Eksamen TFY4163 Bølgefysikk og fluidmekanikk V2020

1 Doppler

1 Doppler v1

En lydkilde som sender ut bølger med frekvens $f = 1.0\,\mathrm{kHz}$ og bølgehastighet v, beveger seg med hastighet $v/2$ mot en stillestående observatør. Hvilken frekvens måler observatøren?

Dersom isteden kilden er i ro og observatøren beveger seg mot kilden med en hastighet $v/2$ hva blir da frekvensen observatøren måler?

Kommenter hvorfor resultatene er ulike, selv om den relative hastigheten mellom kilde og observatør er lik i begge tilfeller.

Solution: Dersom kilden beveger seg blir frekvensen f' observatøren måler

$$f' = f\frac{v}{v - v_s} = f\frac{v}{v - v/2} = 2f = 2.0\,\mathrm{kHz} \tag{1}$$

Dersom observatøren beveger seg blir den målte frekvensen

$$f' = f\frac{v - v_0}{v} = f\frac{v + v/2}{v} = 1.5f = 1.5\,\mathrm{kHz} \tag{2}$$

Den målte dopplereffekten er avhengig av den relative hastigheten mellom kilden/observatøren og materialet bølgen beveger seg i, ikke den relative hastigheten mellom kilde og observatør.

2 Doppler v2

En lydkilde som sender ut bølger med frekvens $2.0\,\mathrm{kHz}$ og bølgehastighet v, beveger seg med hastighet $v/2$ mot en stillestående observatør. Hvilken frekvens måler observatøren?

Dersom isteden kilden var i ro og observatøren beveger seg mot kilden med en hastighet $v/2$ hva blir da frekvensen observatøren måler?

Kommenter hvorfor resultatene er ulike, selv om den relative hastigheten mellom kilde og observatør er lik i begge tilfeller.

Solution: Som over med tallsvar $4.0\,\mathrm{kHz}$ og $3.0\,\mathrm{kHz}$

2 Stående bølger

1 Stående bølger v2

Ørekanalen er ca. $2.4\,\mathrm{cm}$ lang. Den er lukket i den ene enden av trommehinnen og er åpen i den andre siden mot omgivelsene. La oss modellere ørekanalen som et rett rør som er åpent i den ene enden og lukket i den andre. Gitt det generelle uttrykket for en stående bølge,

$$y(x,t) = (C\sin(kx) + D\cos(kx))\cos(\omega t + \phi) \tag{3}$$

hvor $y(x)$ er forskyvningen, utled et et uttrykk for bølgelengdene til de tillatte modene i ørekanalen. Hva blir bølgelengden til den fundamentale moden (lengste bølgelengde) for ørekanalen? Kan man høre lyd med denne bølgelengden?

Solution: Ved den lukkede ende av røret har vi $y(0,t) = 0$ som gir oss at $D = 0$ slik at

$$y(x) = C\sin(kx) \tag{4}$$

Videre har vi at overtrykket p er gitt av

$$p = -B\partial_x y = -BCk\cos kx \tag{5}$$

Ved åpningen ($x = L$)må overtrykket gå mot null slik at vi får

$$kL = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \{0, 1, \cdots\} \tag{6}$$

Setter vi inn $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ får vi

$$\lambda = \frac{4L}{2n+1} \tag{7}$$

Vi får lengst bølgelengde λ_0 for $n = 0$ som blir

$$\lambda_0 = 4L = 4 \cdot 2.4\,\mathrm{cm} = 9.6\,\mathrm{cm} \tag{8}$$

Om vi antar en bølgehastighet på $v = 330\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ blir frekvensen ω_0 til den fundamentale moden

$$f_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{330\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9.6 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 3.4\,\mathrm{kHz} \tag{9}$$

Hørbar lyd er typisk i området 20 Hz - 20 kHz, slik at den fundamentale moden er godt innenfor dette området.

