Eksamen TFY4163 Bølgefysikk og fluidmekanikk V2020

Harmoniske bølger

1. Anta at vi har en bølge som er gitt av

$$y = A\sin(kx - \omega t + \pi) \tag{1}$$

hvor $k = 2.5\,\mathrm{cm}^{-1}$, $\omega = 3.0\,\mathrm{s}^{-1}$ og $A = 1.0\,\mathrm{cm}$.
Finn bølgens periode T, bølgehastighet v og maksimal partikkelhastighet $v_p^{\max}$.

Solution:
Perioden er gitt av

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3.0\,\mathrm{s}^{-1}} = 2.1\,\mathrm{s} \tag{2}$$

Bølgehastigheten er gitt av

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{3.0\,\mathrm{s}^{-1}}{2.5\,\mathrm{cm}^{-1}} = 0.012\,\mathrm{m\,s}^{-1} \tag{3}$$

Partikkelhastigheten er gitt av

$$v_p = \dot{y} = -A\omega\cos(kx - \omega t + \pi) \tag{4}$$

Den maksimale partikkelhastigheten får vi når cosinus-funksjonen er 1 (eller -1). Vi får da

$$v_p^{\max} = A\omega = 1.0\,\mathrm{cm}\cdot 3.0\,\mathrm{s}^{-1} = 0.030\,\mathrm{m\,s}^{-1} \tag{5}$$

Stående bølger

2. En stående planbølge $D(x,t)$ kan uttrykkes som

$$D(x,t) = f(x)g(t) \tag{6}$$

(a) Anta at vi har lineære, ikke-dispersive og tapsfrie bølger. Bruk bølgeligningen til å vise at hvert av leddene i følgende uttrykk er konstant

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{v^2}\frac{g''}{g} = \text{konstant} \tag{7}$$

(Notasjonen $()''$ er den deriverte av en en-dimensjonal funksjon med hensyn på argumentet.)

Solution: Vi setter uttrykket for D inn i bølgelikningen

$$\partial_t^2 D = v^2 \partial_x^2 D \tag{8}$$

Som gir

$$fg'' = v^2 g f'' \tag{9}$$

flytter vi om får vi

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{v^2}\frac{g''}{g} \tag{10}$$

Her er venstresiden bare en funksjon av x mens høyresiden bare er en funksjon av t. Ettersom x og t kan varieres uavhengig kan bare likningen være oppfylt for alle x og t dersom hver side er konstant.

(b) Sett konstanten i uttrykket over til $-k^2$ og bruk dette til å vise at løsningen på bølgeligningen kan skrives som

$$D(x,t) = K\cos(kx + \phi_f)\cos(\omega t + \phi_g) \tag{11}$$

Solution: Setter vi konstantent til $-k^2$ må vi altså løse likningene

$$\begin{aligned} f'' &= -k^2 f \\ g'' &= -k^2 v^2 = -\omega^2 g \end{aligned} \tag{12}$$

Dette er samme ligning som for fri harmonisk oscillator slik at løsningene er

$$\begin{aligned} f &= A_f \cos(kx) + B_f \sin kx = C_f \cos(kx + \phi_f) \\ g &= A_g \cos(\omega t) + B_g \sin \omega t = C_g \cos(\omega t + \phi_g) \end{aligned} \tag{13}$$

Hvor

$$\begin{aligned} C_f &= \sqrt{A_f + B_f} \\ \phi_f &= \arctan(B_f/A_f) \end{aligned} \tag{14}$$

og tilsvarende for g.
I den siste overgangen har vi brukt identiteten

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \tag{15}$$

Vi kan dermed skrive

$$D(x,t) = K\cos(kx + \phi_f)\cos(\omega t + \phi_f) \tag{16}$$

Med $K = C_g C_f$
Det er også helt rimelig å skrive ned siste leddet i likning 13 direkte som løsning.

