Eksamen TFY4163 Bølgefysikk og fluidmekanikk S2020 - Kont

Bølgefysikk

1 Harmoniske bølger

Anta at du har harmoniske bølger på formen $y = y_0 \sin(kx - \omega t)$ som forplanter seg langs en streng. Du teller antall svingninger i et gitt punkt på strengen og finner at du har 10 fullstendige svingninger i løpet av $1.5\,\mathrm{s}$. Du har blitt fortalt at bølgehastigheten er $v = 800\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Bestem vinkelfrekvensen ω og bølgetallet k for bølgen.

Solution: Målingen tilsier at frekvens på svingningen er $f = 6.67\,\mathrm{Hz}$. Vinkelfrekvensen blir da $\omega = 2\pi f = 42\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Bølgetallet er $k = \omega/v = 0.052\,\mathrm{m^{-1}}$.

2 Bølgelikningen

Utled bølgelikningen for plane lydbølger fra Newtons 2. lov. Anta at det dreier som om lydbølger i en gass og Vis hvordan resultatene blir forskjellige om vi antar isotermisk (dårlig model) eller adiabatisk (god model) kompresjon av gassen.

Solution: Vi ser for oss et masselement med mass $m = \rho V_0 = \rho A h$. La ξ være midlere forskyvning av gassmolekylene fra likevektsposisjonen. Newtons andre lov kan da skrives

$$m\partial_t^2 \xi = \sum F \qquad \Longrightarrow \tag{1}$$

$$\rho V_0 \partial_t^2 \xi = [p(x) - p(x+h)]A \qquad \Longrightarrow \tag{2}$$

$$\rho \partial_t^2 \xi = -\frac{p(x+dx) - p(x)}{h} \tag{3}$$

Lar vi $h \to 0$ får vi

$$\rho \partial_t^2 \xi = -\partial_x p \tag{4}$$

La oss se på endring av trykk Δp slik at

$$\rho \partial_t^2 \xi = -\partial_x (p_0 + \Delta p) = -\partial_x \Delta p \tag{5}$$

Får å få bølgelikningen må vi relatere trykkendringen p til forskyvningen.

Geometrisk er forskyvning relatert til volumendring

$$\frac{\Delta V}{V} = \partial_x \xi \tag{6}$$

For å relatere volumendring til trykkendring må vi bruke termodynamikk. Dersom vi har isotermisk kompresjon gir den idelle gasloven $pV = NkT$ at

$$pV = \text{konstant} \tag{7}$$

Dersom vi har adiabatisk kompresjon er derimot

$$pv^\gamma = \text{konstant} \tag{8}$$

hvor γ er adiabatkonstanten. Ser vi på det adiabatiske tilfellet først har vi

$$\Delta(pV^\gamma) = V^\gamma \Delta p + p\gamma V^{\gamma-1} d\Delta V = \tag{9}$$

som gir

$$\Delta p = p\gamma \frac{\Delta V}{V} = p\gamma \partial_x \xi \tag{10}$$

om vi gir tilsvarende for det isoterme tilfellet får vi

$$\Delta p = p\partial_x \xi \tag{11}$$

Setter vi dette inn for Δp i bevegelseslikningen får vi

$$\partial_t^2 \xi = v^2 \partial_x^2 \xi \tag{12}$$

hvor vi i de to tilfellene har

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad \text{adiabatisk} \tag{13}$$

$$v = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad \text{isotermisk} \tag{14}$$

For de fleste lydbølger i gasser er svingningene så raske at det ikke er tid for varmeutveksling slik at vi får adiabatiske forhold.

3 Intensitet

En lydkilde sender ut en tilnærmet sfærisk lydbølge med effekt på 10.0 W. Effekten er uniformt fordelt over bølgefronten. Hva blir intensiteten, uttrykt i dB, 5.0 m fra lydkilden?

Solution: Intensiteteten til bølgen er gitt av

$$I = \frac{P}{A} \tag{15}$$

$$= \frac{10\,\text{W}}{4\pi \cdot (5.0\,\text{m})^2} \tag{16}$$

$$= 3.18 \times 10^{-2}\,\text{W/m}^2 \tag{17}$$

I desibel

$$I[db] = 10 \log \frac{I}{I_0} \tag{18}$$
$$= 10 \log \frac{3.18 \times 10^{-2}\,\mathrm{W/m^2}}{1 \times 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}} \tag{19}$$
$$= 105\,\mathrm{dB} \tag{20}$$

4 Dopplereffekt

En lydkilde sender ut en bølge med frekvens på 400 Hz. Dersom du beveger deg mot lydkilden med en hastighet på $50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, hvilken frekvens vil du måle? Anta at lydhastigheten er på $343\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Gi en intuitiv forklaring på resultatet av målingen.