2 Stående bølger v2

Som over med lengde på ørekanal lik 2.9 cm

Solution: Som over men med tallverdier

$$\lambda_0 = 11.6\,\mathrm{cm} \tag{10}$$

$$f_0 = 2.8\,\mathrm{kHz} \tag{11}$$

3 Energi i bølger

3 Energi i bølger v1

(a) Den instantane effekten (energi/tid) som blir transport langs en bølge på en streng spent opp med en snorkraft F er gitt av

$$P = -F\partial_x y \partial_t y \tag{12}$$

hvor y er transversal forskyvningen av strengen fra likevekt.
Vi skal anta at vi har en stående bølge på strengen gitt av

$$y(x,t) = A\sin(kx)\sin(\omega t) \tag{13}$$

Vis at for denne stående bølgen er gjennomsnittlig effekt over en periode lik null for alle posisjoner x.

Solution: Effekten er gitt av

$$\begin{aligned} P(x,t) &= -F\partial_x y\partial_t y = -FAk\cos(kx)\sin\omega t\cdot A\omega\sin(kx)\cos\omega t \\ &= -\frac{FA^2k\omega}{4}\sin(2kx)\sin(2\omega t) \end{aligned} \tag{14}$$

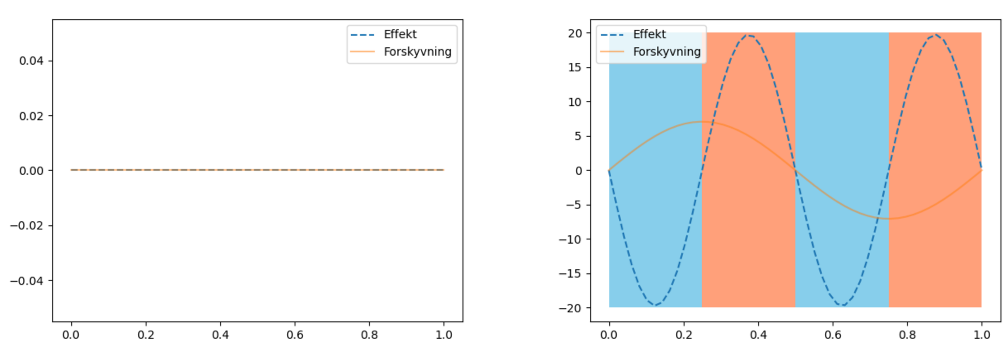
hvor vi har brukt $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.
Den gjennomsnittlige effekten $\tilde{P}$ over en periode er gitt av

$$\tilde{P} = -\frac{FA^2k\omega}{4}\sin(2kx)\frac{1}{T}\int_0^T \sin 2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{FA^2k}{8}\sin(2kx)\frac{1}{T}\left[\cos\left(2\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^T = 0 \tag{15}$$

uavhengig av x.

(b) Anta at strengen har lengde L og at vi har en stående bølge på strengen i moden med den nest lengste bølgelengden, $\lambda = L$. Skisser forskyvningen $y(x)$ og effekten $P(x)$ som funksjon av x (i samme figur) ved $t = 0$ og $t = T/8$ (hvert tidspunkt i hver sin figur). Diskuter retningen til energistrømmen sett i sammenheng med forskyvningen.

Solution: Forskyvningen og effekten ved $t = 0$ og $t = T/8$ er vist i figurene nedenfor. Fargene viser retningen til effektstrømmen i de ulike områdene, rød for positiv effekt (energistrøm i positiv x-retning og blå for negativ effekt (energistrøm i negativ x-retning).



Ved $t = 0$ er effekten lik null overalt. Vi vet videre at i punktet som har maksimalt utslag har strengen høy kinetisk energi, mens i knutepunktet er det ingen kinetisk energi (alltid i ro). Ved dette tidspunktet er det ingen potensiell energi i strengen (den er ikke strukket).

Ved $t = T/8$ ser vi at det strømmer energi i negativ x-retning til venstre for punktet med maksimalt utslag ($x = L/4$) og i positiv x-retning på høyre side. Vi får dermed netto energiflyt bort fra dette punktet ettersom den hadde maksimal kinetisk energi ved $t = 0$ mens den ved maksimalt utslag har ingen kinetisk energi og heller ikke potensiell energi siden strengen ikke er strukket. I knutepunktet ($L = 2$) blir strengen strukket mer og mer (stor helning) slik at i dette punktet får vi netto energistrøm inn mot punktet.