(c) Anta at vi har stående, plane lydbølger i et rør med lengde L med én åpen og én lukket ende. Hva blir grensebetingelsene for de stående bølgene i hver ende, både for partikkelforskyvningen ξ og det relative trykket $p = -B\partial_x \xi$? Gi både en fysisk begrunnelse og et matematisk uttrykk for grensebetingelsene.

Solution: Ved den lukkede enden må forskyvningen gå mot null ettersom gassen treffer den faste veggen. Om vi setter $x = 0$ ved veggen blir grensebetingelsen

$$\xi(x = 0) = 0 \tag{17}$$

Ved den åpne enden vil trykket ved den åpne enden falle raskt til atmosfæretrykket slik at ved $x = L$ blir grensebetingelsen

$$p(x = L) = -B\partial_x \xi|_{x=L} = 0 \tag{18}$$

(d) Bruk grensebetingelsen på løsningen i oppgave b for å bestemme de tillate bølgevektorene for stående bølger i dette systemet. Skisser amplituden til ξ og p i røret for moden med den lengste bølgelengden.

Solution: Vi kan vilkårlig sette $t = 0$ når amplituden er maksimal slik at $\phi_g = 0$. Bruker vi grensebetingelsen ved veggen får vi ettersom $\xi(x = 0) = 0$ at $\phi_f = \frac{\pi}{2}$.
Ved den åpne enden får vi dermed grensebetingelsen at

$$\sin{(kL + \frac{\pi}{2})} = 0 \tag{19}$$

som gir at

$$kL + \frac{\pi}{2} = n\pi \tag{20}$$

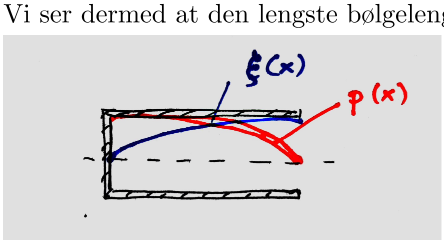
og vi får at bølgevektorene må oppfylle, for heltallig n

$$k = \frac{\pi}{2L}(2n - 1) \tag{21}$$

Dett gir for bølgelengden

$$\lambda = \frac{4L}{2n - 1} \tag{22}$$

Vi ser dermed at den lengste bølgelengden har bølgelengde $4L$



(e) Forklar hva som vil skje med frekvensen for moder med kortere bølgelengder. Gi et uttrykk for frekvensen som funksjon av bølgelengde.

Solution: Vi har ikke-dispersive bølger slik at dispersjonsrelasjonen er gitt av

$$\omega = vk \tag{23}$$

eller

$$f = \frac{v}{\lambda} \tag{24}$$

Når bølgelengden blir kortere blir bølgetallet større slik at frekvensen øker.

Polarisasjon

3. Anta at vi har en transversal planbølge som forplanter seg i z-retning gitt av

$$\mathbf{y}(z,t) = f(z,t)\hat{\mathbf{x}} + g(z,t)\hat{\mathbf{y}} \tag{25}$$

Finn uttrykk for f og g slik at $\mathbf{y}$ representerer en harmonisk, sirkulærpolarisert bølge.

Vis at uttrykket du finner representerer en sirkulærpolarisert bølge.

Solution: For en sirkulærpolarisert bølge er x og y komponenten $\pi/2$ ute av fase. Vi kan dermed skrive en sirkulærpolarisert bølge som

$$\mathbf{y}(x,t) = \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{x}} + \cos(kx - \omega t - \pi/2)\hat{\mathbf{y}} \tag{26}$$

Siden $\cos(x - \pi/2) = \sin(x)$ kan dette så skrives som

$$\mathbf{y}(x,t) = \cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{x}} + \sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}} \tag{27}$$

Hvis vi så ser på vinkelen θ for utslaget i xy-planet relativt til x-aksen blir denne

$$\theta = \arctan(g/f) = \arctan(\tan(kx - \omega t)) = kx - \omega t \tag{28}$$

Hvis vi så ser på et konkret punkt langs x-aksen ser vi at retningen på utslaget roterer med konstant hastighet. Amplituden blir

$$C(t) = \sqrt{f^2 + g^2} = 1 \tag{29}$$

altså konstant. En bølge som endrer retning med konstant hastighet og har konstant amplitude er en sirkulærpolarisert bølge.