Solution: På grunn av Dopplereffekten vil vi måle en frekvens på

$$f = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) f_0 \tag{21}$$
$$= \left(1 + \frac{50\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{343\,\mathrm{m\,s^{-1}}}\right) 400\,\mathrm{Hz} = 458\,\mathrm{Hz} \tag{22}$$
$$\tag{23}$$

Når vi beveger oss mot bølgen vil vi møte bølgetoppene med mindre tidsrom mellom enn de ble sendt ut med. Vi vil derfor oppfatte en høyere frekvens.

5 Refleksjon og transmisjon

En harmonisk, transversal bølge med amplitude 2.0 mm forplanter seg langs en streng med massetetthet $25\,\mathrm{g\,cm^{-1}}$ og treffer en skjøt til en streng med massetetthet på $10\,\mathrm{g\,cm^{-1}}$. Hva blir amplituden til den reflekterte og den transmitterte bølgen? Anta snordraget er likt på begge sider av skjøten.

Kan den reflekterte eller transmitterte bølgen ha høyere amplituden enn den innkommende bølgen? Begrunn svaret.

Solution: Forholdet mellom den amplitudene til den reflekterte og transmitterte bølgene relativt til den innkommende bølgen er gitt av

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{24}$$
$$t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \tag{25}$$

hvor $Z = \sqrt{S\mu}$ er bølgeimpedansen for strengen.

Setter vi inn verdier får vi

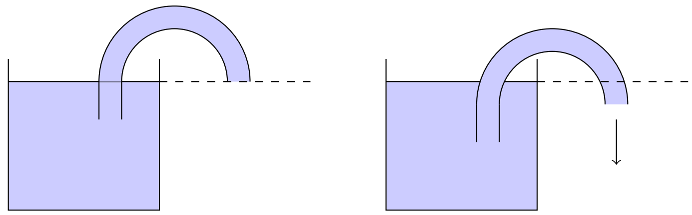

Figure 1: I figuren til venstre er systemet i likevekt. I figuren på høyre side vil vann fra karet og ut gjennom slangen

$$r = 0.23 \tag{26}$$
$$t = 1.23 \tag{27}$$

som gir amplitude for reflekterte og transmitterte bølger

$$y_r = 0.45\,\mathrm{mm} \tag{28}$$
$$y_t = 2.5\,\mathrm{mm} \tag{29}$$

Vi ser at amplituden på den transmitterte bølgen er større enn innkommende bølge. Selv om amplituden er større er energien som blir transmittert likevel mindre enn energien i den innkommende bølgen. Amplituden blir større fordi strengen for den transmitterte bølgen har mindre massetetthet og dermed kan få høyere amplitude for en gitt energi.

Fluidmekanikk

6 Fluidstatikk

En *hevert* er et instrument som kan brukes til å tappe væske fra et kar over kanten av karet. Det består av en slange fylt med væsken med den ene enden ned i karet. Dersom åpningen av slangen plasseres i samme høyde som væskeoverflaten (se figur, venstre side) vil væsken være i ro i slangen. Dersom åpningen senkes lavere en væskeoverflaten (se figur, høyres side) vil væsken strømme fra karet og ut gjennom slangen.

Forklar med fysiske prinsipper virkemåten til en hevert.

Solution: Trykket i et gitt punkt i væsken er gitt av atmosfæretrykket ved væskeoverflaten og høyden på vannsøylen over punktet. Når enden på røret er i samme høyde som væskeoverflaten er væsketrykket i enden lik atmosfæretrykket og vi får likevekt. Når vi senker enden på slangen vil tyngden av vannsøylen bli større og trykket dermed større. Trykket i væsken vil dermed bli større en atmosfæretrykket og vil akselerere nedover. Dette skaper et undertrykk i røret som vil suge væske opp fra karet. Væsken vil fortsett å renne ut inntil væskenoverflaten igjen får samme høyde som enden på slangen.

7 Hageslange

Anta at en hageslange har volumflux $\Phi_V = 50\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ og et sirkulært tverrsnitts med diameter $d =$

13 mm. Hvis du holder hageslangen vertikalt, hvor høyt vil strålen nå (anta uniform hastighetsfordeling i slangen og laminær og friksjonsfri strømning)?