4 Diffraksjon

4 Bragg-diffraksjon

Når man sender en røntengstråle inn mot en krystall får man spredning av røntgenstrålen i gitte innfallsvinkler avhengig av avstanden mellom atomene i krystallen. Forklar hvorfor dette skjer og gi en kvantitativ betingelse for relasjonen mellom vinkelen og avstanden mellom atomene.

Solution: I Bragg-spredning virker hvert atom i krystallen som en punktkilde som reflekter en sfæriske bølge med atomet i sentrum. Vi får kun en sterk refleksjon fra et krystallplan dersom vi får konstruktiv interferens fra alle krystallplanene.

Faseforskjellen vi får fra refleksjonen mellom to naboliggende krystallplan er gitt av

$$\phi = k2d\sin\theta \tag{16}$$

hvor k er bølgetallet til røntgenstrålen, θ er infallsvinkelen og d er avstanden mellom krystallplan.

Vi får konstruktiv interferens når faseforskjellen er $2\pi n$, hvor n er et heltall, altså når

$$n\lambda = 2d\sin\theta \tag{17}$$

som er Bragg-betingelsen.

5 Oppdrift

1 Oppdrift v1

Anta at vi har en ~~dykkerklokke~~[1] batysfære (en undervannsfarkost)) som er formet tilnærmet som en sfære med indre *diameter* 1.40 m og at tykkelsen på stålveggene er 4.00 cm.

Vil denne ~~dykkerklokken~~ batysfæren flyte eller synke i sjøvann nær overflaten?

Vil dette endre seg på det største havdyp (omtrent 10 km)?

Søk opp nødvendige størrelser og siter referanser.

[1] Begrepet dykkerklokke brukes som regel om en farkost som er åpen mot vannet på den den ene siden (se `https://en.wikipedia.org/wiki/Diving_bell`) og var ikke det korrekte begrepet slik oppgaven var tenkt med en lukket farkost. Besvarelser som har tolket oppgaven som en dykkerklokke har også fått full utelling.

Solution: Volum av en sfære kan uttrykkes som

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\pi d^3}{6} \tag{18}$$

Tyngden av batysfæren er

$$G = \rho_s g \pi \frac{d_y^3 - d_i^3}{6} = 8.00 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3} 9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}} \pi \frac{(1.48\,\mathrm{m})^3 - (1.40\,\mathrm{m})^3}{6} = 20.5 \times 10^3\,\mathrm{N} \tag{19}$$

Tyngden av det fortrengte vannet blir

$$F = \rho_w g \pi \frac{d_y^3}{6} = 1.024 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3} 9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}} \pi \frac{(1.48\,\mathrm{m})^3}{6} = 17.1 \times 10^3\,\mathrm{N} \tag{20}$$

Tetthet til stål og sjøvann er hentet fra henholdsvis `https://en.wikipedia.org/wiki/Steel` og `https://en.wikipedia.org/wiki/Seawater`

Oppdriften er mindre en tyngden og batysfæren vil dermed synke.

Ved de største dyp kan tettheten til sjøvann stige fra $1.025 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ til $1.050 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Oppdriften vil da stige fra $17.1 \times 10^3\,\mathrm{N}$ til $17.5 \times 10^3\,\mathrm{N}$ men batysfæren vil fortsatt synke (Vi ser at vann er for de fleste praktiske formål inkompressibelt).

2 Oppdrift v2

Anta at vi har en ~~dykkerklokke~~ batysfære (en undervannsfarkost) som er tilnærmet en sfære med indre *diameter* 2.50 m og at tykkelsen på stålveggene er 4 cm.

Vil denne ~~dykkerklokken~~ batysfæren flyte eller synke i sjøvann nær overflaten?

