

Figur 1: Oppgave 1, Rankines halv-legeme

1 Langsvarsoppgaver

1. Anta at vi har potensialstrømning hvor strømningsfeltet er gitt av superposisjonen av uniform strømning og en punktkilde, se figur 1. Dette gir opphav til det såkalte Rankines halv-legeme som er en strømlinje (rød linje i figuren) med et stagnasjonspunkt (S) langs symmetrilinjen.

Strømningsfunksjonen for uniform strømning i positiv x -retning med hastighet u er

$$\psi = uy \quad (1)$$

mens strømningsfunksjonen for en kilde med styrke m i origo, uttrykt i polare koordinater, er

$$\psi = m\theta \quad (2)$$

I polare koordinater er relasjonen mellom hastighetskomponentene og strømningsfunksjonen gitt av

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (3)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4)$$

- (a) For strømningsfeltet angitt over, med kilden plassert i origo og uniform strømning i positiv x -retning, vis at likningen for strømlinjen hvor $\psi = m\pi$ er gitt av

$$r = \frac{m(\pi - \theta)}{u \sin \theta} \quad (5)$$

r og θ er her polare koordinater og θ vinkel relativ til positiv x -akse, med positiv vinkel mot klokken.

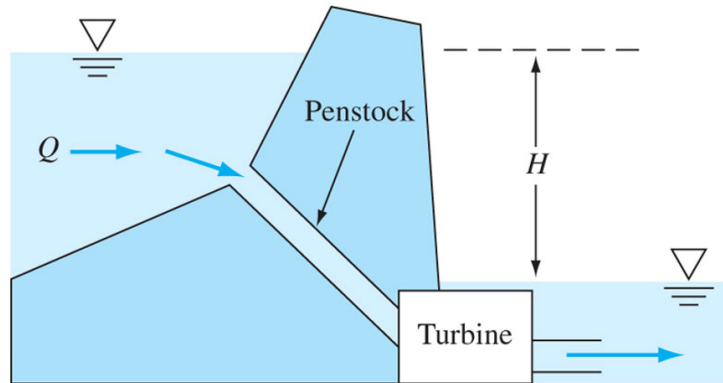
- (b) Dersom $u = 7,0 \text{ m s}^{-1}$ og avstanden d mellom stagnasjonspunktet (S) og origo/kilden er $d = 2,0 \text{ m}$, hva er da styrken m på kilden (hint, bruk at hastigheten er null i stagnasjonspunktet)? Sjekk eksplisitt at enheten til styrken på kilden du får i svaret gir mening.
2. Bølgehastigheten i luft er avhengig av temperaturen. Musikere som spiller på blåseinstrumenter i orkestere varmer ofte opp instrumentene sine ved å blåse varm pust gjennom dem. Hvis ikke vil tonehøyden endre seg mens de spiller når instrumentet varmes opp fra romtemperatur til temperaturen på utpusten. Anta at temperaturen i orkestersalen og en klarinett til å begynne med er 20°C . Hvor mye vil tonehøyden endre seg dersom vi antar at lufttemperaturen i klarinetten endrer seg til 30°C etter at du har spilt en stund? Bruk dataene fra tabellene i figur 2 og 3.

D ₄	293.66
D [#] ₄ /E ^b ₄	311.13
E ₄	329.63
F ₄	349.23
F [#] ₄ /G ^b ₄	369.99
G ₄	392.00
G [#] ₄ /A ^b ₄	415.30
A ₄	440.00
A [#] ₄ /B ^b ₄	466.16
B ₄	493.88
C ₅	523.25
C [#] ₅ /D ^b ₅	554.37
D ₅	587.33

Figur 2: Frekvens i Hertz (høyre kolonne) for ulike tonehøyder

Temperature, T (°C)	Speed of sound, c (m/s)
35	351.88
30	349.02
25	346.13
20	343.21
15	340.27
10	337.31

Figur 3: Lydhastighet som funksjon av temperatur



Figur 4: Oppgave 5.

(Vi ser bort fra andre kompliserende faktorer som luftfuktighet, ulik gassammensetning på inn og utpust og instrumentets termiske ekspansjon).

3. Anta at du synger i dusjen og at dusjveggene går fra gulv til tak slik at dusjen kan sees på som en lukket sylinder som er 2.5 m lang.

Gi et overslag på frekvensen til de to normale modene med lavest frekvens for stående lydbølger i dusjens lengderetning.

