Finn uttrykk for f og g slik at $\mathbf{y}$ representerer en harmonisk, sirkulærpolarisert bølge.

Vis at uttrykket du finner representerer en sirkulærpolarisert bølge.

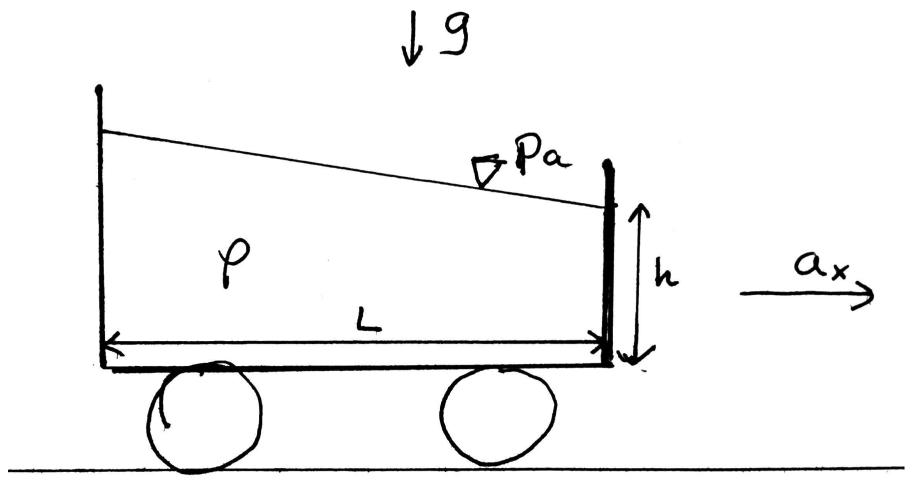

Figure 1: Vogn med vann

Hydrostatikk

4. Anta at vi har en vogn med lengde L og bredde b som akselereres med konstant akselerasjon $\mathbf{a} = (a_x, 0, 0)$ som vist i figur 1. Atmosfæretrykket er p_a, tettheten til væsken er ρ og tyngdens akselerasjon $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$. Anta at dybden på væsken h ved den fremre kanten er kjent.
   (a) Forklar i ord ved hjelp av grunnleggende fysiske prinsipper hvorfor væskens overflate inntar en skrå form som vist på figuren.
   (b) Basert på de grunnleggende prinsippene du brukte i forrige deloppgave, finn et kvantitativt uttrykk for vannoverflatens helning ved å uttrykke dybden på væsken som funksjon av posisjon i vognen.
5. Du sitter i en båt som flyter i et basseng. I båten har du en stor stein. Du kaster steinen ut i bassenget. Vil vannstanden i bassenget øke, minke eller forbli den samme. Begrunn svaret ditt (ubegrunnet svar gir 0 poeng).

Hydrostatisk krefter

6. Anta at vi har en luke formet som en halvsirkel mellom punktene A og B som vist i figur 2. Vinkelen $\alpha = 30°$. Hva blir netto kraft på luken fra vanntrykket? Centroiden til en halvsirkel ligger en avstand $\frac{4R}{3\pi}$ fra bunnlinjen på halvsirkelen.

Potensialstrømning

7. Anta at vi har friksjonsfri strømning forbi et halvsirkelformet objekt som vist i figur 3. Hastighetspotensialet (i sylindriske koordinater) for denne strømmen er gitt av

$$\phi = v_0(r + \frac{k}{r}) \cos\theta \tag{40}$$

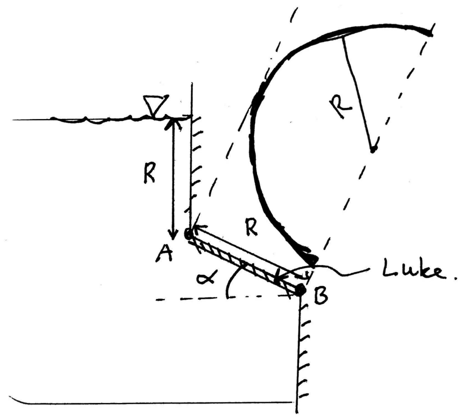

Figure 2: Luke

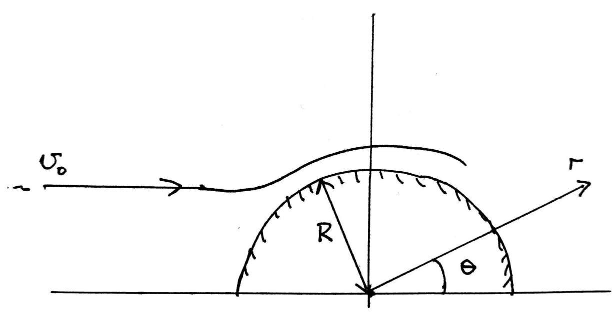

Figure 3: Potensialstrømning

(a) Den radielle hastigheten til strømningen må være null ved halvsirkelens overflate (kan ikke strømme gjennom overflaten). Bruk dette til å bestemme k.

(b) Finn et uttrykk for en strømlinje til strømningen utenfor halvsirkelen.

Navier-Stokes

8. Anta at vi har et strømningsfelt for en inkompressibel, Newtonsk væske som er gitt av

$$\mathbf{v} = kx\hat{\mathbf{x}} + ky\hat{\mathbf{y}} - 2kz\hat{\mathbf{z}} \tag{50}$$

Undersøk om dette strømningsfeltet oppfyller kontinuitetslikningen og bruk Navier-Stokes likning for å finne trykkfordelingen i væsken. La $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$