Vil dette endre seg på det største havdyp (omtrent 10 km)?

Søk opp nødvendige størrelser og siter referanser.

Solution: Volum av en sfære kan uttrykkes som

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{\pi d^3}{6} \tag{21}$$

Tyngden av batysfæren er

$$G = \rho_s g \pi \frac{d_y^3 - d_i^3}{6} = 8.00 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3} 9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}} \pi \frac{(2.58\,\mathrm{m})^3 - (2.50\,\mathrm{m})^3}{6} = 63.6 \times 10^3\,\mathrm{N} \tag{22}$$

Tyngden av det fortrengte vannet blir

$$F = \rho_w g \pi \frac{d_y^3}{6} = 1.024 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3} 9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}} \pi \frac{(2.58\,\mathrm{m})^3}{6} = 90.4 \times 10^3\,\mathrm{N} \tag{23}$$

Tetthet til stål og sjøvann er hentet fra henholdsvis `https://en.wikipedia.org/wiki/Steel` og `https://en.wikipedia.org/wiki/Seawater`

Oppdriften er større enn tyngden og batysfæren vil dermed flyte.

Ved større dyp vil tettheten til vann bli enda større og dermed vil oppdriften bli ende større slik at batysfæren vil flyte ved dette tilfellet også.

6 Hydrostatikk

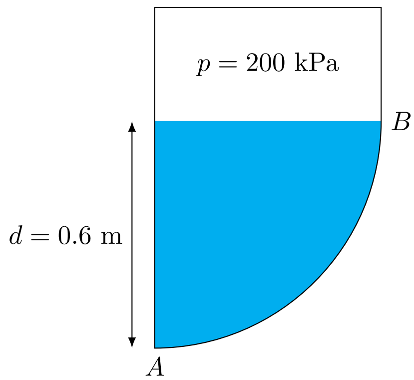
3 Hydrostatikk v1

Anta at vi har en tank med benzen som vist i figuren. Tanken er trykksatt til 200 kPa i luftrommet. Anta at tanken er 1.0 m dyp inn i planet. Slå opp nødvendige materialparametre og siter kilden.

Centroiden til en kvartsirkel med radius R ligger $(4R/3\pi, 4R/3\pi)$ fra hjørnet

Hva blir den ~~netto~~[2] *vertikale* kraftkomponenten som virker fra væsken på arealet mellom A og B (kvartsirkelen)?

Hva blir dreiemomentet som virker fra væsken på arealet mellom A og B relativt til en akse gjennom punktet A inn i planet?



Solution:

summen av de vertikale kreften som virker på væsken må være lik null.

$$\sum F_v = F_h + F_g + F_{AB} = 0 \tag{24}$$

Vi dermed

$$F_{AB} = -(F_h + F_g) \tag{25}$$

Kraften F'_{AB} *på* flaten AB fra væsken blir da

$$F'_{AB} = F_h + F_g \tag{26}$$

Den vertikale kraften fra væsken på flaten blir dermed (b er dybden inn i planet)

$$\begin{aligned} F &= pA + \rho V g = pbd + \rho \frac{\pi d^2}{4} bg \\ &= 200\,\mathrm{kPa} \cdot 0.6\,\mathrm{m} \cdot 1.0\,\mathrm{m} + 880\,\mathrm{kg/m^3} \cdot \frac{\pi (0.6\,\mathrm{m})^2}{4} \cdot 1.0\,\mathrm{m} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} \\ &= 122 \times 10^3\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{27}$$

Summen av dreiemomentene på væsken må være lik null

[2] Den opprinnelig ordlyden på denne oppgave gjorde at oppgaven ikke ble som opprinnelig tenkt. Tekst som er streket ut og lagt til i rødt er endringer i forhold til ordlyden under eksamen. Den opprinnelig oppgavene og et løsningsforslag på den er gitt i appendiks.