Hydrostatikk

4. Anta at vi har en vogn med lengde L og bredde b som akselereres med konstant akselerasjon $\mathbf{a} = (a_x, 0, 0)$ som vist i figur 1. Atmosfæretrykket er p_a, tettheten til væsken er ρ og tyngdens akselerasjon $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$. Anta at dybden på væsken h ved den fremre kanten er kjent.

(a) Forklar i ord ved hjelp av grunnleggende fysiske prinsipper hvorfor væskens overflate inntar en skrå form som vist på figuren.

Solution: Et gitt fluidelement må oppfylle N2 slik at netto kraft i x-retning må være lik masse ganger akselerasjon. Denne kraften må være gitt av en trykk gradient i x-retning. Ettersom trykket er isotropt må trykkgradienten også balanseres av en endring i det hydrostatiske trykket på grunn av endringe i høyde til vannsøylene. Derfor den skrå overflaten.

(b) Basert på de grunnleggende prinsippene du brukte i forrige deloppgave, finn et kvantitativt uttrykk for vannoverflatens helning ved å uttrykke dybden på væsken som funksjon av posisjon i vognen.

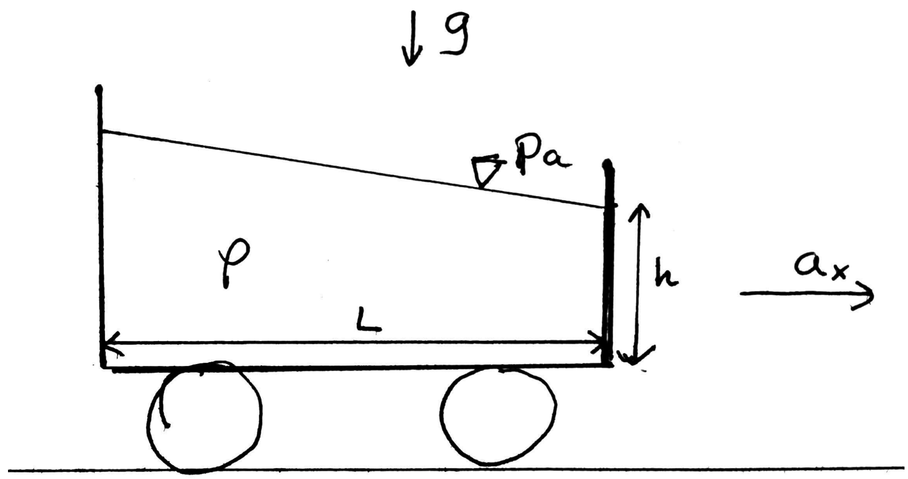


Figure 1: Vogn med vann

Solution: Vi ser på et lite fluidelement med lengde Δx og tverrsnittsareal ΔA. Kreftene på elementet er gitt av

$$\sum F = [p(x) - p(x + \Delta x)]\Delta A = \rho \Delta V a_x = \rho \Delta A \Delta x a_x \tag{30}$$

Vi flytter over Δx og lar størrelsen på elementet gå mot null og får da

$$-\partial_x p = \rho a_x \tag{31}$$

Variasjonen i trykket i x-retning må dermed være gitt av

$$p(x) = -\rho a_x x + c \tag{32}$$

Trykkvariasjonen må være kompensert av tyngden av vannsøylen (for stasjonær tilstand) slik at

$$p(x) = p_a + \rho g y(x) = -\rho a_x x + c \tag{33}$$

Vi får da

$$y = -\frac{a_x}{g} x + c' \tag{34}$$

(Dette kunne vi også fått direkte fra Eulers likning som i praksis er det samme

$$\rho D_t = -\nabla p = \rho g \partial_x y \tag{35}$$

Hastigheten er lik i alle deler av fluidet så de konvektive leddet er null)
Lar vi $y = 0$ være bunnen av vognen får vi får grensebetingelsen ved den ene veggen