Korresponderer disse frekvensene til hørbar og sangbar lyd (slik at du kan få resonans når du synger)?

4. En lydbølge med frekvens 400 Hz og bølgelengde 8,0 m beveger seg i en væske. Hva er bulkmodulen til væsken. Anta at væskens tetthet er 1300 kg/m^3 .

Sjekk at enheten du får stemmer overens med definisjonen av bulkmodulen.

5. Anta at du har et tilførselsrør til en turbin i et vannkraftverk som vist i figur 4. Friksjonstapet i røret, uttrykt som et høydetap, er gitt av

$$h_f = C\Phi_V^2 \quad (24)$$

hvor C er en parameter som avhenger av rørets utforming og Φ_V er volumstrømmen. H er høydeforskjellen mellom øvre og nedre vannflate.

Vis at den maksimale effekten vi kan få ut av turbinen er

$$P_{max} = \frac{2}{3}\gamma H\Phi_V \quad (25)$$

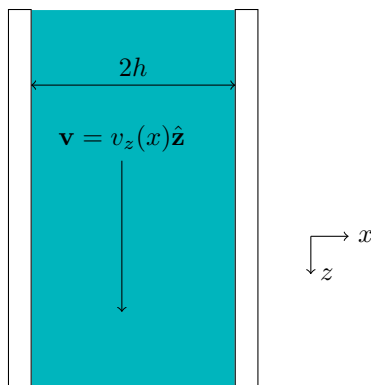
og at dette inntreffer når $\Phi_V = \sqrt{\frac{H}{3C}}$.

Vi antar at strømmen gjennom røret kan sees på som viskøs, inkompressibel strømning og at hastigheten ved utgangen fra turbinen er neglisjerbar.

Litt bakgrunnsinfo som kan være nyttig:

For 1-dimensjonal strømning kan energibevaring uttrykkes som

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_f + h_t \quad (26)$$



Figur 5: Oppgave 6.

hvor leddene er gitt som en *høyde* (head) med enhet lengde. h_f er friksjonstapet angitt som et høydetap mens h_t representerer *høydetapet* fra energien som tas ut av turbinen. Indeksen representerer henholdsvis inngang (1) og utgang (2). For å gjøre om likningen om til energi per masse kan du multiplisere med g . For å gjøre om likningen til energi per volum kan du multiplisere med $\gamma = \rho g$.

6. Et fluid med tetthet ρ og viskositet μ renner mellom to uendelig store plater som vist i figur 5. Avstanden mellom platene er $2h$. Fluidet er kun påvirket av tyngdekraften og friksjon, det er ingen påtrykt trykkgradient (dvs. trykket er antatt likt ved toppen og bunnen av strømmen). Hastigheten har kun en komponent i z -retning som kun varierer med x , $v_z(x)$. Anta stasjonær strømning. Finn et uttrykk for hastighetsprofilen $v_z(x)$ mellom platene.

2 Flervalgsoppgaver

7. To bølger med små amplituder beveger seg på samme streng. Slike bølger er ikke-dispersive. Hvilke (du kan velge flere) av følgende utsagn er *ikke sanne* om de to bølgene.
- De kan ha ulik amplitude.
 - De kan ha ulike bølgelengde.
 - De kan ha ulik frekvens
 - De kan ha ulik fasehastighet
 - De kan ha samme frekvens men ulik bølgelengde
8. To bølger med små amplituder beveger seg på en havoverflate. Slike bølger er dispersive. Hvilke (du kan velge flere) av følgende utsagn er *ikke sanne* om de to bølgene.
- De kan ha ulik amplitude.
 - De kan ha ulike bølgelengde.
 - De kan ha ulik frekvens
 - De kan ha ulik fasehastighet
 - De kan ha samme frekvens men ulik bølgelengde
9. Et hastighetspotensial er gitt av $\mathbf{v} = 3y\hat{\mathbf{x}} + 2x\hat{\mathbf{y}}$. Hva er strømningsfunksjonen for dette hastighetsfeltet?
- $y^2 - 2x^2 + c$
 - $\frac{1}{3}y^2 - x^2 + c$
 - $\frac{1}{2}y^2 - 2x^2 + c$

- D. $\frac{3}{2}y^2 - x^2 + c$
- E. $\frac{2}{3}y^2 - 3x^2 + c$

10. Gitt noen betingelser så eksisterer strømningsfunksjonen og den oppfyller Laplaces likning,

$$\nabla^2\psi = \partial_x^2\psi + \partial_y^2\psi = 0 \quad (48)$$

Hvilke betingelser må være oppfylt?