$$\sum \tau = \tau_{AB} + \tau_h + \tau_v + \tau_g = 0 \tag{28}$$

hvor h og v referer til henholdsvis horisontale og vertikale flatene og g til tyngden av væsken. Slik at

$$\tau_{AB} = -(\tau_h + \tau_v + \tau_G) \tag{29}$$

Dreiemomentet τ'_{AB} *på* flaten AB blir da

$$\tau'_{AB} = \tau_h + \tau_v + \tau_g \tag{30}$$

Vi får for de ulike leddene

$$\tau_h = pA\frac{d}{2} = p\frac{bd^2}{2} = 36.0\,\mathrm{kN\,m} \tag{31}$$

$$\tau_g = \rho V g\frac{4d}{3\pi} = \rho g\frac{\pi d^2}{4}b\frac{4d}{3\pi} = \rho g\frac{bd^3}{3} = 0.621\,\mathrm{kN\,m} \tag{32}$$

$$\tau_v = p_{CG}A\left(\frac{d}{2} - \frac{\gamma I_{xx}}{p_{CG}A}\right) = \frac{d}{2}p_{CG}A - \gamma I_{xx} = \frac{d}{2}(p+\gamma\frac{d}{2})bd - \gamma\frac{bd^3}{12} = p\frac{bd^2}{2} + \gamma\frac{bd^3}{6} = 36.3\,\mathrm{kN\,m} \tag{33}$$

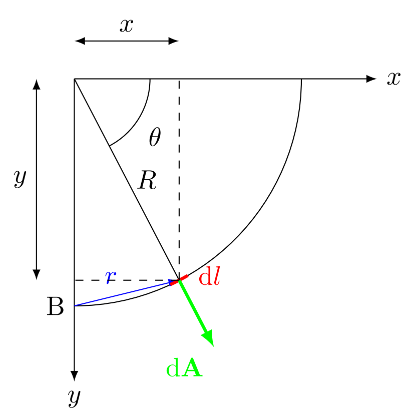
Setter vi sammen alle leddene får vi

$$\tau'_{AB} = pbd^2 + \gamma\frac{bd^3}{2} = 73\,\mathrm{kN\,m} \tag{34}$$

Alternativt løsningsforslag

Metoden over er elegant men krever en viss trening og fysisk intuisjon for å se fremgangsmåten. Det er intellektuelt tilfredsstillende å se et en mer direkt fremgangsmåte også resulterer i samme resultat.

(I det følgende er $R = d$ og $p_0 = p$)



Vi deler opp beholderens overflate i elementer $\mathrm{d}\mathbf{A} = b\,\mathrm{d}l\,\hat{\mathbf{n}}$ hvor b er dybden til arealet inn i planet og $\mathrm{d}l$ er lengden til arealets sidekant i planet og $\mathbf{n}$ er overflatenormalen.

Kraften $\mathrm{d}\mathbf{F}$ på overflateelementet er gitt av $\mathrm{d}\mathbf{F} = p\,\mathrm{d}\mathbf{A}$, hvor $p = p_0 + \rho g y$. p_0 er trykket ved overflaten av væsken og y er dybden til elementet.

Dreiemomentet på overflatelemnetet er gitt av $\mathrm{d}\tau = \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{F}$ hvor $\mathbf{r}$ er posisjonsvektoren til overflateelementet relativt til punktet B som vi ønsker å regne ut dreiemomentet relativt til.

Vi må uttrykke størrelsene i det angitte koordinatsystemet for å kunne integrere opp det totale dreiemomentet. Vi har at

$$\sin\theta = \frac{y}{R} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} \tag{35}$$

hvor R er radien til overflaten, slik at $\mathrm{d}l = \mathrm{d}x\,\dfrac{R}{y}$.