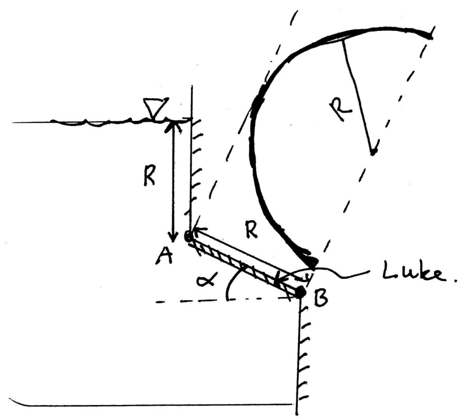


Figure 2: Luke

$$y(x = L) = -\frac{a_x}{g}L + c' = h \quad (36)$$

Vi får dermed til slutt at

$$y(x) = -\frac{a_x}{g}(x - L) + h \quad (37)$$

5. Du sitter i en båt som flyter i et basseng. I båten har du en stor stein. Du kaster steinen ut i bassenget. Vil vannstanden i bassenget øke, minke eller forbli den samme. Begrunn svaret ditt (ubegrunnet svar gir 0 poeng).

Solution: Når du har steinen i båten vil vannstanden øke (relativt til ingen stein) tilsvarende et volum vann som har samme tyngde som steinen for å gi nok oppdrift for kompensere for steinens tyngde. Når steinen kastes ut i vannet vil vannstanden øke (relativt til ingen stein) lik volumet av steinen. Ettersom steinen har høyere massetetthet en vann vil man få den størst endringe i volumet når steinen er i båten.

Vannstanden vil dermed gå ned når man kaster steinen i vannet.

Hydrostatisk krefter

6. Anta at vi har en luke formet som en halvsirkel mellom punktene A og B som vist i figur 2. Vinkelen $\alpha = 30°$. Hva blir netto kraft på luken fra vanntrykket? Centroiden til en halvsirkel ligger en avstand $\frac{4R}{3\pi}$ fra bunnlinjen på halvsirkelen.

Solution: Kraften som virker på en flate er lik trykket ved centroiden til flatene ganger arealet av flaten.

Dybden til centroiden er gitt av

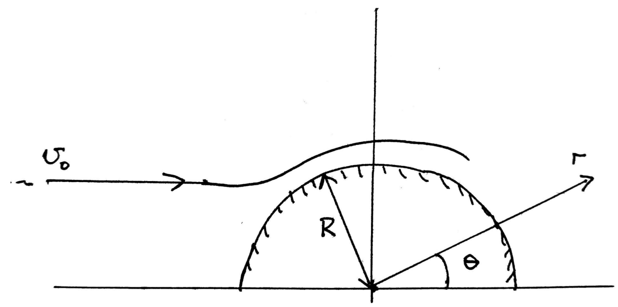


Figure 3: Potensialstrømning

$$h_{cg} = \left(R - \frac{4R}{3\pi}\right)\sin 30^\circ + R = \frac{R}{2}\left(3 - \frac{4}{3\pi}\right) \tag{38}$$

(hvor vi har brukt at $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$)

Arealet av flaten er $A = \dfrac{\pi R^2}{2}$ slik at kraften blir

$$F = p_{cg}A = \rho g h_{cg} A = \frac{\rho g R^3 \pi}{4}\left(3 - \frac{4}{3\pi}\right) = \rho g R^3\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{3}\right) \tag{39}$$

Potensialstrømning

7. Anta at vi har friksjonsfri strømning forbi et halvsirkelformet objekt som vist i figur 3. Hastighetspotensialet (i sylindriske koordinater) for denne strømmen er gitt av

$$\phi = v_0(r + \frac{k}{r})\cos\theta \tag{40}$$

(a) Den radielle hastigheten til strømningen må være null ved halvsirkelens overflate (kan ikke strømme gjennom overflaten). Bruk dette til å bestemme k.