Solution: Volumstrømen er gitt av $\Phi_V = vA$. Energibevaring gir at $\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h$. Vi får dermed

$$h = \frac{\Phi^2}{2gA^2} \tag{30}$$

hvor $A = \pi(d/2)^2$. Setter vi inn verdier får vi

$$h = 2.0\,\mathrm{m} \tag{31}$$

8 Virvling

Anta at vi har et 2D hastighetsfelt som er gitt av $\mathbf{v} = \frac{K}{r}\hat{\theta}$ (for $r > 0$). Er strømningen rotasjonsfri?

Solution: For å finne ut om strømningen er rotasjonsfri regner vi ut virvlingen

$$\begin{aligned} \omega = \nabla \times \mathbf{v} &= -\partial_z v_\theta \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\partial_r r v_\theta \hat{\mathbf{z}} && (32) \\ &= -\partial_z \frac{K}{r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\partial_r r \frac{K}{r}\hat{\mathbf{z}} && (33) \\ &= 0 && (34) \end{aligned}$$

og finner at virvlingen er null og dermed er strømningen rotasjonsfri (dette kalles et vortex og brukes ofte som en elementær løsning i potensialteori).

9 Hydrostatiske krefter

(a) Anta at vi har en skråstilt demning som vist på figur 2. Nederst på demingen er det en luke formet som en likebeint trekant ABC med grunnlinjen i trekanten langs siden AB. Grunnlinjen AB har lengde $b = 1.0\,\mathrm{m}$ og høyden på trekanten er $l = 1.0\,\mathrm{m}$. Dybden på vannet $h = 1.0\,\mathrm{m}$. Lukens vinkel i forhold til horisontalen er $\theta = 30$ degree. Vi antar at det er atmosfæretrykk under luken. Vis at netto kraft F_N på luken er gitt av

$$F_N = \frac{\gamma b l}{2}\left(2h - b\sin\theta\right) \tag{35}$$

Solution: Netto kraft på luken er gitt av

$$F_N = \gamma h_c A = \gamma(h - \frac{b}{2}\sin\theta)\frac{bl}{2} = \frac{\gamma b l}{4}(2h - b\sin\theta) \tag{36}$$

(b) Luken er hengslet i og kan rotere om linjestykket AB. Hvor stor kraft F_E må man minst tilføre punkt C for at luken skal dreie om linjestykket AB. (Det oppgis som potensielt nyttig at andre arealmomentet for en likebeinet trekant relativt til centroiden er gitt av $I_{xy} = \int xy\,dA = 0$ og $I_{xx} = \int y^2\,dA = \dfrac{bl^3}{36}$, hvor y er parallel med grunnlinjen til trekanten og x parallell med høyden til trekantente. Centroiden ligger en høyde $h/3$ over grunnlinjen.)

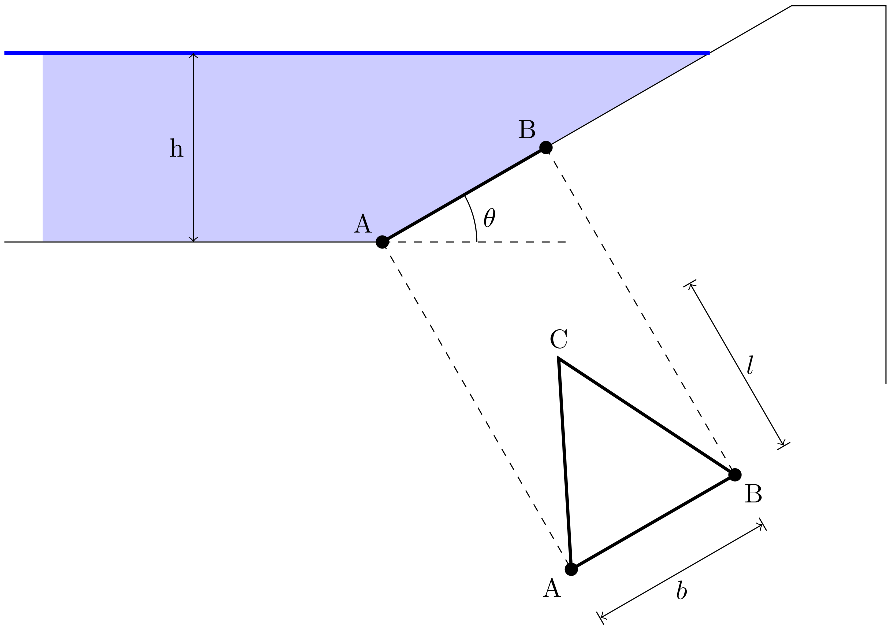

Figure 2: Oppgave 9

Solution: Posisjon til trykksenteret relativt til centroiden er gitt av

$$x_p = \sin\theta \frac{I_{xy}}{h_c A} \tag{37}$$

Siden $I_{xy} = 0$ er $x_p = x_c$. Om vi påfører en ekstern kraft F_E i C vil dreiemomentene om linjen AB være balansert når