Fra figuren ser vi at $\hat{\mathbf{n}} = (x, y)/R$ og $\mathbf{r} = (x, -(R-y))$

Vi kan dermed skrive opp et uttrykk for dreiemomentet på overflateelementet som

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau &= \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{F} \\
&= (x, y-R) \times (x, y)\frac{1}{R}(p_0 + \rho g y) b\,\mathrm{d}x\,\frac{R}{y}\hat{\mathbf{z}} \\
&= (xy - (y-R)x)\frac{b(p_0 + \rho g y)}{y}\,\mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{z}} \\
&= Rb\left(p_0\frac{x}{y} + \rho g x\right)\mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{z}} \\
&= Rb\left(p_0\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \rho g x\right)\mathrm{d}x\,\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned} \tag{36}$$

Dette uttrykket kan vi nå integrere over hele flaten og vi får da for magnituden til dreiemomentet

$$\begin{aligned}
\tau = \int \mathrm{d}\tau &= Rb\int_0^R (p_0\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \rho g x)\,\mathrm{d}x \\
&= Rb\left[p_0(-\sqrt{R^2 - x^2}) + \rho g\frac{x^2}{2}\right]_0^R \\
&= Rb\left(p_0 + \rho g\frac{R^2}{2}\right) \\
&= \left(p_0 R^2 + \rho g\frac{R^3}{2}\right) b
\end{aligned} \tag{37}$$

7 Materialderivert

1 Materialderiverte v1

Gitt hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = V_0(1 + \frac{2x}{L})\hat{\mathbf{x}}, \tag{38}$$

hvor $V_0 = 2.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ og $L = 1.0\,\mathrm{m}$.

Hva er akselerasjonen til en partikkel ved $x = 1.0\,\mathrm{m}$?

Solution: Akselerasjonen til en partikkel er gitt av

$$\mathbf{a} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = v_x \partial_x v_x \hat{\mathbf{x}} = \frac{2V_0^2}{L}\left(1 + \frac{2x}{L}\right)\hat{\mathbf{x}} = 24.0\,\mathrm{m/s^2}\hat{\mathbf{x}} \tag{39}$$

(Merk at denne væsken ikke kan være inkompressibel siden $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \neq 0$)

2 Materialderivert v2

Gitt hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = (x^2 + y^2)\hat{\mathbf{x}} - (2xy)\hat{\mathbf{y}} \tag{40}$$

Bestem x-komponenten til akselerasjonen til en partikkel.

Solution:

$$\begin{aligned} a_x &= (\mathbf{v} \cdot \nabla)v_x \\ &= ((x^2 + y^2)\partial_x - 2xy\partial_y)(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2)2x - 2xy2y \\ &= 2x^3 + 2xy^2 - 4xy^2 \\ &= 2x^3 - 2xy^2 \end{aligned} \tag{41}$$

8 Kontinuitet

1 Kontinuitet

Anta at vi har et 2-dimensjonalt, inkompressibelt strømningsfelt $\mathbf{v}$ hvor x-komponenten er gitt av

$$v_x = K(1 - \exp(-ay)) \tag{42}$$

og $v_y(x, 0) = v_0$, hvor v_0 er en konstant

Hva er den mest generelle formen for $v_y(x, y)$ som oppfyller kontinuitetslikningen?

Solution: Ettersom v_x kun er en funksjon av y blir $\partial_x v_x = 0$ og kontinuitetslikningen gir oss

$$\partial_y v_y = 0 \implies v_y(x) \tag{43}$$

Siden v_y er konstant ved $y = 0$ og v_y kun kan være en funksjon av x, må den være konstant overalt.

9 Euler

1 Euler v1

Et hastighetsfelt i en friksjonsfri, inkompressibel væske er gitt av

$$\mathbf{v} = 2xy\hat{\mathbf{x}} - y^2\hat{\mathbf{y}} \tag{44}$$

Finn et uttrykk for $\partial_x p$ (x-komponenten av gradienten til trykket). Neglisjer gravitasjon.