- A. Inkompressibelt og rotasjonsfritt.
- B. To-dimensjonalt og stasjonsært.
- C. Stasjonært, rotasjonsfritt og friksjonsfritt.
- D. Kompressibelt, stasjonært og to-dimensjonalt.
- E. Inkompressibelt, to-dimensjonalt og rotasjonsfritt.

11. Gitt at vi i et punkt i et materiale har en spenningstensor som er gitt av

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ N/m}^2 \quad (54)$$

Hva er x -komponenten av kraften som virker over en liten flate i dette punktet med areal $\sqrt{2} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ og overflatenormal i $[1 \ 1 \ 0]$ retning.

- A. $1 \mu\text{N}$ B. $2 \mu\text{N}$ C. $3 \mu\text{N}$ D. $4 \mu\text{N}$ E. $5 \mu\text{N}$

12. En planbølge er beskrevet av

$$y(x, t) = (2.5\text{mm}) \sin((3.5\text{m}^{-1})x - (4.5\text{s}^{-1})t) \quad (57)$$

Hva er bølgelengden til denne bølgen?

- A. 0.57 m B. 0.89 m C. 1.8 m D. 2.6 m E. 3.2 m

13. En planbølge er beskrevet av

$$y(x, t) = (2.5\text{mm}) \sin((3.5\text{m}^{-1})x - (4.5\text{s}^{-1})t) \quad (59)$$

Hva er fasehastigheten til denne bølgen?

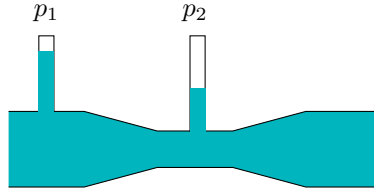
- A. 0.29 m/s B. = 0.78 m/s C. = 1.3 m/s D. = 1.9 m/s E. = 3.1 m/s

14. Du er på byggeverehuset og vurderer to ulike gressklippere. Den ene oppgir støynivået til 84 dB mens den andre angir støynivået til 66 dB. Hva er forholdet mellom intensitetene til lydbølgen som de to maskinene produserer?

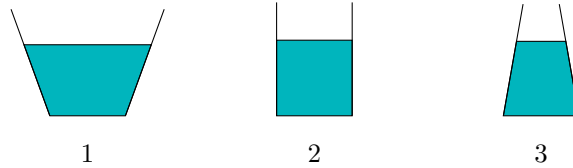
- A. $5.9 \cdot 10^{-4}$ B. $2.9 \cdot 10^{-3}$ C. $5.4 \cdot 10^{-3}$ D. $8.3 \cdot 10^{-3}$ E. $1.6 \cdot 10^{-2}$

15. Figur 6 viser et såkalt Venturi-rør som illustrerer at trykket reduseres i innsnevringen (sees ved en lavere vannsøyde). Om vi kjenner massetettheten ρ til væsken og dimensjonene (tverrsnittsarealet A) til rørene kan vi lese av massestrømmen fra trykkdifferansen $\Delta p = p_2 - p_1$ (som vi leser av fra vannsøylene). Hvilket av følgende uttrykk er riktig for massestrømmen?

A. $\Phi_m = A_1 \sqrt{\frac{2\rho\Delta p}{1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2}}$



Figur 6: Oppgave 15. Venturi-rør.



Figur 7: Oppgave 16.

$$\text{B. } \Phi_m = A_1 \sqrt{\frac{2\rho\Delta p}{1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2}}$$

$$\text{C. } \Phi_m = A_1 \sqrt{\frac{2\rho\Delta p}{1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^4}}$$

$$\text{D. } \Phi_m = A_1 \sqrt{\frac{4\rho\Delta p}{1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2}}$$

$$\text{E. } \Phi_m = A_1 \sqrt{\frac{8\rho\Delta p}{1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2}}$$

16. Vi har tre beholdere med ulik utforming men med likt areal på bunnflaten som vist i figur 7. Dybden på væsken er lik i i alle beholderne men mengden væske er ulik. Hva er riktig om kraften F som virker på bunnflaten fra vannet?

- A. $F_1 > F_2 > F_3$
- B. $F_1 < F_2 < F_3$
- C. $F_1 = F_2 = F_3$
- D. $F_1 = F_2 < F_3$
- E. $F_1 > F_2 = F_3$