$$F_N \frac{l}{3} = F_E l \tag{38}$$

Altså får vi at

$$F_E = \frac{F_N}{3} = 4.9\,\mathrm{kN} \tag{39}$$

10 Potensialstrømning

La hastighetsfeltet være gitt av $\mathbf{v} = U\hat{\mathbf{x}} + V\hat{\mathbf{y}}$. Finn et uttrykk for hastighetspotensialet til dette hastighetsfeltet.

Solution: Hastighetspotensialet ϕ må være slik at $\nabla\phi = \mathbf{v}$. Vi kan dermed skrive

$$\partial_x \phi = U \tag{40}$$
$$\partial_y \phi = V \tag{41}$$

Løser vi hver likning får vi

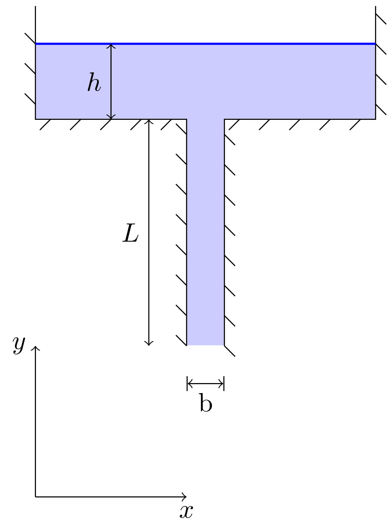

Figure 3: Oppgave 11

$$\phi = Ux + f(y) \tag{42}$$
$$\phi = Vy + g(x) \tag{43}$$
$$\tag{44}$$

Vi finner dermed generelt

$$\phi = Ux + Vy + c \tag{45}$$

hvor c er en konstant.

11 Navier stokes

Anta at vi har et 2D system som vist i figur 3 (uendelig utstrekning i z-retning). En inkompressibel væske med tetthet ρ og viskositet μ renner ut av karet via to plater som med høyde L og avstand b. Væskeoverflaten er en høyde h over bunnen av karet. Vi antar at inngangslengden (lengden før man har fullt utviklet laminær strømning) er neglisjerbar i forhold til L.

Bruk koordinatsystem som angitt i figuren. Vi antar at strømningen i røret er stasjonær (h holdes konstant), laminær og at hastigheten kun har en y-komponent og kun varier i x-retning, $\mathbf{v} = v_y(x)\hat{\mathbf{y}}$

Bruk Navier-Stokes likning til å finne hastighetsprofilen $v_y(x)$ uttrykt med de oppgitte parametere. Være nøye med å presisere forenklinger og antagelser du gjør.

Solution: Navier-Stokes likning er

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mu \tag{46}$$

Det tidsderiverte leddet er null siden vi har stasjonære forhold. Det konvektive leddet er også null siden hastigheten kun har en y-komponent som kun varier med x ($v_y \partial_y v_y(x) = 0$).

For x-komponenten av NS får vi

$$0 = -\partial_x p \implies p = f(y) \tag{47}$$

altså at trykket kun er en funksjon av y. For y-komponenten får vi

$$0 = \partial_y p - \rho g + \mu \partial_x v_y \tag{48}$$

Ved å flytte om ledd ser vi at vi får en separabel differensiallikning

$$\underbrace{\partial_y p + \rho g}_{f(y)} = \underbrace{\mu \partial_x^2 v_y(x)}_{g(x)} \tag{49}$$

For at likhet skal holde for alle (x, y) må hver av sidene være en konstant. Vi introduserer separasjonskonstanten k

$$\partial_y p + \rho g = k \tag{50}$$

$$\mu \partial_x^2 v_y = k \tag{51}$$

Løser den først likningen og setter inn for grenseverdiene ($p(0) = p_a$. $p(L) = p_a + \rho g h$) gir

$$k = \rho g \left(\frac{h}{L} + 1 \right) \tag{52}$$

og

$$p(y) = \rho g \frac{h}{L} y + p_a \tag{53}$$

Løser vi den andre likningen med grensbetingelser ($v(x = 0) = 0$, $v(x = b) = 0$) og setter inn for k får vi

$$v_y = \frac{\rho g}{\mu} \left(\frac{h}{L} + 1 \right) (x - b)x \tag{54}$$