Solution: Navier-Stokes likning i x-retning blir forenklet (stasjonært, friksjonsfritt, neglisjerer gravitasjon)

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)v_x = -\partial_x p \tag{45}$$

Vi finner dermed x-komponenten av gradienten til trykket som

$$\partial_x p = -\rho(v_x\partial_x + v_y\partial_y)v_x = -\rho(2xy(2y) + y^2(2x)) = -\rho 2xy^2 \tag{46}$$

2 Euler v2

Et hastighetsfelt i en friksjonsfri, inkompressibel væske er gitt av

$$\mathbf{v} = 4xy\hat{\mathbf{x}} + 3y^2\hat{\mathbf{y}} \tag{47}$$

Finn et uttrykk for $\partial_x p$ (x-komponenten av gradienten til trykket). Neglisjer gravitasjon

Solution: Som over med resultatet

$$\partial_x p = -\rho 28xy^2 \tag{48}$$

10 Strømningsfunksjonen

1 Strømfunksjon og hastighetspotensial

Gitt 2D-strømning med hastighetsfelt

$$\mathbf{v} = 2V(x/L - y/L)\hat{\mathbf{x}} - 2Vy/L\hat{\mathbf{y}} \tag{49}$$

Bestem strømningsfunksjonen og hastighetspotensialet dersom de eksisterer.

Solution: For at strømningsfunksjonen skal eksistere må vi ha $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0$,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \frac{2V}{L} - \frac{2V}{L} = 0 \tag{50}$$

Fra $v_x = \partial_y \psi$ får vi

$$\psi = \frac{2V}{L}\left(xy - \frac{y^2}{2}\right) + f(x) \tag{51}$$

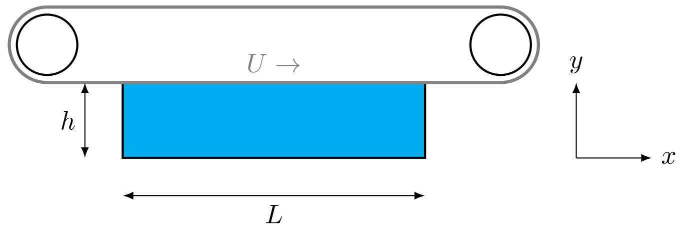


Figure 1: Oppgave 11

Fra $v_y = -\partial_x \psi$ får vi

$$\psi = \frac{2V}{L}xy + f(y) \tag{52}$$

Det endelige uttrykket for strømningsfunksjonen blir dermed

$$\psi = \frac{2V}{L}xy - \frac{V}{L}y^2 \tag{53}$$

For at hastighetspotensialet skal eksistere må hastighetsfeltet være rotasjonsfritt.

Regner man ut virvlingen til hastighetsfeltet finner man at

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{2V}{L} \tag{54}$$

Hastighetsfeltet er dermed ikke rotasjonsfritt og det eksisterer ikke et hastighetspotensial.

11 NS

1 NS

Anta at et vi har en beholder som vist i figur 1 hvor den øverste flaten i beholderen er et bånd som beveger seg i x-retning med hastigheten U og dermed setter i gang en strømning i beholderen gjennom friksjonen mellom båndet og væsken. Strømmen vi gå i positiv x-retning i den øvre del av beholderen og i negativ x-retning i den nedre del av beholderen. Beholderen er fylt med en inkompressibel væske med tetthet ρ og viskositet μ.

Vi skal anta at beholderen er veldig lang i x-retning ($L \gg h$) slik at vi kan se bort fra effekter ved endene og kun betrakte strømning i et område nær midten av beholderen og at strømningen er parallell med x-aksen. Vi antar en stasjonær tilstand og heftebetingelser ($\mathbf{v} = 0$) ved alle overflater. Neglisjer gravitasjonskrefter.

(a) Vis at x-komponenten av trykkgradienten i væsken er konstant.

Solution:

Vi har kun strømning parallelt med x-aksen, $\mathbf{v} = (v_x, 0)$.

Fra kontinutietslikningen får vi da

$$\partial_x v_x = 0 \implies v_x = v_x(y) \tag{55}$$

Dermed forsvinner de konvektive leddene fra Navier-Stokes siden $v_x \partial_x v_x(y) = 0$

Fra y-komponenten av Navier-Stokes likning får vi

$$\partial_y p = 0 \implies p = p(x) \tag{56}$$

Fra x-komponenten av Navier-Stokes likning får vi

$$\mu \nabla^2 v_x = \partial_x p \tag{57}$$

Siden v_x er kun en funksjon av y og p kun en funksjon av x kan vi skrive

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 v_x(y)}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} \tag{58}$$

Venstresiden er kun en funksjon av y og høyresiden av x og begge sider må derved være lik en konstant om likningen skal være gydlig for alle x og y.