Solution: Vi finner hastigheten fra hastighetspotensialet fra

$$\mathbf{v} = \nabla\phi \tag{41}$$

Vi er interessert i den radielle komponenten i et sylindrisk koordinatsystem

$$v_r = \partial_r\phi = v_0\left(1 - \frac{k}{r^2}\right) \tag{42}$$

Evaluerer vi denne ved objektets overflate $r = R$ og setter den lik null får vi

$$v_0\left(1 - \frac{k}{R^2}\right) = 0 \implies k = R^2 \tag{43}$$

(b) Finn et uttrykk for en strømlinje til strømningen utenfor halvsirkelen.

Solution: Strømningsfunksjonen finnes fra

$$v = \nabla \times (0, 0, \psi) \tag{44}$$

ettersom dette oppfyller kontinuitetslikningen $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (siden $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0, \ \forall \ \mathbf{f}$).
I sylindriske koordinater gir dette

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r}\partial_\theta \psi \\ v_\theta &= -\partial_r \psi \end{aligned} \tag{45}$$

Vi kan finne uttrykk for hastighetskomponentene fra hastighetspotensialet $\mathbf{v} = \nabla\phi$ i sylinderkoordinater.

$$\begin{aligned} v_r &= \partial_r \phi = v_0 \left(1 - \frac{k}{r^2}\right) \cos\theta \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\partial_\theta \phi = v_0 \left(1 + \frac{k}{r^2}\right)(-\sin\theta) \end{aligned} \tag{46}$$

Setter vi uttrykken for de radielle komponentene lik hverandre får vi

$$\partial_\theta \psi = v_0 \left(r - \frac{k}{r}\right) \cos\theta \tag{47}$$

og integrerer finner vi

$$\psi = v_0 (r - \frac{k}{r}) \sin\theta + f(r) \tag{48}$$

Sammenligner vi de polare komponentene av hastigheten finner vi at $f'(r) = 0$ altså at $f(r) = K$. Et uttrykk for en strømlinje blir da

$$v_0 (r - \frac{k}{r}) \sin\theta = K' \tag{49}$$

med ulike konstanter K' for ulike strømlinjer (kan også sette inn $k = R^2$ fra a)

Navier-Stokes

8. Anta at vi har et strømningsfelt for en inkompressibel, Newtonsk væske som er gitt av

$$\mathbf{v} = kx\hat{\mathbf{x}} + ky\hat{\mathbf{y}} - 2kz\hat{\mathbf{z}} \tag{50}$$

Undersøk om dette strømningsfeltet oppfyller kontinuitetslikningen og bruk Navier-Stokes likning for å finne trykkfordelingen i væsken. La $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$

Solution: Tar vi divergensen av hastighetsfeltet finner vi at

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = k + k - 2k = 0 \tag{51}$$

Kontinuitetslikningen $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ er dermed oppfylt.

Navier-Stokes ligning for en Newtonsk væske er

$$\rho D_t \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \tag{52}$$

Vi har et stasjonær strømningsfelt så den materialderiverte blir

$$D_t = \mathbf{v} \cdot \nabla \tag{53}$$

I friksjonsleddet tar vi andrederiverte (∇^2) med hensyn på koordinatene men setter vi inn uttrykket for hastigheten opptrer koordinatene til første orden eller lavere slik at alle disse leddene blir null.

Vi ender dermed for hver av komponentene opp med

$$\begin{aligned} \rho k^2 x &= -\partial_x p \\ \rho k^2 y &= -\partial_y p \\ \rho 4k^2 z &= -\partial_z p + \rho(-g) \end{aligned} \tag{54}$$

Den generelle løsningen for trykket blir da

$$p(x, y) = -\frac{k^2}{2}(x^2 + y^2 + 4z^2) - \rho g z + c \tag{55}$$