(b) Vis at hastighetesfeltet er gitt av

$$v_x(y) = \frac{U}{h} y + \frac{1}{2\mu} \partial_x p (y^2 - hy) \tag{59}$$

Solution: Skriver opp Navier-Stokes likning for x-retningen.

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) v_x = -\frac{\partial_x p}{\rho} + \nu \nabla^2 v_x \tag{60}$$

Siden hastigheten kun har en x-komponent og denne kun er en funksjon av y forsvinner det første leddet og vi står igjen med

$$\mu \partial_y^2 v_x = \partial_x p \tag{61}$$

Integrerer vi opp dette uttrykket to ganger får vi

$$v_x = \frac{1}{2\mu} (\partial_x p) y^2 + C_1 y + C_2 \tag{62}$$

Bruker grensebetingelsene for å bestemme konstantene. Setter $y = 0$ ved den nederste flaten som gir $C_2 = 0$. Setter så $v_x(h) = U$,

$$\frac{1}{2\mu} (\partial_x p) h^2 + C_1 h = U \tag{63}$$

Som gir

$$C_1 = \frac{U}{h} - \frac{1}{2\mu} \partial_x p h \tag{64}$$

Vi får dermed tilslutt

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \partial_x p (y^2 - yh) + \frac{U}{h} y \tag{65}$$

Appendiks

Hydrostatikk (Opprinnelige oppgave)

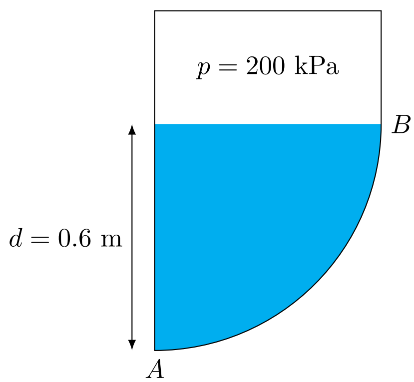
2 Hydrostatikk v1

Anta at vi har en tank med benzen som vist i figuren. Tanken er trykksatt til 200 kPa i luftrommet. Anta at tanken er 1.0 m dyp inn i planet. Slå opp nødvendige materialparametre og siter kilden.

Centroiden til en kvartsirkel med radius R ligger $(4R/3\pi, 4R/3\pi)$ fra hjørnet

Hva blir den netto *vertikale* kraftkomponenten som virker på arealet mellom A og B (kvartsirkelen)?

Hva blir dreiemomentet som virker på arealet mellom A og B relativt til en akse gjennom punktet A inn i planet?



Solution: Det spørres om den *netto* vertikale kraften som virker på arealet mellom A og B. Men netto kraft på et objekt som er i ro er null. Null hadde med andre ord vært det egentlig riktig svaret på denne oppgaven.

De fleste tolket likevel oppgaven slik som den var ment (se ny variant over). Følgende tolkninger med tilhørerende riktig svar gir full uttelling.

- Netto vertikal kraft (=0).
- Vertikal Kraft som virker på flaten fra væsken.
- Vertikal kraft som virker på flaten fra væsken og den ytre atmosfæren.

For dreiemomentet er det ikke spesifisert at det er netto dreiemoment men uten ytterligere spesifikasjon kan man anta at også her vil null egentlig være det korrekte svaret gitt ordlyden i oppgaven.

Følgende tolkninger med riktig svar gir full uttelling,

- Netto dreiemoment på flaten (= 0)
- Totalt dreiemoment fra væsken på flaten.
- Totalt dreiemoment fra væsken og eksterne atmosfære på flaten
- Dreiemoment på væsken fra flaten fra vertikale kraftkomponenter
- Dreiemoment på væsken og atmosføren fra flaten fra vertikale kraftkomponenter